

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS ANISÓTROPAS DEBILITADAS POR LA PRESENCIA DE UNA CURVA INTERMEDIA CON RÓTULAS

Javier Leandro Raffo^a, María Virginia Quintana^{b,c}

^aGrupo de Mecánica Computacional, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Delta, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

^bICMASA - INIQUI - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, virginiaquintana@argentina.com, <http://www.unsa.edu.ar/iniqui>

^cFacultad de Ingeniería e Informática- Universidad Católica de Salta, Campo Castañares, 4400 Salta, Argentina, virginiaquintana@argentina.com, <http://www.ucasal.net>

Palabras claves: Placas, Rotulas, Vibración, Ritz, Multiplicador de Lagrange

Resumen. El problema de vibraciones libres de placas debilitadas con líneas intermedias con rótulas, es de interés en ciertas aplicaciones de la ingeniería. La presencia de las rótulas genera condiciones de transición cuyas expresiones analíticas son análogas a las de las condiciones de contorno y complican notablemente la resolución tanto analítica como numérica.

En este trabajo se presenta una formulación variacional general para la determinación de las frecuencias naturales y de las formas modales de vibración libre de placas anisótropas y laminadas debilitadas por una curva intermedia con rótulas elásticas. El análisis se lleva a cabo utilizando la teoría clásica de placas laminadas (CLPT) y las ecuaciones gobernantes se obtienen a través de la aplicación del método variacional de Ritz utilizando polinomios simples como funciones de aproximación. Para simular apropiadamente el comportamiento de la curva con rótulas, se incorpora en la formulación el uso de multiplicadores de Lagrange.

El algoritmo desarrollado permite obtener soluciones analíticas aproximadas para placas anisótropas y laminadas delgadas con la línea o curva con rótulas ubicada en distintas posiciones considerando restricciones elásticas traslacionales y rotacionales en los bordes y en las rótulas.

Finalmente, se destaca que la mayoría de las configuraciones que se consideran en este trabajo no han sido previamente analizadas en la literatura existente, por lo tanto los resultados presentados son los primeros datos que se encuentran disponibles de acuerdo al conocimiento de los autores.

1 INTRODUCCIÓN

Las placas anisótropas, en particular las constituidas de material compuesto reforzado con fibras, son extensamente utilizados en diversas industrias, como la aeroespacial, automotriz, etc. El rápido aumento del uso industrial de estas estructuras ha traído aparejada la necesidad de desarrollar técnicas analíticas y numéricas que sean apropiadas para el análisis del comportamiento mecánico de las mismas.

La presencia de una línea intermedia con rótulas en una placa, puede ser usada para facilitar la apertura de portones, la plegadura de puertas y/o sillas y para representar grietas a priori en el interior de una placa. Por otra parte, los resortes rotacionales ubicados en la línea de rótula, pueden ser usados para modelar un plano de fractura con una profundidad arbitraria (Yuan y Dickinson, 1992; Li y col., 2004).

Wang y col. (2001) estudiaron el pandeo y las vibraciones de placas rectangulares con una línea con rótulas a partir del método de Ritz. Xiang y Reddy (2003) proporcionaron la primera solución conocida para las vibraciones de placas rectangulares con una línea intermedia con rótulas libres basada en la teoría de deformación por corte de primer orden. Los autores emplearon el método de Levy con una técnica de descomposición de dominio para resolver este problema y obtener valores del coeficiente de frecuencia. La metodología propuesta solo puede aplicarse a placas rectangulares con al menos dos bordes opuestos simplemente apoyados. Huang y col. (2009) desarrollaron un método discreto para analizar el problema de vibración libre de placas rectangulares moderadamente gruesas con una línea intermedia con rótulas para condiciones de bordes arbitrarias. Recientemente Quintana y Grossi (2012) analizaron el problema de las vibraciones libres de placas rectangulares con una línea con rótulas considerando la presencia de restricciones elásticas en los bordes. El problema fue resuelto empleando una combinación de los métodos de Ritz y de los multiplicadores de Lagrange. Los trabajos hasta ahora mencionados fueron desarrollados para placas isótropas.

Gupta y Reddy (2002) extendieron la metodología empleada por Xiang y Reddy (2003) para obtener los coeficientes de frecuencias de placas rectangulares ortótropas con una línea intermedia con rótulas utilizando la teoría clásica de placas y la teoría de deformación por corte de primer orden.

Grossi y Quintana (2007, 2008) obtuvieron el problema de contorno y autovalores que gobierna el comportamiento mecánico de placas delgadas anisótropas con una línea intermedia con rótulas restringidas elásticamente contra rotación. Además los autores presentaron valores de los coeficientes de frecuencias y las formas modales para algunos casos particulares de placas rectangulares.

