

VIBRACIONES DE UN PORTICO DE DOS TRAMOS CON RESTRICCIONES ELÁSTICAS Y DOS RÓTULAS ELÁSTICAMENTE RESTRINGIDAS

Javier L. Raffo^a, Ricardo O. Grossi^b

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

^b*INIQUI-CONICET, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avenida Bolivia 5150, Salta, Argentina, grossiro@unsa.edu.ar, <http://www.unsa.edu.ar/iniqui/>*

Palabras Clave: Pórticos, frecuencias naturales, restricciones elásticas, rótulas, cálculo de variaciones.

Resumen. El análisis del comportamiento dinámico de componentes estructurales es un estudio esencial en problemas de ingeniería. Particularmente, el estudio de las vibraciones libres de pórticos es un análisis típico cuando se estudia la dinámica de estructuras. En este trabajo, se estudian las vibraciones libres de un pórtico de dos tramos con restricciones elásticas generales con dos rótulas internas elásticamente restringidas. La ecuación del movimiento, las condiciones de contorno y condiciones de transición se obtienen empleando el principio de Hamilton.

La inclusión de las rótulas elásticas internas, permite simular la presencia de fisuras. Para verificar la exactitud del modelo matemático desarrollado, se realizan comparaciones con resultados obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos. Se presentan nuevos resultados de formas modales y frecuencias naturales para diferentes configuraciones mecánicas.

1 INTRODUCCIÓN

Realizar un análisis del comportamiento dinámico de componentes estructurales es un estudio esencial en problemas de ingeniería. Es sabido que la gran mayoría de mecanismos estructurales cuenta con la presencia de pórticos, y al realizar un análisis dinámico de dichas estructuras, es importante realizar un estudio de vibraciones libres y conocer sus formas modales.

Realizando una breve descripción de los trabajos realizados al momento sin la intención de hacer una revisión completa de la bibliografía actual, solamente se citan algunos trabajos de referencia. El problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias también ha recibido un extenso tratamiento. [Rutemberg \(1978\)](#) determinó las frecuencias de vibraciones libres de una viga uniforme en voladizo con una restricción elástica rotacional en un punto intermedio. [Lau \(1984\)](#) presentó una extensión del trabajo de [Rutemberg \(1978\)](#) al incluir un vínculo elástico traslacional. [Rao \(1989\)](#) determinó las frecuencias de vibración de una viga empotrada en ambos extremos pero con una restricción elástica intermedia. [De Rosa et al. \(1995\)](#) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. [Arenas y Grossi \(1999\)](#) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. [Grossi y Albarracín \(2003\)](#) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio. [Raffo y Grossi \(2012\)](#) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias.

El estudio de las vibraciones libres de pórticos es un análisis típico cuando se estudia la dinámica de estructuras. [Oguamanam y otros \(1998\)](#) modelaron un pórtico de dos tramos abierto usando la teoría de vigas Euler-Bernoulli considerando un ángulo generalizado entre tramos y una masa en el extremo del segundo tramo. [Heppler y otros \(2003\)](#) examinaron la dinámica de un pórtico abierto de dos tramos con movimiento dentro y fuera del plano usando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El estudio de las vibraciones libres de pórticos con restricciones elásticas no ha sido tan extensamente tratado. [Albarracín y Grossi \(2005\)](#) determinaron las frecuencias naturales de un pórtico formado por una viga y una columna con restricciones elásticas considerando desplazamiento transversal y axial según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. [Grossi y Albarracín \(2013\)](#) trataron el problema de vibraciones libres de pórticos de tres tramos inclinados con restricciones elásticas en extremos y puntos de unión entre tramos desarrollando el cálculo de variaciones para obtener las ecuaciones de contorno.

En base a esta breve descripción, no se encuentra en la literatura el estudio de sistemas mecánicos tipo pórticos con rótulas elásticas intermedias, las cuales permiten adicionalmente la implementación de modelos de fisura como se ha analizado al momento en trabajos de vigas. A modo de ejemplo, [Ostachowicz y Krawczuk \(1991\)](#) propusieron un modelo de fisura en vigas el cual fué implementado en varios trabajos y siendo los mas actuales [Khaji y otros \(2009\)](#) donde implementaron el modelo de fisura en vigas considerando una flexibilidad elástica local donde esta rigidez depende del tamaño de la fisura que luego [Quintana et al. \(2010\)](#) utilizaron el mismo modelo en una viga con fisura restringida elásticamente resuelta con el método de Ritz en combinación del método de multiplicadores de Lagrange.

El objetivo de este trabajo es obtener las ecuaciones de contorno y transición de un pórtico de dos tramos con restricciones elásticas generales con dos rótulas internas elásticamente restringidas usando el cálculo de variaciones. Por otra parte se presentan resultados numéricos de las frecuencias naturales y las formas modales mediante la aplicación del método de

separación de variables y la obtención de la solución exacta.

Se presentan comparaciones con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos y se presentan nuevos resultados de frecuencias naturales y formas modales para distintas configuraciones mecánicas incluyendo un modelo de fisura.

2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

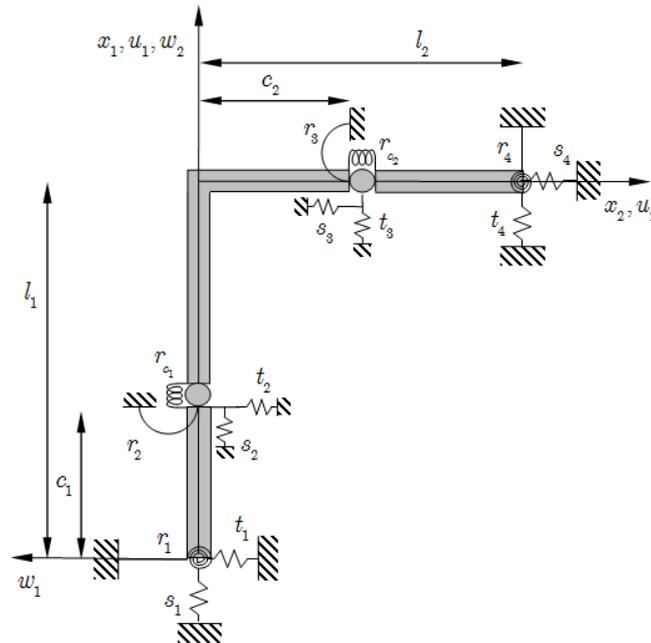


Figura 1: Sistema mecánico en estudio.

