

DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS PROPIAS DE PLACAS MULTICAPAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

Roberto S. Carnicer, Braian A. Desía, Rodolfo A. Schwarz

Facultad de Ingeniería, Universidad de Belgrano, Villanueva 1324, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, rcarnicer@freyreyasoc.com.ar, b.desia@hotmail.com.ar, rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar.

Palabras Clave: Elementos finitos mixtos, Placas multicapas, Multiplicadores de Lagrange, Frecuencias naturales, Vibraciones libres.

Resumen. A partir de la solución mixta para resolver el comportamiento de placas multicapas por aplicación del método de los elementos finitos se realiza el cálculo de las frecuencias propias. El objeto principal es el de utilizar el modelo mixto, analizando cada capa como una placa aislada, donde la continuidad de desplazamientos se logra mediante multiplicadores de Lagrange (que representan variables estáticas). Este procedimiento nos permite trabajar con cualquier modelo para placa simple (de manera de asegurar el adecuado comportamiento de cada capa), y la complejidad del sistema multicapa se evita asegurando la condición de desplazamientos mediante los multiplicadores de Lagrange (variables estáticas).

La placa se discretiza por modelización de elementos finitos basada en un modelo híbrido primario, donde el dominio es dividido por cuadriláteros, tanto para el campo de los desplazamientos como para el de las variables estáticas.

Se ha implementado este elemento mixto para placas y se han realizado diversos ejemplos para vibraciones que han sido contrastados exitosamente por resultados obtenidos mediante otros métodos de la bibliografía.

1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos avanzados son ampliamente usados en muchas ramas de la ingeniería tales como la ingeniería civil, la ingeniería naval y la ingeniería aeroespacial debido a su alta relación resistencia-peso, excelente resistencia a la corrosión, buen comportamiento a la fatiga y otras propiedades superiores respecto a los materiales convencionales.

Dentro de los diferentes tipos de materiales compuestos, los laminados resultan los más populares debido a su variedad de aplicaciones estructurales en situaciones que se requiere elevada resistencia membranal y a la flexión. Los laminados compuestos son, básicamente, placas formadas por varias láminas que se encuentran perfectamente unidas entre sí, presentando una conducta anisótropa. Cada lámina es compuesta por fibras embebidas en una matriz. Estas fibras le confieren altas propiedades mecánicas a la lámina en la dirección de la fibra, mientras que la matriz las mantiene ligadas. Las láminas se ubican una sobre otras orientadas de acuerdo a los requerimientos de diseño, a fin de optimizar el uso del material. Su creciente empleo demanda el desarrollo de métodos numéricos eficientes y precisos para predecir adecuadamente el complejo comportamiento de los mismos.

En el presente artículo, se propone una solución, basada en un modelo por capas, para la determinación de las características modales a partir de elementos finitos con variables mixtas (cinemáticas y estáticas).

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se considera una placa compuesta de n capas de altura h_i . Se define un sistema de coordenadas Cartesianas locales (x, y, z) para cada capa en su superficie media Ω_i , donde x, y son las coordenadas en el plano, z es la coordenada transversal. La cara superior se ubica en $z = -h_i/2$, y la inferior en $z = +h_i/2$.

Cada capa se modela en forma independiente, adoptando la Teoría de Reissner-Mindlin de Deformación por Corte de Primer Orden (*FSDT – First order Shear Deformation Theory*). De este modo, el campo de desplazamientos para un punto (x, y, z) de una capa genérica i está dado por,

$$\begin{aligned} u_{xi} &= u_{oxi}(x, y) - z_i \beta_{xi}(x, y) \\ u_{yi} &= u_{oyi}(x, y) - z_i \beta_{yi}(x, y) \\ w_i &= w_{oi}(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{u}_i = [u_{oxi}, u_{oyi}]^T$ son desplazamientos en el plano medio, w_i es el desplazamiento vertical (que se asume constante a lo largo del espesor al considerar la normal al plano medio inextensible), y $\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{xi}, \beta_{yi}]^T$ son rotaciones de la normal transversal alrededor de los ejes y, x respectivamente.