Grossi (2012) formuló un modelo analítico para analizar el comportamiento dinámico de placas delgadas anisótropas, con una línea intermedia con rótulas situada en una posición arbitraria. Mediante la aplicación rigurosa del principio de Hamilton y la introducción de un adecuado cambio de variables el autor obtuvo las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno y de transición del problema. De la misma manera, Grossi y Raffo (2013) extendieron el modelo para analizar a placas anisótropas con varias líneas intermedias con rótulas. Valores de los coeficientes de frecuencias y formas modales fueron obtenidos mediante la aplicación del método de Ritz.

De la revisión bibliográfica se puede concluir que todos los artículos citados tratan sobre placas isótropas y anisótropas con una línea intermedia con rótulas paralela a dos de sus bordes. Sin embargo, en ninguno de estos trabajos se analiza la presencia de rótulas distribuidas en una curva ni en rectas no paralelas a los bordes de la placa.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un algoritmo general que permita la obtención de soluciones analíticas aproximadas para el estudio de las vibraciones libres de placas rectangulares con rótulas intermedias ubicadas arbitrariamente sobre una curva y restringidas elásticamente. La metodología desarrollada se basa en el método variacional de Ritz en combinación con el uso de multiplicadores de Lagrange. La solución analítica obtenida permite analizar la influencia de la posición de la curva con rótulas y su grado de restricción rotacional sobre las frecuencias de vibración.

2 ANÁLISIS

Sea una placa delgada anisótropa de forma rectangular y espesor uniforme, con sus contornos elásticamente restringidos y con rótulas intermedias uniformemente distribuidas sobre una curva arbitraria. En particular, se consideran placas con rótulas ubicadas sobre una parábola y sobre una línea recta oblicua respecto del eje y tal como se muestra en la Figura 1.

Sea $w^{(k)}(x, y, t) \in G^{(k)}$, con $k = 1, 2$, el desplazamiento transversal de la línea media de la placa en cualquier instante de tiempo $t \geq 0$, siendo $G^{(1)}$ y $G^{(2)}$, dos subdominios de la placa rectangular divididos por la curva con rótulas Γ_c y los bordes de la placa son ∂G_i , con $i = 1, \dots, 4$, siendo además que $\partial G_2 = \partial G_2^{(1)} \cup \partial G_2^{(2)}$ y $\partial G_4 = \partial G_4^{(1)} \cup \partial G_4^{(2)}$ (ver Figura 1).

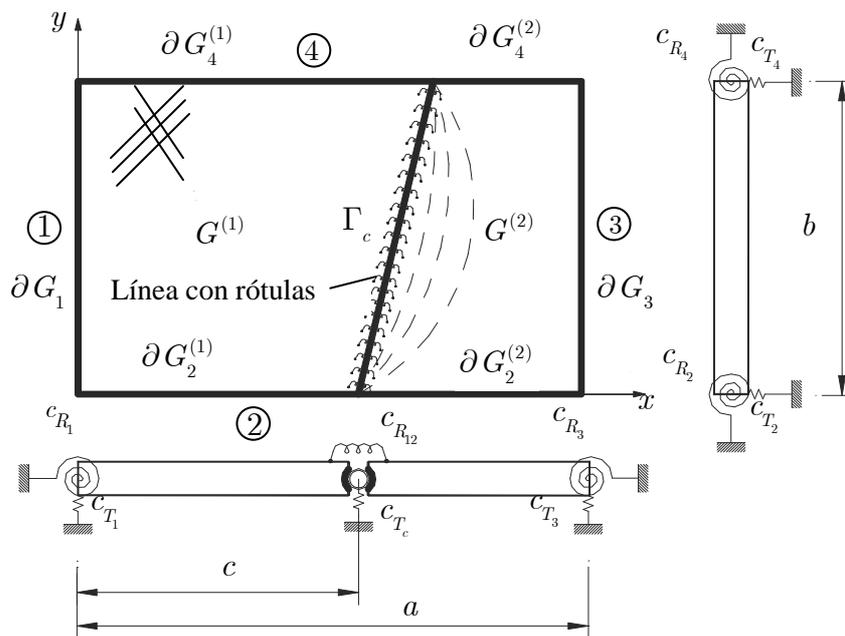


Figura 1: Descripción general de la geometría de la placa.

El espesor de la placa está dado por h , las restricciones rotacionales de los lados están caracterizadas por las constantes $c_{R_i}, i = 1, \dots, 4$ y las restricciones traslacionales mediante las constantes $c_{T_i}, i = 1, \dots, 4$. A su vez las restricciones elásticas sobre la curva con rótulas están caracterizadas por las constante $c_{R_{12}}$ y c_{T_c} .