Para analizar el comportamiento del sistema en estudio en cualquier instante t , se supone que los desplazamientos axiales son descritos por las funciones $u_i(x_i, t)$, $x_i \in [0, l_i]$, con $i = 1, 2$, y los desplazamientos transversales por $w_i(x_i, t)$, $x_i \in [0, l_i]$, con $i = 1, 2$, tal como se esquematiza en la Figura 1. Las restricciones traslacionales se denotan por t_i y s_i , y las restricciones rotacionales por r_i , con $i = 1, \dots, 4$, y todas ellas están conectadas a un punto fijo. A su vez, las restricciones que están conectadas en ambos lados de la viga se denotan por r_{c_i} y actúan en el punto intermedio ubicado en $x_i = c_i$, con $i = 1, 2$.

De la Figura 1 se deduce que las condiciones de compatibilidad en el punto $x_1 = l_1$, están dadas por las relaciones:

$$w_1(l_1^-, t) = -u_2(0^+, t), \quad (1)$$

$$u_1(l_1^-, t) = w_2(0^+, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(l_1^-, t) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0^+, t), \quad (3)$$

donde l_i^- y 0^+ , indican que se usan límites y derivadas laterales. Para simplificar la notación de aquí en adelante se eliminan los supraíndices $+$ y $-$.

La energía cinética del sistema para un determinado instante t está dada por

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^{c_i} \left[(\rho A)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 + (\rho A)_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i \right. \\ \left. + \int_{c_i}^{l_i} \left[(\rho A)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 + (\rho A)_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i \right\}, \quad (4)$$

donde $(\rho A)_i = \rho_i A_i$, $i = 1, 2$, denota la masa por unidad de longitud correspondiente al tramo entre 0 y l_i . Por otra parte, la energía potencial total del sistema mecánico correspondiente a la deformación elástica de cada tramo del pórtico, a las restricciones elásticas en los extremos y a las restricciones elásticas intermedias está dada por

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^{c_i} \left[(EI)_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 + (EA)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i \right. \\ \left. + \int_{c_i}^{l_i} \left[(EI)_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 + (EA)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i \right. \\ \left. + r_i \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right)^2 + r_{i+2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \right)^2 + s_i u_1^2(a_i, t) + s_{i+2} u_2^2(a_{i+2}, t) \right. \\ \left. + t_i w_1^2(a_i, t) + t_{i+2} w_2^2(a_{i+2}, t) + r_{c_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

donde, $(EI)_i = E_i I_i$ denota la función que da la rigidez a la flexión y $(EA)_i = E_i A_i$ denota la rigidez axial, correspondientes al tramo entre 0 y l_i . Además es

$$a_1 = 0, \quad a_2 = c_2, \quad a_3 = c_3, \quad a_4 = l_2. \quad (6)$$

Según se indicó, el principio de Hamilton establece que la configuración que realmente adopta el sistema mecánico es la que hace estacionario al funcional $F(\mathbf{v}) = \int_{t_a}^{t_b} L dt$, en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano L es igual a $L = T_c - U$. En consecuencia, de acuerdo con (4) y (5), el funcional energético F está definido por

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left((\rho A)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 + (\rho A)_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\
& - (EI)_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 - (EA)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \Big] dx_i - r_i \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right)^2 \\
& - r_{i+2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \right)^2 - s_i u_1^2(a_i, t) - s_{i+2} u_2^2(a_{i+2}, t) - t_i w_1^2(a_i, t) \\
& \left. \left. \left. - t_{i+2} w_2^2(a_{i+2}, t) - r_{c_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right)^2 \right] \right\} dt,
\end{aligned} \tag{7}$$

donde se compactó la notación al usar $b_{i,1} = 0$, $b_{i,2} = c_i$, $b_{i,3} = l_i$.

Dada la cantidad de funciones involucradas en los tramos del pórtico, es conveniente introducir las siguientes funciones vectoriales $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, y los dominios $G_{i,1} = (0, c_i)$, $G_{i,2} = (c_i, l_i)$ cuyas clausuras son: $\bar{G}_{i,1} = G_{i,1} \cup \{0, c_i\}$, $\bar{G}_{i,2} = G_{i,2} \cup \{c_i, l_i\}$ y $G_i = (0, l_i)$, con $i = 1, 2$.

Para establecer la regularidad de las funciones se supone: $u_i(x_i, \bullet) \in C^2[t_a, t_b]$, $u_i(\bullet, t) \in C[0, l_i]$, $u_i(\bullet, t)|_{\bar{G}_{i,j}} \in C^2(\bar{G}_{i,j})$, y $w_i(x_i, \bullet) \in C^2[t_a, t_b]$, $w_i(\bullet, t) \in C[0, l_i]$, $w_i(\bullet, t)|_{\bar{G}_{i,j}} \in C^4(\bar{G}_{i,j})$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Siendo que las derivadas clásicas $(\partial^n u_i(x_i, t))/\partial x_i^n$, o $(\partial^n w_i(x_i, t))/\partial x_i^n$, con $n = 2, 3, 4$ no es necesario que existan en el intervalo $(0, l_i)$ pero si se deben imponer las condiciones $u_i(\bullet, t)|_{\bar{G}_{i,j}} \in C^2(\bar{G}_{i,j})$, y $w_i(\bullet, t)|_{\bar{G}_{i,j}} \in C^4(\bar{G}_{i,j})$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. En consecuencia, se observa que las derivadas $(\partial^n u_i(x_i, t))/\partial x_i^n$ y $(\partial^n w_i(x_i, t))/\partial x_i^n$, con $n = 2, 3, 4$ extienden su continuidad hasta el extremo $x_i = c_i$, y por lo tanto las derivadas laterales $(\partial^n u_i(c_i^-, t))/\partial x_i^n$, $(\partial^n u_i(c_i^+, t))/\partial x_i^n$, $(\partial^n w_i(c_i^-, t))/\partial x_i^n$ y $(\partial^n w_i(c_i^+, t))/\partial x_i^n$ existen, pero $(\partial^n u_i(x_i, t))/\partial x_i^n$ y $(\partial^n w_i(x_i, t))/\partial x_i^n$ no son necesariamente continuas en $x_i = c_i$.