El funcional de la energía potencial de Reissner-Mindlin para una capa genérica i en función $(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i)$ se expresa como,

$$\begin{aligned} \Pi_i(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i) &= \frac{1}{2} h_i a(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) + \\ &+ \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i, \nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i) \end{aligned} \quad (2)$$

donde los operadores bilineales $a(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$ y $a(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)$ representan la energía de deformación membranal y por flexión respectivamente, mientras que $b(\nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i, \nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i)$, el término de energía de deformación por corte. En el análisis de vibraciones libres, la energía potencial debido al trabajo externo de las cargas aplicadas es nula.

Por su parte, el funcional de la energía cinética para una capa genérica i en términos de $(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i)$ se expresa como,

$$T_i(\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \dot{w}_i) = \frac{1}{2} h_i c(\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{\mathbf{u}}_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} c(\dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i) + \frac{1}{2} h_i c(\dot{w}_i, \dot{w}_i) \quad (3)$$

donde $c(\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{\mathbf{u}}_i)$, $c(\dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i)$, y $c(\dot{w}_i, \dot{w}_i)$ representan los operadores de la energía cinética relacionados a la inercia en el plano, rotacional y transversal, respectivamente. La derivada respecto del tiempo t es indicada con un punto.

El comportamiento conjunto de las capas que conforman el sistema requiere la continuidad de desplazamientos entre capas adyacentes (Ver Figura 1), para lo cual se imponen las siguientes restricciones cinemáticas,

1. Los desplazamientos $u_{xi}(x, y, h_i/2)$ y $u_{yi}(x, y, h_i/2)$ en la interface I+1,

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y, h_i/2) &= u_{oxi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{xi}(x, y) \\ u_{yi}(x, y, h_i/2) &= u_{oyi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{yi}(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

deben ser iguales a los desplazamientos $u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$ y $u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$ en la interface I+1,

$$\begin{aligned} u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) &= u_{oxi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{xi+1}(x, y) \\ u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) &= u_{oyi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{yi+1}(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

teniéndose:

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y, h_i/2) &= u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) \\ u_{yi}(x, y, h_i/2) &= u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) \end{aligned} \quad (6)$$

2. Los desplazamientos verticales w_i de la capa i deben ser los mismos que los desplazamientos verticales w_{i+1} de la capa $i+1$:

$$w_i(x, y) = w_{i+1}(x, y) \quad (7)$$

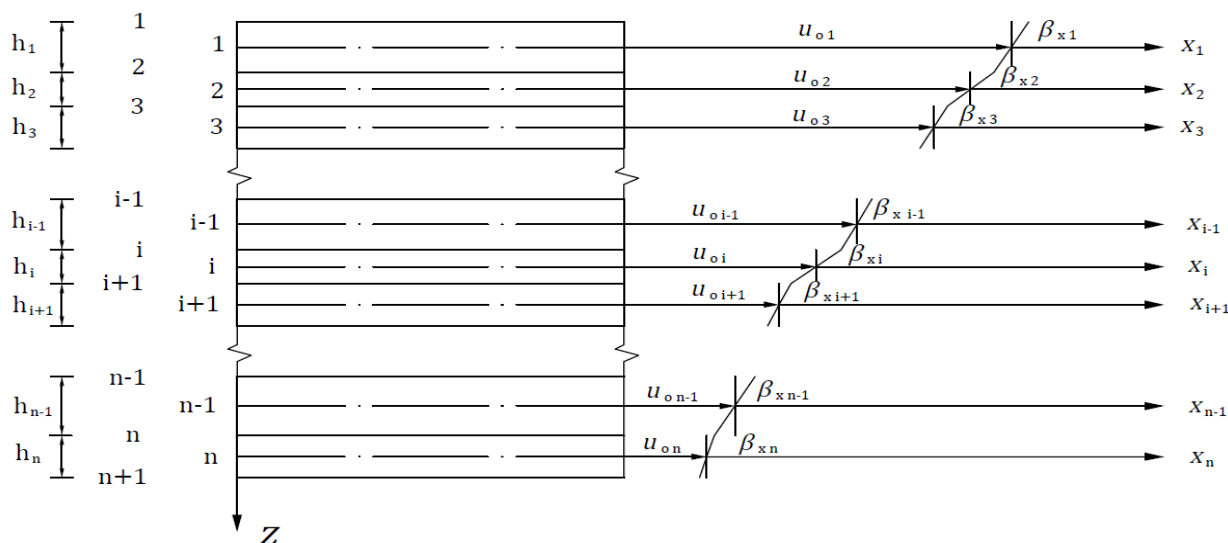


Figura 1: Campo de desplazamientos a lo largo del espesor para el modelo por capas.