El mecanismo de funcionamiento de las rótulas requiere que los desplazamientos transversales a la línea media de la placa sean continuos en todos los puntos de la línea con

rótulas y que a su vez las secciones transversales en esos puntos puedan girar libremente, es decir que puede existir una discontinuidad de la pendiente.

Cuando se analiza el problema de vibraciones libres, es posible entonces aplicar el método de separación de variables y considerar a la deflexión transversal de la siguiente forma:

$$w^{(k)}(x, y, t) = W^{(k)}(x, y) \cos(\omega t), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

donde ω denota la frecuencia angular de vibración y $W^{(k)}(x, y)$, $k = 1, 2$ son las amplitudes de los desplazamientos transversales de la placa en cada uno de los subdominios y las cuales se aproximan a través de funciones de forma o funciones coordenadas.

Teniendo en cuenta las hipótesis de Kirchhoff, la máxima energía cinética de la placa ejecutando vibraciones libres, se puede expresar en coordenadas cartesianas rectangulares por

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \sum_{k=1}^2 \iint_{G^{(k)}} \left(W^{(k)}(x, y) \right)^2 dx dy, \quad (2)$$

donde ρ es la densidad de masa del material de la placa y la integración se realiza sobre los subdominios $G^{(1)}$ y $G^{(2)}$ de la placa.

La máxima energía de deformación del sistema mecánico está dada por

$$U_{\max} = U_{P, \max} + U_{R, \max} + U_{T, \max}, \quad (3)$$

donde $U_{P, \max}$ es la máxima energía de deformación debida a la flexión de la placa y está dada por

$$U_{P, \max} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \iint_{G^{(k)}} \left[D_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2} + D_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x^2} + D_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x \partial y} + 4D_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4)$$

Las rigideces flexionales, torsionales y de acoplamiento $D_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2$, $i, j = 1, 2, 6$ para una placa laminada están dados por (Reddy, 2004):

$$D_{ij}^{(k)} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^{N_c} \left(\bar{Q}_{ij}^{(K)} \right)^{(k)} \left(z_{K+1}^3 - z_K^3 \right), \quad (5)$$

donde z_{K-1} , z_K son las distancias desde el plano medio a la parte superior e inferior de la K -ésima lámina, N_c es el número total de láminas que compone el laminado y $\bar{Q}_{ij}^{(K)}$ son las rigideces reducidas transformadas para un estado plano de tensiones.

A su vez la máxima energía de deformación $U_{T, \max}$ almacenada en los resortes traslacionales caracterizados por las constantes $c_{T_i}(s)$ y $c_{T_c}(s)$ ubicados en los bordes de la placa y en la línea intermedia respectivamente está dada por:

$$U_{T,\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} c_{T_i} (W(s))^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} c_{T_c} (W(s))^2 ds, \quad (6)$$

donde l_i es la longitud del borde ∂G_i con $i = 1, \dots, 4$ y $W(s)$ está dada por:

$$W(s) = \begin{cases} W^{(1)}(s) & \forall s \in (\partial G_4^{(1)} \cup \partial G_1 \cup \partial G_2^{(1)}) \\ W^{(2)}(s) & \forall s \in (\partial G_2^{(2)} \cup \partial G_3 \cup \partial G_4^{(2)}), \end{cases} \quad (7)$$

Por otra parte, la máxima energía de deformación $U_{R,\max}$ almacenada en los resortes rotacionales caracterizados por las constantes $c_{R_i}(s)$ y $c_{R_{12}}(s)$ ubicados en los bordes de la placa y en la línea intermedia respectivamente, está dada por:

$$U_{R,\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} c_{R_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}_i} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}} \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \vec{n}_c^{(1)}} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \vec{n}_c^{(2)}} \right)^2 ds, \quad (8)$$

donde $\frac{\partial W}{\partial \vec{n}_i}$ es la derivada direccional de W con respecto del vector normal unitario saliente \vec{n}_i al contorno ∂G_i y cuyas componentes están dadas por (ver Figura 2):

$$\left\{ n_{x_1} = -1, n_{y_1} = 0, \left\{ n_{x_2} = 0, n_{y_2} = -1, \left\{ n_{x_3} = 1, n_{y_3} = 0, \left\{ n_{x_4} = 0, n_{y_4} = 1, \quad (9)$$

y $\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \vec{n}_c^{(k)}}$ es la derivada direccional de W con respecto del vector normal unitario saliente $\vec{n}_c^{(k)}$ a la curva Γ_c cuando se la considera como parte del dominio $G^{(k)}$, con $k = 1, 2$ (ver Figura 2).