Si ahora se introducen los espacios

$$U_1 = \left\{ u_1; u_1 \in C(G_1 \times [t_a, t_b]), u_1|_{\bar{G}_{1,j}} \in C^2(\bar{G}_{1,j} \times [t_a, t_b]) \right\}, \tag{8}$$

$$U_2 = \left\{ u_2; u_2 \in C(G_2 \times [t_a, t_b]), u_2|_{\bar{G}_{2,j}} \in C^2(\bar{G}_{2,j} \times [t_a, t_b]) \right\}, \tag{9}$$

$$W_1 = \left\{ w_1; w_1 \in C(G_1 \times [t_a, t_b]), w_1|_{\bar{G}_{1,j}} \in C^4(\bar{G}_{1,j} \times [t_a, t_b]) \right\}, \quad (10)$$

$$W_2 = \left\{ w_2; w_2 \in C(G_2 \times [t_a, t_b]), w_2|_{\bar{G}_{2,j}} \in C^4(\bar{G}_{2,j} \times [t_a, t_b]) \right\}, \quad (11)$$

$$U = U_1 \times U_2, \quad (12)$$

$$W = W_1 \times W_2, \quad (13)$$

con $j = 1, 2$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_2) \in U, \\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2) \in W, \end{aligned} \quad (14)$$

y \mathbf{v} es un elemento del espacio producto $U \times W$. En consecuencia el funcional (7) depende de \mathbf{v} , o sea es $F = F(\mathbf{v})$ y su dominio de definición está dado por:

$$\mathbf{D}(F) = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in U \times W, \mathbf{v}(x_i, t_a), \mathbf{v}(x_i, t_b) \text{ dados y tales que satisfacen condiciones de compatibilidad} \right\}. \quad (15)$$

El espacio producto $U \times W$ se transforma en un espacio lineal si se introducen las siguientes operaciones algebraicas:

$$(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}) + (\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}) = (\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(2)}), \quad c(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}) = (c\mathbf{u}^{(1)}, c\mathbf{w}^{(1)}), \quad (16)$$

en donde $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \in U$ y $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in W$.

La condición de funcional estacionario requiere que se verifique

$$\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in D_a, \quad (17)$$

donde $\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}})$ denota la variación primera de F en \mathbf{v} y en la dirección de $\tilde{\mathbf{v}}$, D_a denota el espacio de las direcciones admisibles en \mathbf{v} para el dominio D del funcional F .

La variación del funcional F en el punto \mathbf{v} está dada por

$$\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\mathbf{v} + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (18)$$

Las direcciones admisibles $\tilde{\mathbf{v}}$ en $\mathbf{v} \in D$, son aquellas donde $\mathbf{v} + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \in D$ para todo suficientemente pequeño ε y donde δF exista. De acuerdo con (15), $\tilde{\mathbf{v}}$ es una dirección admisible en $\mathbf{v} \in D$ si, y solo si, $\tilde{\mathbf{v}} \in D_a$ donde

$$\begin{aligned} D_a = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}; \tilde{\mathbf{v}} \in U \times W, \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_a) = \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_b) = 0, i = 1, 2, \right. \\ \left. \text{satisfacen las condiciones de compatibilidad} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Para generalizar el análisis del sistema mecánico se introduce el cambio de variables

$$x_i = x_i / l_i, \quad (20)$$

y para simplificar la notación se considera que $c_i = c_i / l_i$, y como consecuencia, los dominios de los espacios quedan definidos como

$$G_{i,1} = (0, c_i), G_{i,2} = (c_i, 1), \quad (21)$$

cuyas clausuras son: $\bar{G}_{i,1} = G_{i,1} \cup \{0, c_i\}$, $\bar{G}_{i,2} = G_{i,2} \cup \{c_i, 1\}$ y $G_i = (0, 1)$, con $i = 1, 2$.

Operando y agrupando, de (7) se obtiene

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left((\rho A)_i l_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\ & + (\rho A)_i l_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 - \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 - \frac{(EA)_i}{l_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \Bigg] dx_i \\ & - \left[\frac{r l_1}{(EI)_1} \left(\frac{(EI)_1}{l_1^3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right)^2 \right) - \left[\frac{r_{i+2} l_2}{(EI)_2} \left(\frac{(EI)_2}{l_2^3} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \right)^2 \right) \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{s_{i+2} l_2^3}{(EI)_2} \left(\frac{(EI)_2}{l_2^3} u_2^2(a_{i+2}, t) \right) \right] \right. \\ & - \left. \left[\frac{t l_1^3}{(EI)_1} \left(\frac{(EI)_1}{l_1^3} w_1^2(a_i, t) \right) - \left[\frac{t_{i+2} l_2^3}{(EI)_2} \left(\frac{(EI)_2}{l_2^3} w_2^2(a_{i+2}, t) \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left[\frac{r c_i l_i}{(EI)_i} \left(\frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \right)^2 \right] \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left((\rho A)_i l_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\ & + (\rho A)_i l_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 - \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 - \frac{(EA)_i}{l_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \Bigg] dx_i \\ & - R_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right)^2 - R_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \right)^2 \\ & - S_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} u_1^2(a_i, t) - S_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} u_2^2(a_{i+2}, t) - T_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} w_1^2(a_i, t) \\ & \left. - T_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} w_2^2(a_{i+2}, t) - R_{c_i} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right)^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (23)$$

donde $R_i = \frac{r l_1}{(EI)_1}$, $R_{i+2} = \frac{r_{i+2} l_2}{(EI)_2}$, $S_i = \frac{s_i l_1^3}{(EI)_1}$, $S_{i+2} = \frac{s_{i+2} l_2^3}{(EI)_2}$, $T_i = \frac{t_i l_1^3}{(EI)_1}$, $T_{i+2} = \frac{t_{i+2} l_2^3}{(EI)_2}$,
 $R_{c_i} = \frac{r_{c_i} l_i}{(EI)_i}$, con $i = 1, 2$.