Así, el sistema multicapas se obtiene como una superposición de n placas simples, donde los requisitos de continuidad cinemática son asegurados matemáticamente partir de la inclusión de multiplicadores de Lagrange $\lambda_j = [\lambda_{xj}, \lambda_{yj}]^T$ y μ_j que representan las tensiones interlaminares (fuerzas de superficie) en la interfaz j . De este modo, el funcional de la energía potencial total del sistema se define como,

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \mu_i) = & \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i a(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i, \nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i) \right\} + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \iint_{\Omega_{j+1}} \left[\left(\mathbf{u}_j - \boldsymbol{\beta}_j \frac{h_j}{2} \right) - \left(\mathbf{u}_{j+1} - \boldsymbol{\beta}_{j+1} \frac{h_{j+1}}{2} \right) \right] \boldsymbol{\lambda}_{j+1} d\Omega \right. \\ & \left. + \iint_{\Omega_{j+1}} (w_j - w_{j+1}) \mu_{j+1} d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

En tanto que el funcional de la energía cinética total es dado por,

$$T(\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \dot{w}_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i c(\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{\mathbf{u}}_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} c(\dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \dot{\boldsymbol{\beta}}_i) + \frac{1}{2} h_i c(\dot{w}_i, \dot{w}_i) \right\} \quad (9)$$

La justificación del sentido físico de los multiplicadores de Lagrange es demostrada por *Alliney y Carnicer (1992)*; *Carnicer, Desía, Schwarz y Pan (2012)*.

3 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Las ecuaciones que gobiernan el problema se consiguen planteando el Principio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T) dt = 0 \quad (10)$$

Introduciendo (8) y (9) en (10), y tomando la variación, se obtienen las expresiones de Euler-Lagrange del problema variacional,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i: \quad & h_i a_i(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i) - \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\lambda}_i \delta \mathbf{u}_i d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \boldsymbol{\lambda}_{i+1} \delta \mathbf{u}_i d\Omega_{i+1} \\ & - h_i c(\dot{\mathbf{u}}_i, \delta \dot{\mathbf{u}}_i) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\beta}_i: \quad & \frac{h_i^3}{12} a_i(\boldsymbol{\beta}_i, \delta \boldsymbol{\beta}_i) + h_i b(\nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i, -\delta \boldsymbol{\beta}_i) - \int_{\Omega_i} \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\lambda}_i \delta \boldsymbol{\beta}_i d\Omega_i \\ & + \int_{\Omega_{i+1}} \frac{h_i}{2} \boldsymbol{\lambda}_{i+1} \delta \boldsymbol{\beta}_i d\Omega_{i+1} - \frac{h_i^3}{12} c(\dot{\boldsymbol{\beta}}_i, \delta \dot{\boldsymbol{\beta}}_i) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta w_i: \quad & h_i b(\nabla w_i - \boldsymbol{\beta}_i, \delta \nabla w_i) - \int_{\Omega_i} \mu_i \delta w_i d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \mu_{i+1} \delta w_i d\Omega_{i+1} \\ & - h_i c(\dot{w}_i, \delta \dot{w}_i) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta \boldsymbol{\lambda}_i: \quad \int_{\Omega_i} \left[\left(\mathbf{u}_{i-1} - \boldsymbol{\beta}_{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \right) - \left(\mathbf{u}_i + \boldsymbol{\beta}_i \frac{h_i}{2} \right) \right] \delta \boldsymbol{\lambda}_i d\Omega_i = 0 \quad (14)$$

$$\delta \mu_i: \quad \int_{\Omega_i} (w_{i-1} - w_i) \delta w_i d\Omega_i = 0 \quad (15)$$

El conjunto de ecuaciones obtenidas contiene derivadas primeras de las variables dependientes $(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i)$, por lo que las funciones de forma de las mismas requieren continuidad C^0 , mientras que para las variables dependientes $(\boldsymbol{\lambda}_i, \mu_i)$ admiten continuidad C^{-1} al no aparecer sus derivadas. Igualmente, por simplicidad se adopta la misma interpolación para todas las variables,

$$(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\beta}_i, w_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \mu_i) = \sum_{j=1}^m N_j \left(\mathbf{u}_{ij}, \boldsymbol{\beta}_{ij}, w_{ij}, \boldsymbol{\lambda}_{ij}, \mu_{ij} \right) \quad (16)$$

del problema de autovalores resulta dificultosa. En esta sección, se propone una metodología simple de resolución del problema en base al Método de Iteración Inversa (Ver Chopra, 1995).