Si se aplica la definición (18) al funcional (23), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left((\rho A)_i l_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}(x_i, t) \right. \right. \right. \\ & + (\rho A)_i l_i \frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(x_i, t) - \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \\ & \left. \left. \left. - \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right) dx_i - R_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right. \right. \\ & - R_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \\ & - S_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} u_1(a_i, t) \tilde{u}_1(a_i, t) - S_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} u_2(a_{i+2}, t) \tilde{u}_2(a_{i+2}, t) \\ & - T_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} w_1(a_i, t) \tilde{w}_1(a_i, t) - T_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} w_2(a_{i+2}, t) \tilde{w}_2(a_{i+2}, t) \\ & \left. \left. \left. - R_{c_i} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Consideremos en primer lugar las integrales

$$\int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}(x_i, t) dt \tag{25}$$

y

$$\int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(x_i, t) dt. \tag{26}$$

Dado que $u_i(x_i, \bullet), w_i(x_i, \bullet), \tilde{u}_i(x_i, \bullet), \tilde{w}_i(x_i, \bullet) \in C^2[t_a, t_b]$, se puede integrar por partes respecto de t y al aplicar las condiciones impuestas en (19), esto es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_a) = \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_b) = 0, \\ \forall x_i \in G_i, i = 1, 2, \end{aligned} \tag{27}$$

resulta

$$\int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}(x_i, t) dt = - \int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) \tilde{u}_i(x_i, t) dt, \tag{28}$$

$$\int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(x_i, t) dt = - \int_{t_a}^{t_b} (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) \tilde{w}_i(x_i, t) dt. \tag{29}$$

La hipótesis que $w \in W$, permite integrar por partes dos veces respecto de x_i en las integrales

$$\int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) dx_i, \tag{30}$$

$i = 1, 2, j = 1, 2$, donde se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) dx_i = \\ & \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) \tilde{w}_i(x_i, t) dx_i - \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}(x_i, t) \tilde{w}_i(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \\ & + \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}}, \end{aligned} \tag{31}$$

con $i = 1, 2, j = 1, 2$.

La hipótesis que $u \in U$, permite integrar por partes en las integrales

$$\int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}(x_i, t) dx_i, \tag{32}$$

$i = 1, 2, j = 1, 2$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}(x_i, t) dx_i = \\ & - \frac{(EA)_i}{l_i} \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \tilde{u}_i(x_i, t) dx_i \\ & + \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \tilde{u}_i(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}}, \end{aligned} \tag{33}$$

con $i = 1, 2, j = 1, 2$.

Ahora, si se reemplazan las expresiones obtenidas de (28) a (33) en (24) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \left(\int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left(-(\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) + \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right) \tilde{u}_i(x_i, t) \right. \right. \\
& - \left. \left((\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) + \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) \right) \tilde{w}_i(x_i, t) \right] dx_i \\
& + \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}(x_i, t) \tilde{w}_i(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} - \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \tilde{u}_i(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \\
& - \left. \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(x_i, t) \Big|_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \right] - R_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(a_i, t) \\
& - R_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \\
& - S_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} u_1(a_i, t) \tilde{u}_1(a_i, t) - S_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} u_2(a_{i+2}, t) \tilde{u}_2(a_{i+2}, t) \\
& - T_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} w_1(a_i, t) \tilde{w}_1(a_i, t) - T_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} w_2(a_{i+2}, t) \tilde{w}_2(a_{i+2}, t) \\
& - R_{c_i} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \Bigg\} dt.
\end{aligned} \tag{34}$$

Teniendo en cuenta el caso en que

$$\tilde{u}_1(a_i, t) = \tilde{u}_2(a_{i+2}, t) = 0, \tag{35}$$

$$\tilde{w}_1(a_i, t) = \tilde{w}_2(a_{i+2}, t) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(a_i, t) = \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) = 0, \tag{37}$$

con $i = 1, 2$, también considerando el caso en que la rigidez a la flexión y la rigidez axial del primer tramo del pórtico son infinitamente superior a la del segundo tramo, se cumple que

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1(1, t) &= 0, \\
\tilde{u}_1(1, t) &= 0, \\
\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(1, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

De acuerdo con las observaciones realizadas, el espacio de direcciones admisibles D_a^* está dado por

$$D_a^* = \{ \tilde{\mathbf{v}}; \tilde{\mathbf{v}} \in U \times W, \text{ satisface las condiciones de compatibilidad,} \\ \tilde{u}_1(a_i, t) = \tilde{u}_2(a_{i+2}, t) = 0, \tilde{w}_1(a_i, t) = \tilde{w}_2(a_{i+2}, t) = 0, \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(a_i, t) = \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) = 0, \quad (39) \\ \tilde{w}_1(1, t) = \tilde{u}_1(1, t) = \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(1, t) = 0. \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_a) = \tilde{\mathbf{v}}(x_i, t_b) = 0, \forall x_i \in G_i, i = 1, 2 \}.$$

De (34), (39) y teniendo en cuenta (17), resulta que la condición de funcional estacionario es

$$\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left(\left(-(\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) + \frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right) \tilde{u}_i(x_i, t) \right. \right. \quad (40) \\ \left. \left. - \left((\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) + \frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) \right) \tilde{w}_i(x_i, t) \right] dx_i \right\} dt = 0,$$

$\forall \tilde{\mathbf{v}} \in D_a^*$.

Dado que

$$\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}} \in C^4(\bar{G}_{i,j}), \quad (41)$$

$$\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in C^2(\bar{G}_{i,j}), \quad (42)$$

y las funciones \tilde{w}_i y \tilde{v}_i verifican las condiciones establecidas en (39), se puede aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones generalizado en \mathbb{R}^n , de donde se deduce que las funciones w_i y v_i deben satisfacer las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) - (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) = 0, \quad (43)$$

$$\frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) + (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) = 0, \quad (44)$$

$\forall t > 0, i = 1, 2$.

Si ahora se vuelve al caso original, que es cuando existen restricciones elásticas, dado que se verifica

$$D_a^* \subset D_a, \quad (45)$$

resulta que se verifica la condición

$$\delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \forall \tilde{\mathbf{v}} \in D_a^*, \quad (46)$$

de donde surge que las funciones w_i y v_i deben satisfacer las ecuaciones (43) y (44) y que la

condición para funcional estacionario se reduce a

$$\begin{aligned}
 \delta F(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{t_a}^{t_b} & \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}(x_i, t) \tilde{w}_i(x_i, t) \right) \right]_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \right. \\
 & - \left. \left(\frac{EA}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \tilde{u}_i(x_i, t) \right) \right]_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} - \left. \left(\frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right) \right]_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \\
 & - R_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x_1}(a_i, t) - R_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \\
 & - S_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} u_1(a_i, t) \tilde{u}_1(a_i, t) - S_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} u_2(a_{i+2}, t) \tilde{u}_2(a_{i+2}, t) \\
 & - T_i \frac{(EI)_1}{l_1^3} w_1(a_i, t) \tilde{w}_1(a_i, t) - T_{i+2} \frac{(EI)_2}{l_2^3} w_2(a_{i+2}, t) \tilde{w}_2(a_{i+2}, t) \\
 & \left. - R_{c_i} \frac{(EI)_i}{l_i^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right) \right\} dt = 0,
 \end{aligned} \tag{47}$$

$\forall \tilde{\mathbf{v}} \in D_a$, donde D_a está dada por (19). Dado que las funciones $\tilde{u}_i(0, \bullet)$, $\tilde{w}_i(0, \bullet)$, $\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(0, \bullet)$,

$\tilde{u}_i(c_i, \bullet)$, $\tilde{w}_i(c_i, \bullet)$, $\tilde{u}_i(1, \bullet)$, $\tilde{w}_i(1, \bullet)$, $\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_i}(1, \bullet)$, $i = 1, 2$, son continuas y arbitrarias, la

aplicación de la condición (47) conduce a las correspondientes condiciones de contorno naturales. Teniendo en cuenta además a las condiciones de compatibilidad se obtiene el siguiente problema de contorno que describe el comportamiento del pórtico analizado:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) - \frac{(\rho A)_i}{(EA)_i} l_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) = 0, \quad \forall x_i \in \left((0, c_i) \times (c_i, 1) \right), \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{48}$$

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i, t) + \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} l_i^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(x_i, t) = 0, \quad \forall x_i \in \left((0, c_i) \times (c_i, 1) \right), \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{49}$$

$$R_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0, t) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(0, t), \tag{50}$$

$$S_1 u_1(0, t) = \frac{(EA)_1}{(EI)_1} l_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, t), \tag{51}$$

$$T_1 w_1(0, t) = -\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(0, t), \quad (52)$$

$$R_{c_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(c_1^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(c_1^-, t) \right) - R_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(c_1^-, t) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(c_1^-, t), \quad (53)$$

$$S_2 u_1(c_1, t) = \frac{(EA)_1}{(EI)_1} l_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(c_1^+, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(c_1^-, t) \right), \quad (54)$$

$$T_2 w_1(c_1, t) = \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(c_1^-, t) - \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(c_1^+, t) \right), \quad (55)$$

$$u_1(c_1^-, t) = u_1(c_1^+, t), \quad (56)$$

$$w_1(c_1^-, t) = w_1(c_1^+, t), \quad (57)$$

$$R_{c_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(c_1^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(c_1^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(c_1^+, t), \quad (58)$$

$$u_1(1, t) = w_2(0, t), \quad (59)$$

$$w_1(1, t) = -u_2(0, t), \quad (60)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(1, t) = \frac{l_1}{l_2} \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0, t), \quad (61)$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(0, t) = -\frac{(EA)_1}{(EI)_2} \frac{l_2^3}{l_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(1, t), \quad (62)$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(1, t) = \frac{(EA)_2}{(EI)_1} \frac{l_1^3}{l_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(0, t), \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(1, t) = \frac{(EI)_2}{(EI)_1} \frac{l_1^3}{l_2^3} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(0, t), \quad (64)$$

$$R_{c_2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(c_2^+, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(c_2^-, t) \right) - R_3 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(c_2^-, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(c_2^-, t), \quad (65)$$

$$S_3 u_2(c_2, t) = \frac{(EA)_2}{(EI)_2} l_2^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(c_2^+, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(c_2^-, t) \right), \quad (66)$$

$$T_3 w_2(c_2, t) = \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(c_2^-, t) - \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(c_2^+, t) \right), \quad (67)$$

$$u_2(c_2^-, t) = u_2(c_2^+, t), \quad (68)$$

$$w_2(c_2^-, t) = w_2(c_2^+, t), \quad (69)$$

$$R_{c_2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(c_2^+, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(c_2^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(c_2^+, t), \quad (70)$$

$$R_4 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) = -\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(1, t), \quad (71)$$

$$S_4 u_2(1, t) = -\frac{(EA)_2}{(EI)_2} l_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(1, t), \quad (72)$$

$$T_4 w_2(1, t) = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(1, t), \quad (73)$$

donde $t \geq 0$.