El procedimiento consiste en establecer inicialmente un vector de prueba. Posteriormente, se evalúa el lado derecho de (24). Dado que los vectores propios sólo pueden ser determinados dentro de un factor de escala, la elección de ω^2 no afecta el resultado, por lo cual se asume $\omega^2 = 1$. De esta forma, se obtiene el vector de cargas equivalentes expuesto en (26).

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{M}_{11}} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}} & & \\ & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{M}_{22}} & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}} \\ & & & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{M}_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \lambda_{2,k} \\ \mathbf{x}_{2,k} \\ \lambda_{3,k} \\ \mathbf{x}_{3,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{22} \cdot \mathbf{x}_{2,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{33} \cdot \mathbf{x}_{3,k} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Dado que el vector inicial se establece arbitrariamente, en general no se cumple la igualdad representada en (24) (si se satisface, el vector de prueba es un autovector), por lo que se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{C}_{11}} & \boxed{\mathbf{Q}_{12}^T} & & \\ \boxed{\mathbf{Q}_{12}} & \boxed{\mathbf{0} \quad \mathbf{Q}_{22}^T} & & \\ & \mathbf{Q}_{22} & \boxed{\mathbf{C}_{22}} & \boxed{\mathbf{Q}_{23}^T} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{23} & \boxed{\mathbf{0} \quad \mathbf{Q}_{33}^T} \\ & & & \mathbf{Q}_{33} & \boxed{\mathbf{C}_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,k+1} \\ \lambda_{2,k+1} \\ \mathbf{x}_{2,k+1} \\ \lambda_{3,k+1} \\ \mathbf{x}_{3,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{22} \cdot \mathbf{x}_{2,k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{33} \cdot \mathbf{x}_{3,k} \end{pmatrix} \quad (27)$$

A partir de (27), se plantea,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} \mathbf{x}_{1,k+1} &= \mathbf{M}_{11} \mathbf{x}_{1,k} - \mathbf{Q}_{12}^T \lambda_{2,k+1} \\ \mathbf{C}_{22} \mathbf{x}_{2,k+1} &= \mathbf{M}_{22} \mathbf{x}_{2,k} - \mathbf{Q}_{22} \lambda_{2,k+1} - \mathbf{Q}_{23}^T \lambda_{3,k+1} \\ \mathbf{C}_{33} \mathbf{x}_{3,k+1} &= \mathbf{M}_{33} \mathbf{x}_{3,k} - \mathbf{Q}_{33} \lambda_{3,k+1} \end{aligned} \quad (28)$$

Reemplazando los desplazamientos en las ecuaciones restantes, se obtiene la matriz reducida que se muestra en (29).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{C}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T + \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{23}^T \\ \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{23}^T + \mathbf{Q}_{33}^T \cdot \mathbf{C}_{33}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{2,k+1} \\ \lambda_{3,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{C}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{x}_{1,k} - \mathbf{Q}_{22}^T \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{22} \cdot \mathbf{x}_{2,k} \\ \mathbf{Q}_{23} \cdot \mathbf{C}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{22} \cdot \mathbf{x}_{2,k} - \mathbf{Q}_{33}^T \cdot \mathbf{C}_{33}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{33} \cdot \mathbf{x}_{3,k} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Así, las variables cinemáticas se determinan a partir de las variables estáticas, resolviéndose el “problema mixto”.

La condición suficiente pero no necesaria para resolver el sistema (29) resulta,

$$n_{x_i} \geq n_{\lambda_i} \quad (30)$$

donde n_{x_i} y n_{λ_i} son los números de grados de libertad de las variables correspondientes (Ver

Zienkiewicz y Taylor, 1994).

El correspondiente autovalor se computa aplicando el Cociente de Rayleigh,

$$(\omega^2)_{k+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_{i,k+1}^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{x}_{i,k}}{\mathbf{x}_{i,k+1}^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{x}_{i,k+1}} \quad (31)$$

Al ser definidas positivas las sub-matrices de masa \mathbf{M}_{ii} asociadas a cada una de las capas, se garantiza que el divisor de la expresión (31) no sea nulo.

Luego, se normaliza el vector resultante de manera que el nuevo vector cumpla,

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{x}}_{i,k+1}^T \mathbf{M}_{ii} \bar{\mathbf{x}}_{i,k+1} = 1 \quad (32)$$

La normalización mantiene los elementos del vector con valores similares durante cada iteración. Si no se realiza, los valores de los elementos crecen y decrecen en cada paso, pudiendo ocasionar problemas numéricos.

La comprobación de la convergencia se especifica comparando dos valores sucesivos del autovalor,

$$\left| \frac{(\omega^2)_{k+1} - (\omega^2)_k}{(\omega^2)_{k+1}} \right| \leq \text{tolerancia} \quad (33)$$

Si el criterio de convergencia no se satisface, se comienza una nueva iteración utilizando como vector de prueba aquel obtenido al resolver el sistema (27). El procedimiento se repite hasta alcanzar la convergencia establecida. A medida que se incrementa el número de iteraciones, se tiende al autovalor y autovector más bajo.

La evaluación de los modos y frecuencias superiores puede llevarse a cabo introduciendo un desplazamiento (“*shifting*”) en la escala de autovalores, o estableciendo un vector de prueba inicial ortogonal a los autovectores hallados.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir del modelo presentado, se implementa un programa en código GNU OCTAVE para el análisis numérico de vibraciones libres no amortiguadas de placas compuestas. Se estudian los efectos en la frecuencia de la anisotropía del material, la relación espesor/lado, y el número de láminas. Además, se presenta la variación a través del espesor de las tensiones transversales asociadas al modo fundamental.

Las placas analizadas presentan una geometría rectangular con dimensiones a, b coincidentes con las direcciones x, y respectivamente (Ver Figura 2). En todos los ejemplos, se modela por razones de simetría para el modo fundamental de vibración, sólo un cuarto de la placa con una malla uniforme de 6x6 elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos con interpolación lineal. La evaluación numérica de las integrales se lleva a cabo a partir del método de cuadratura de Gauss, empleándose 2x2 puntos para los términos de membrana, flexión e inercia, mientras que 1x1 puntos para los referidos al corte.

Las condiciones de borde empleadas son:

$$\begin{aligned} (x, 0): & \quad w = u_{ox} = \beta_x = 0 \\ (0, y): & \quad w = u_{oy} = \beta_y = 0 \\ (x, b/2): & \quad u_{oy} = \beta_y = 0 \\ (a/2, y): & \quad u_{ox} = \beta_x = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

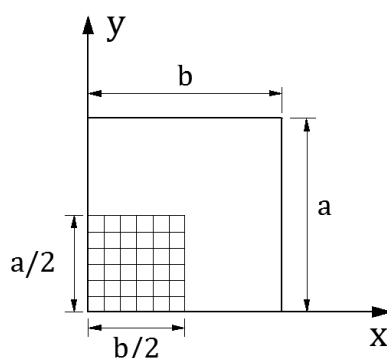


Figura 2: Representación de la placa y malla típica empleada.

Las propiedades elásticas de los materiales son:

$$\frac{G_{23}}{E_2} = 0.6 \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (35)$$

donde la relación E_1/E_2 se especifica para cada ejemplo en particular. Los valores de E_2 y ρ son arbitrarios por la adimensionalización utilizada,

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (36)$$

La [Tabla 1](#) muestra los efectos en la frecuencia fundamental del número de láminas así como del grado de ortotropía individual de las mismas. Se considera una placa compuesta cuadrada con una relación espesor/lado $h/a=0.20$. La relación E_1/E_2 así como el número de láminas varían. Los resultados obtenidos se contrastan con la solución de la Elasticidad 3D ([Noor, 1973](#)), notándose una excelente correlación. Se deduce que a medida que se incrementan el número de láminas, es decir, el grado de anisotropía global de la placa, también lo hace la frecuencia fundamental. Además, se observa que a medida que se aumentan las capas de cálculo, la solución presentada se refina. Al mejorar la discretización del espesor, se computa en forma más realista la energía de deformación por corte que se asume constante en cada capa.