Nótese que si los coeficientes de rigidez rotacional y traslacional toman valores tales que es $0 \leq R_i \leq \infty$, $0 \leq S_i \leq \infty$ y $0 \leq T_i \leq \infty$, las condiciones de contorno (50)-(55), (65)-(67) y (71)-(73) son naturales. A su vez al hacer $R_i, S_i, T_i \rightarrow \infty$, se obtienen las condiciones de contorno geométricas. Al dar valores a los distintos coeficientes de rigidez se generan distintos casos de pórticos clásicos con distintas condiciones de apoyo en los extremos de cada tramo. Al hacer tender a cero o infinito a los valores de los coeficientes de rigidez se generan las distintas condiciones de apoyo clásicas. Por ejemplo, al hacer $R_1 \rightarrow \infty$, $S_1 \rightarrow \infty$ y $T_1 \rightarrow \infty$, se obtienen las condiciones de contorno geométricas: $u_1(0, t) = 0$, $w_1(0, t) = 0$ y $\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0, t) = 0$, las cuales establecen que el extremo inferior de la primer viga está rígidamente empotrado. De forma análoga se determinan las condiciones geométricas en los otros extremos.

3 MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración, se deben determinar los valores de ω que son las frecuencias naturales para los

cuales las ecuaciones diferenciales (48) y (49) que describen las vibraciones del pórtico tiene como solución no trivial la forma

$$u_i(x_i, t) = u_i(x_i) \cos(\omega t - \varphi), \quad i = 1, 2, \quad (74)$$

$$w_i(x_i, t) = w_i(x_i) \cos(\omega t - \varphi), \quad i = 1, 2, \quad (75)$$

Donde ω representa la frecuencia de oscilación del pórtico en su estado libre por lo cual se denomina *frecuencia natural*. Luego, en virtud de la continuidad de la función coseno y de sus derivadas, las funciones dada por (74) y (75) son continuas junto con sus derivadas (de cualquier orden) respecto de t .

Al reemplazar (74) y (75) en las ecuaciones diferenciales (48) y (49), se obtiene

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i) + p_i^2 u_i(x_i) = 0, \quad \forall x_i \in \left((0, c_i) \times (c_i, 1) \right), \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (76)$$

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4}(x_i) - k_i^4 w_i(x_i) = 0, \quad \forall x_i \in \left((0, c_i) \times (c_i, 1) \right), \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (77)$$

donde $p_i^2 = \lambda^4 \frac{EI}{\rho A} \frac{(\rho A)_i}{(EA)_i} \frac{l_i^2}{l^4}$, y $k_i^4 = \lambda^4 \frac{EI}{\rho A} \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} \frac{l_i^4}{l^4}$, siendo que λ denota al coeficiente de

frecuencias $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2$, comúnmente usado en los trabajos sobre vibraciones de vigas y pórticos. Siendo l, ρ, A, I y E coeficientes genéricos que permiten referenciar las expresiones analíticas a determinado tramo del pórtico.

4 SOLUCIÓN EXACTA

La solución general de las ecuaciones diferenciales (76) y (77) están dadas por

$$u_{i,j}(x_i) = C_{i,j,1} \cos(\lambda_i^u x_i) + C_{i,j,2} \sin(\lambda_i^u x_i), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (78)$$

$$w_{i,j}(x_i) = C_{i,j,3} \cosh(\lambda_i^w x_i) + C_{i,j,4} \sinh(\lambda_i^w x_i) + C_{i,j,5} \cos(\lambda_i^w x_i) + C_{i,j,6} \sin(\lambda_i^w x_i), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (79)$$

donde $\lambda_i^u = \lambda^2 \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{\rho A} \frac{EI}{(EA)_i} \frac{l_i}{l^2}}$, y $\lambda_i^w = \lambda^4 \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{\rho A} \frac{EI}{(EI)_i} \frac{l_i}{l}}$ y $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2$, las constantes

$C_{i,j,k}$ con $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ y $k = 1, \dots, 6$, son constantes independientes a resolver con las ecuaciones de contorno y transiciones del pórtico analizado. De esta manera, se llega a un solo sistema de ecuaciones algebraicas que se denotan por:

$$[A] \cdot \{C\} = \{R\}, \quad (80)$$

donde $[A]$ denota la matriz característica de dimensión 24×24 , $\{C\}$ de 24×1 denota el

vector de los coeficientes y $\{R\}$ de 24×1 denota el vector de términos independientes. Por lo tanto, resolviendo el determinante de la matriz $[A]$ del sistema, obtenemos la ecuación característica:

$$G(r_i, t_i, s_i, r_{i+2}, t_{i+2}, s_{i+2}, r_c, l_i, \lambda, E_i, I_i, A_i, \rho_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (81)$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos del pórtico de dos tramos perpendiculares analizado, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, A denota que el extremo está articulado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de un pórtico E-A, denota que el primer tramo, en $x_1 = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $x_2 = l_2$, el extremo se encuentra articulado. Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia se presentan referenciados al primer tramo del pórtico:

$$\lambda^4 = \frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_1} \omega^2 l_1^4. \quad (82)$$

En la [Tabla 1](#) se presenta una comparación de resultados con el programa Abaqus de los primeros seis valores de λ para un pórtico de dos tramos con distintos apoyos clásicos, con $l_1 = l_2 = 100$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.00175$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 210$. Para modelar en el programa Abaqus se empleó el elemento B21 formulado con la teoría de vigas de Timoshenko, por lo cual se emplearon tramos de gran longitud respecto a las dimensiones de la sección.

		Secuencia modal					
		1	2	3	4	5	6
E-E	Exacto	3.9266	4.7300	7.0686	7.8532	10.2102	10.9956
	Abaqus	3.9257	4.7277	7.0636	7.8433	10.1955	10.9697
A-A	Exacto	3.1416	3.9266	6.2832	7.0686	9.4248	10.2102
	Abaqus	3.1412	3.9254	6.2802	7.0620	9.4146	10.1909
E-A	Exacto	3.3932	4.4633	6.5454	7.5916	9.6866	10.7338
	Abaqus	3.3926	4.4616	6.5415	7.5834	9.6740	10.7115
E-L	Exacto	1.0825	1.7863	3.9692	4.8053	7.0985	7.9132
	Abaqus	1.0825	1.7862	3.9682	4.8033	7.0938	7.9049