El efecto de la relación espesor/lado en la frecuencia fundamental se estudia en la [Tabla 2](#). Se analiza una placa cuadrada laminada $(0^\circ/90^\circ)_s$ con una relación $E_1/E_2=40$. Cada lámina individual se discretizó en tres *layers* de cálculo. Los resultados se comparan con los de otros autores.

Respecto a la performance de la metodología de resolución del problema de autovalores, los resultados se obtuvieron con un error relativo inferior a $1e-6$ en una cantidad de iteraciones que alternó entre 4 y 5, dependiendo el caso. Los ejemplos que requirieron mayor ciclo de iteración fueron los correspondientes a una relación E_1/E_2 alta.

Por último, se analiza el comportamiento de las variables estáticas. Se consideran para una relación $h/a=0.30$, dos placas cuadradas con una secuencia de laminado $(0^\circ/90^\circ)$, y $(0^\circ/90^\circ)_2$, y para una relación $h/a=0.20$, una placa cuadrada con un esquema de laminado $(0^\circ/90^\circ)_5$. Se representa la variación a lo largo del espesor de las tensiones transversales modales computadas a través de los multiplicadores de Lagrange en la [Figura 3](#), [Figura 4](#) y [Figura 5](#). Los valores obtenidos son divididos por su máximo valor absoluto. En todos los casos, los resultados conseguidos son semejantes a los hallados por la solución de la Elasticidad de [Noor \(1973\)](#), la solución analítica de la Teoría Global de Placas de Orden Superior (*Global Higher-order Plate Theory*) de [Matsunaga \(2000\)](#), y la solución tri-dimensional mixta de elementos finitos de [Desai, Ramtekkar y Shah \(2003\)](#).

| Laminado | Referencia | Discretización del espesor | Relación E_1/E_2 | | | | |
|------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------|--------|---------|---------|---------|
| | | | 3 | 10 | 20 | 30 | 40 |
| $(0^\circ/90^\circ)$ | <i>Noor (1973)</i> | | 6.2577 | 6.9845 | 7.6745 | 8.1762 | 8.5625 |
| | Actual | 2 layers | 6.3350 | 7.0827 | 7.8000 | 8.3385 | 8.7610 |
| | | 4 layers | 6.2810 | 7.0322 | 7.7642 | 8.3092 | 8.7362 |
| | | 6 layers | 6.2672 | 7.0085 | 7.7197 | 8.2425 | 8.6482 |
| | | 8 layers | 6.2622 | 6.9990 | 7.7015 | 8.2150 | 8.6120 |
| | | 10 layers | 6.2597 | 6.9945 | 7.6925 | 8.2015 | 8.5940 |
| $(0^\circ/90^\circ)_2$ | <i>Noor (1973)</i> | | 6.5455 | 8.1445 | 9.4055 | 10.1650 | 10.6797 |
| | Actual | 4 layers | 6.5562 | 8.1948 | 9.5107 | 10.3133 | 10.8607 |
| | | 8 layers | 6.5340 | 8.1382 | 9.4080 | 10.1752 | 10.6967 |
| | | 12 layers | 6.5297 | 8.1272 | 9.3872 | 10.1470 | 10.6622 |
| $(0^\circ/90^\circ)_3$ | <i>Noor (1973)</i> | | 6.6100 | 8.4142 | 9.8397 | 10.6957 | 11.2727 |
| | Actual | 6 layers | 6.6002 | 8.4205 | 9.8697 | 10.7455 | 11.3380 |
| | | 12 layers | 6.5895 | 8.3918 | 9.8157 | 10.6712 | 11.2485 |
| $(0^\circ/90^\circ)_5$ | <i>Noor (1973)</i> | | 6.6457 | 8.5625 | 10.0842 | 11.0027 | 11.6245 |
| | Actual | 10 layers | 6.6230 | 8.5400 | 10.0645 | 10.9857 | 11.6102 |

Tabla 1: Efecto del número de capas y del grado de ortotropía de las láminas individuales en la frecuencia fundamental $\bar{\omega}$ de una placa cuadrada simplemente apoyada con $h/a=0.20$.

| Relación h/a | <i>Desai et al (2003)</i> | <i>Matsumaga (2000)</i> | Actual |
|----------------|---------------------------|-------------------------|--------|
| 0.50 | 5.315 | 5.3211 | 5.3462 |
| 0.20 | 10.682 | 10.6876 | 10.730 |
| 0.10 | 15.069 | 15.0721 | 15.160 |
| 0.05 | 17.636 | 17.6369 | 17.770 |
| 0.04 | 18.067 | 18.0557 | 18.198 |
| 0.02 | 18.670 | 18.6702 | 18.826 |
| 0.01 | 18.835 | 18.8352 | 18.995 |

Tabla 2: Frecuencia fundamental $\bar{\omega}$ para una placa cuadrada simplemente apoyada variando h/a ($E_1/E_2=40$).