Tabla 1: Comparación de resultados con el programa Abaqus de los primeros seis valores de λ para un pórtico de dos tramos con distintos apoyos clásicos, con $l_1 = l_2 = 100$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.00175$,

$$(EA)_1 = (EA)_2 = 210.$$

			Secuencia modal					
			1	2	3	4	5	6
R_1	S_1	T_1	$R_4 = S_4 = T_4 = 0$					
0	0	0	1.4755	2.4360	3.7429	4.4114	5.4686	6.8380
100	0	0	0.8637	1.8616	2.5289	3.8548	4.9405	5.5922
100	100	0	0.7041	1.8208	2.2620	2.9136	3.9122	4.9419
R_4	S_4	T_4	$R_1 = S_1 = T_1 = 100$					
0	0	0	0.6736	1.1153	2.0606	2.9017	3.5002	4.0437
100	0	0	0.8487	1.1996	2.3432	3.0436	3.5801	4.3189
0	100	0	0.8165	1.6271	2.0627	2.9017	3.5010	4.0438
0	0	100	1.0270	1.6739	2.5075	3.0303	3.5415	4.1191

Tabla 2: Primeros seis valores de λ para un pórtico sin rótulas intermedias, para distintos valores de las restricciones elásticas en los extremos, con $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $(EI)_1 = (EI)_2/2 = 0.007$, $(EA)_1 = (EA)_2/2 = 210$. Las formas modales mostradas corresponden al caso $R_1 = S_1 = T_1 = T_4 = 100$ y $R_4 = S_4 = 0$.

En la [Tabla 2](#) se presentan los primeros seis valores del coeficiente de frecuencias λ para un pórtico sin rótulas intermedias ($R_{c_1} = R_{c_2} = \infty$, $R_i = S_i = T_i = 0$, $i = 2, 3$), para distintos valores de las restricciones elásticas en los extremos, con $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $(EI)_1 = (EI)_2/2 = 0.007$, $(EA)_1 = (EA)_2/2 = 210$. Las formas modales corresponden al caso $R_1 = S_1 = T_1 = T_4 = 100$ y $R_4 = S_4 = 0$.

Secuencia modal					
1	2	3	4	5	6
1.8879	2.7395	3.9659	5.3957	6.7587	7.5027

Tabla 3: Primeros seis valores de λ con sus correspondientes formas modales para un pórtico L-L con una rótula libre ubicada en $c_1 = 0.5$, con $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $(EI)_1 = (EI)_2/2 = 0.007$, $(EA)_1 = (EA)_2/2 = 210$.

En la [Tabla 3](#) se presentan los primeros seis valores de λ con sus correspondientes formas modales para un pórtico L-L con una rótula libre en el primer tramo ubicada en $c_1 = 0.5$, con

$$l_1 = 1, l_2 = 2, (EI)_1 = (EI)_2/2 = 0.007, (EA)_1 = (EA)_2/2 = 210.$$

Secuencia modal						
R	1	2	3	4	5	6
0	3.0118	3.7493	6.8174	7.8360	8.8690	9.3567
1	3.3894	4.1063	6.8993	7.8360	9.1601	9.7027
10	3.8093	4.5795	7.0228	7.8361	9.8577	10.5314
100	3.9124	4.7095	7.0579	7.8361	10.1477	10.8880
1000	3.9243	4.7249	7.0620	7.8361	10.1854	10.9351
∞	3.9256	4.7266	7.0625	7.8361	10.1897	10.9405

Tabla 4: Primeros seis valores de λ para un pórtico E-E con dos rótula con $R = R_{c_1} = R_{c_2}$ ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$. Las formas modales corresponden al caso $R = 0$.

En la [Tabla 4](#) se presentan los primeros seis valores de λ para un pórtico E-E con dos rótula elásticas con coeficientes elásticos $R = R_{c_1} = R_{c_2}$ y $R_i = S_i = T_i = 0, i = 2, 3$, ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$. Las formas modales corresponden al caso $R = 0$.

Secuencia modal						
R	1	2	3	4	5	6
0	3.0109	6.2790	6.8217	7.8443	8.8335	12.5171
1	2.3831	3.3884	6.2790	6.9007	8.2296	9.1275
10	3.0009	3.8083	6.2790	7.0187	9.0464	9.8322
100	3.1256	3.9114	6.2790	7.0520	9.3638	10.1260
1000	3.1395	3.9232	6.2790	7.0559	9.4046	10.1643
∞	3.1411	3.9246	6.2790	7.0564	9.4093	10.1686

Tabla 5: Primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos rótula con $R = R_{c_1} = R_{c_2}$ ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$. Las formas modales corresponden al caso $R = 0$.

		Secuencia modal					
R	T	1	2	3	4	5	6
0	0	3.0109	6.2790	6.8217	7.8443	8.8335	12.5171
	1	1.3157	3.0410	6.2790	6.8224	7.8463	8.8346
	10	2.3334	3.2764	6.2790	6.8286	7.8650	8.8449
	1000	5.8029	5.9881	6.2790	7.4150	9.6392	10.1005
	∞	6.2748	7.8193	12.4718	13.7755	16.1868	16.2717
100	0	3.1256	3.9114	6.2790	7.0520	9.3638	10.1260
	1	3.1420	3.9202	6.2790	7.0523	9.3644	10.1264
	10	3.2786	3.9964	6.2790	7.0543	9.3701	10.1303
	1000	6.2691	7.4421	10.0234	10.5886	12.5183	13.2331
	∞	6.2790	6.7688	7.7707	8.8211	12.5169	13.0141
∞	0	3.1411	3.9246	6.2790	7.0564	9.4093	10.1686
	1	3.1571	3.9332	6.2790	7.0566	9.4099	10.1690
	10	3.2908	4.0079	6.2790	7.0586	9.4153	10.1727
	1000	6.2780	7.4432	10.0393	10.6080	12.5184	13.2377
	∞	6.2790	6.7817	7.8452	8.8873	12.5171	13.0343

Tabla 6: Primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos rótula elásticas con coeficientes elásticos $R = R_{c_1} = R_{c_2}$, $T = T_1 = T_2$ y $R_i = S_i = 0$, $i = 2, 3$, ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$.

		Secuencia modal					
c_1		1	2	3	4	5	6
0.3		3.0319	3.8033	6.0443	6.9186	9.3799	10.1659
0.8		3.0936	3.9080	6.0475	7.0174	9.0792	10.0009

Tabla 7: Primeros seis valores de λ con sus correspondientes formas modales para un pórtico A-A con una fisura ubicada en $c_1 = 0.3$ y $c_1 = 0.8$ con $\eta = 0.8$, siendo $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$.

En la [Tabla 5](#) se presentan los primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos

rótula elásticas con coeficientes elásticos $R = R_{c_1} = R_{c_2}$ y $R_i = S_i = T_i = 0$, $i = 2, 3$, ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$. Las formas modales corresponden al caso $R = 0$.

En la [Tabla 6](#) se presentan los primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos rótula elásticas con coeficientes elásticos $R = R_{c_1} = R_{c_2}$, $T = T_1 = T_2$ y $R_i = S_i = 0$, $i = 2, 3$, ubicadas en $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 0.5$, con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$.

Secuencia modal							
c_1	c_2	1	2	3	4	5	6
0.2	0.2	3.4792	4.6171	6.0789	8.3877	9.1595	12.1439
0.4		3.6152	5.1587	6.8236	8.5252	9.0124	11.7153
0.5		3.6845	5.3741	6.8064	8.1624	8.8958	12.2064
0.7		3.8360	5.0002	6.2540	8.5469	9.4801	12.0592
0.9		3.5262	4.5677	6.8870	8.2912	9.7731	11.6188
0.4	0.4	3.0856	5.7810	6.4491	8.7603	9.5399	11.2959
0.5		3.2482	5.8596	6.6313	8.0654	9.6816	11.4205
0.7		3.7139	5.3531	6.0255	9.0910	9.6828	11.3430
0.9		3.4814	5.7098	6.6923	8.2652	10.1366	11.2369
0.5	0.5	3.0109	6.2790	6.8217	7.8443	8.8335	12.5171
0.7		3.5419	5.3369	6.6862	8.2369	9.4747	12.1226
0.9		3.4663	5.9859	6.8738	7.7868	9.7326	11.5390
0.7	0.7	3.2876	5.1307	6.0167	9.2674	9.7908	11.7536
0.9		3.4427	5.0274	6.7957	8.6632	10.1615	11.4909
0.9	0.9	3.4151	4.2251	6.5951	7.6255	9.4870	11.0357

Tabla 8: Primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos rótulas libres para distintos valores de c_1 y c_2 , con $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$.

En la [Tabla 7](#) se presentan los primeros seis valores de λ con sus correspondientes formas modales para un pórtico A-A con una fisura ubicada en $c_1 = 0.3$ y $c_1 = 0.8$ con $\eta = 0.8$, siendo $\eta = a/h$, a la profundidad de la fisura y h el espesor de la sección. Siendo además $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$. Adoptando el modelo de fisura de [Quintana et al. \(2010\)](#), se debe considerar

$$R_{12} = \frac{1}{\theta}, \quad (83)$$

siendo

$$\theta = 6\pi\eta^2 f(\eta) \left(h/l_1 \right), \quad (84)$$

$$f(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6. \quad (85)$$

En la **Tabla 8** se presentan los primeros seis valores de λ para un pórtico A-A con dos rótulas libres ($R_{c_i} = R_i = S_i = T_i = 0$, $i = 2, 3$) para distintos valores de c_1 y c_2 , siendo $l_1 = l_2 = 1$, $(EI)_1 = (EI)_2 = 0.014$, $(EA)_1 = (EA)_2 = 420$.

6 CONCLUSIONES

Se aplicaron las técnicas del cálculo de variaciones para obtener el modelo matemático del comportamiento de un pórtico considerando desplazamiento axial y transversal con la teoría de Euler-Bernoulli con los extremos elásticamente restringidos ante rotaciones y traslaciones y con dos rótulas intermedias elásticamente restringidas.

Se realizó un procedimiento riguroso al considerar un funcional adecuado para la formulación del principio de Hamilton y los correspondientes espacios de las funciones involucradas.

Se empleó el método de separación de variables y se obtuvo la solución exacta del problema mecánico para obtener resultados numéricos de frecuencias naturales y formas modales para distintas configuraciones. Se presentaron comparaciones con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus y se presentaron nuevos resultados incluyendo un modelo de fisura.

REFERENCIAS

- Albarracín, C. M. y Grossi, R. O., Vibrations of elastically restrained frames. *Journal of Sound and Vibration*, 285:467-476, 2005.
- Arenas, B. B. y Grossi, R. O., Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position. *Applied Acoustics*, 57:197-202, 1999.
- De Rosa, M. A., Bellés, P. M. y Maurizi, M. J., Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 181:905-910, 1995.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C., Eigenfrequencies of generally restrained beams. *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516, 2003.
- Grossi, R. O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, 2010.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C. M., Variational approach to vibrations of frames with inclined members, *Applied Acoustics*, 74:325-334, 2013.
- Heppler, G. R., Oguamanam, D. C. D. y Hansen, J. S., Vibration of a two-member open frame. *Journal of Sound and Vibration*, 263: 299-317, 2003.
- Khaji, N., Shafiei, M. y Jalalpour, M., Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667-681, 2009.
- Lau, J. H., Vibration frequencies and mode shapes for a constrained cantilever, *Journal of Applied Mechanics*, 57:182-187, 1984.
- Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S. y Heppler, G. R., Vibration of arbitrary oriented two-member open frames with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 209:651-669, 1998.
- Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 150:191-201, 1991.

- Quintana M. V., Raffo, J. L. y Grossi, R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams with an internal hinge. *Mecánica Computacional*, 24:2499-2516, 2010.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints. *Mecánica Computacional*, 16:2593-2610, 2012.
- Rao, C. K., Frequency analysis of clamped-clamped uniform beams with intermediate elastic support, *Journal of Sound and Vibration*, 133:502-509, 1989.
- Rutemberg, A., Vibration frequencies for a uniform cantilever with a rotational constraint at a point. *Journal of Applied Mechanics*, 45:422-123, 1978.