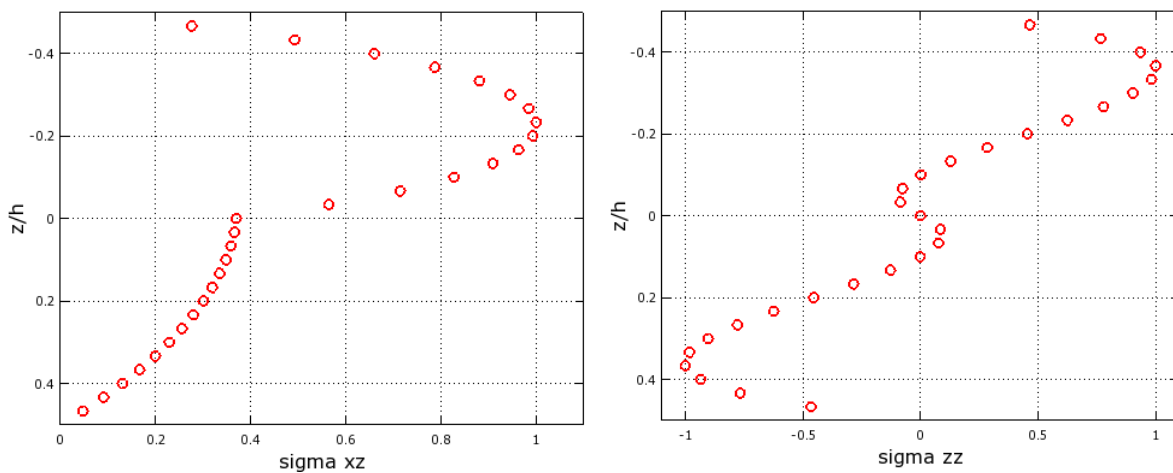


Figura 3: Variación a través del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ y la tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{zz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ normalizadas para una placa cuadrada laminada $(0^\circ/90^\circ)$ simplemente apoyada ($h/a=0.30 - E_1/E_2=30 - 30$ layers).

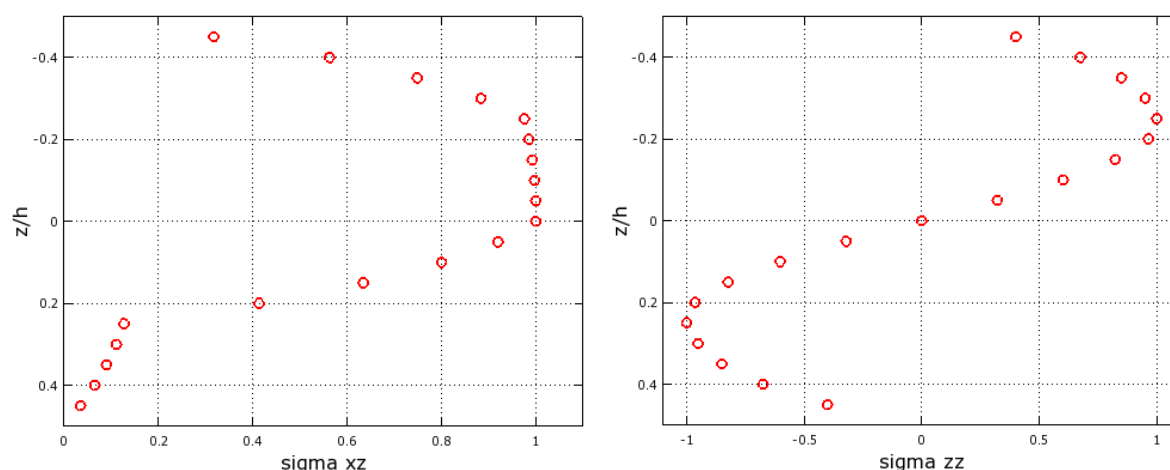


Figura 4: Distribución a lo largo del espesor de la tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ y la tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{zz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ normalizadas para una placa cuadrada laminada $(0^\circ/90^\circ)_2$ simplemente apoyada ($h/a=0.30 - E_1/E_2=30 - 20$ layers).

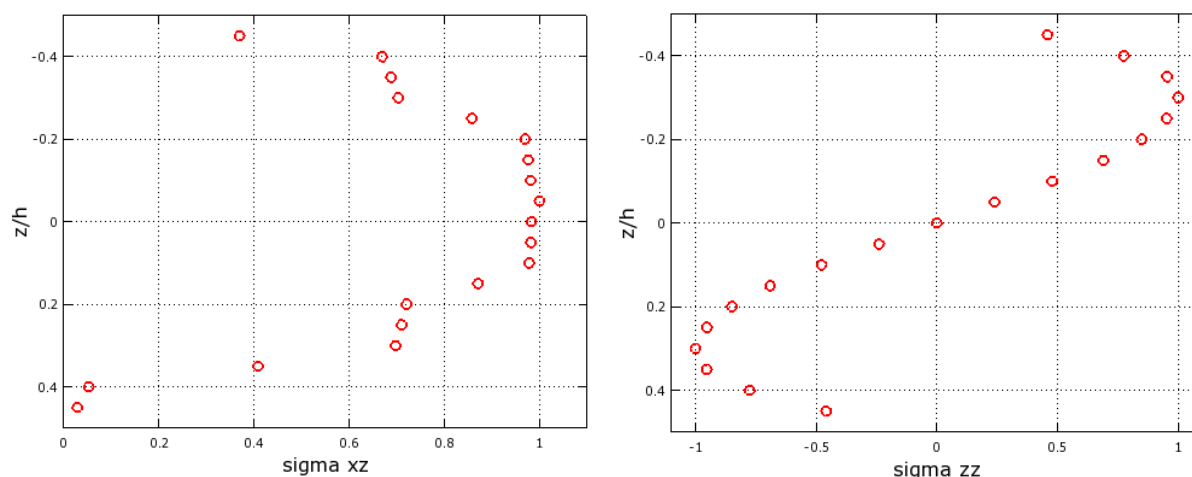


Figura 5: Tensión de corte transversal $\bar{\sigma}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ y tensión normal transversal $\bar{\sigma}_{zz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right)$ normalizadas en el espesor para una placa cuadrada laminada $(0^\circ/90^\circ)_5$ simplemente apoyada ($h/a=0.20 - E_1/E_2=30 - 20$ layers).

6 CONCLUSIONES

Se presenta un modelo de elementos finitos mixtos para determinar las características modales de placas multicapas. La continuidad de los desplazamientos así como de las tensiones transversales es asegurada a lo largo del espesor de la placa a partir de la inclusión de multiplicadores de Lagrange. La formulación mixta permite evaluar directamente las tensiones transversales sin necesidad de integrar las ecuaciones de equilibrio que conllevan pérdidas de precisión, resultando un punto de gran interés en el estudio del comportamiento de laminados compuestos. Se implementa una metodología a partir del Método de Iteración Inversa para resolver el problema de autovalores obteniéndose buenos resultados en unas pocas iteraciones. La precisión del modelo es demostrada a lo largo de una serie de problemas donde los resultados hallados se asemejan a los disponibles en la literatura.

REFERENCIAS

Alliney S., and Carnicer R. S., "A hybrid finite element model for multilayered plates". *Computational Mechanics*, 10:5:319-333, 1992.

- Carnicer R. S., Desía B. A., Schwarz R. A., and Pan Q., “Análisis de placas multicapas mediante un modelo de elementos finitos híbrido”. *Mecánica Computacional Vol. XXXI*, 857-874, 2012.
- Chopra A. K., “Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering”. Prentice Hall, 392-405, 1995.
- Desai Y. M., Ramtekkar G. S., and Shah A. H., “Dynamics analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model”. *Composite Structures*, 59:237-249, 2003.
- Matsunaga H., “Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory”. *Composite Structures*, 48:231-244, 2000.
- Noor A. K., “Free vibration of multilayered composite plates”. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1038-1039, 1973.
- Zienkiewicz O. C., and Taylor R. L., “El Método de los Elementos Finitos: formulaciones básicas y problemas lineales” McGraw Hill, 333-387, 1994.