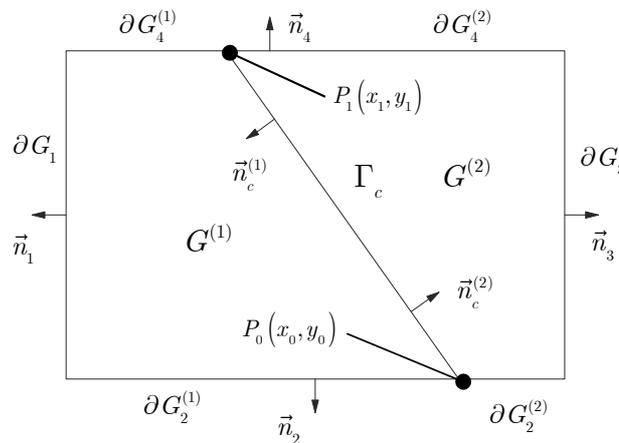


Figura 2: Dominios y contornos

Teniendo en cuenta (9) y que $n_{x_c}^{(k)}$ y $n_{y_c}^{(k)}$ son las componentes del vector normal unitario saliente $\vec{n}_c^{(k)}$, se obtiene que la máxima energía de deformación $U_{R,\max}$ es

$$U_{R,\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} c_{R_i} \frac{\partial W}{\partial n_i} \left(\frac{\partial W}{\partial x} n_{x_i} + \frac{\partial W}{\partial y} n_{y_i} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} c_{R_{12}} \left[\left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} n_{x_c}^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial y} n_{y_c}^{(1)} \right) + \left(\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} n_{x_c}^{(2)} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial y} n_{y_c}^{(2)} \right) \right]^2 ds \quad (10)$$

3 COMBINACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (R&LM)

3.1 Planteo del problema

Cuando se aplica el método de Ritz a una estructura compuesta por la unión de varios elementos estructurales entre sí (tal como el caso planteado en este trabajo), las condiciones de transición del problema requieren la continuidad de los desplazamientos en todas las uniones de los elementos que la componen. Estas condiciones de transición generan varios problemas en la construcción y en la elección racional de las funciones de forma.

Afortunadamente no es necesario que las funciones de forma verifiquen las condiciones de *contorno naturales* del problema (Mikhlin, 1964). Si se extiende este concepto a las condiciones de transición, se puede concluir que solo es necesario que las funciones verifiquen las condiciones de transición geométricas. Esto es particularmente cierto en el caso de una placa con una línea intermedia con rótulas (Quintana y Grossi, 2012; Grossi, 2012).

De acuerdo a Quintana y Grossi (2012) y Grossi (2012) la única condición de transición geométrica del problema es aquella que asegura la continuidad del desplazamiento transversal de la placa a lo largo de la curva con rótulas y que está dada por

$$W^{(1)}(s) - W^{(2)}(s) = 0, \forall s \in \Gamma_c. \quad (11)$$

Existe una gran complejidad en encontrar funciones de forma sencillas y adecuadas que se apliquen a todo el dominio del problema y que verifiquen la condición geométrica dada por la Ec. (11) y que a su vez no impongan en la estructura condiciones adicionales en los puntos de transición. Una forma de eliminar estos requerimientos sobre las funciones coordenadas es realizar el proceso de minimización sobre un funcional energético aumentado utilizando condiciones subsidiarias. En vista de lo anterior la condición de transición (11) puede ser incorporada en el funcional de energía, usando el método de los multiplicadores de Lagrange (Reddy, 1986; Gelfand y Fomin, 1963). Esto conduce al siguiente funcional:

$$L(W, \lambda) = \Pi(W) + \langle G(W), \lambda \rangle, \quad (12)$$

donde

$$G(W) \equiv W^{(1)} - W^{(2)} = 0, \forall (x, y) \in \Gamma_c, \quad (13)$$

$$\langle G(W), \lambda \rangle = \int_{\Gamma_c} \lambda(s) (W^{(1)}(s) - W^{(2)}(s)) ds, \quad (14)$$

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max}, \quad (15)$$

y λ es el multiplicador de Lagrange. Cabe destacar que en (14), el multiplicador de Lagrange es una función.

Es conocido que si $f : \text{im}(\beta) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida sobre la imagen Γ de una curva suave $\beta : [a', b'] \rightarrow \Gamma$, la integral curvilínea de f a lo largo de Γ está dada por la siguiente expresión

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{a'}^{b'} (f \circ \beta)(r) \|\beta'(r)\| dr, \quad (16)$$

donde $(f \circ \beta)(r) = f(\beta(r))$ y la norma $\|\beta'(r)\|$ está dada por $\sqrt{\beta_1'^2(r) + \beta_2'^2(r)}$. La Ec. (16) se utilizará para evaluar la integral curvilínea de (14). Además los vectores $\pm(\beta_1'(r), \beta_2'(r))$ son perpendiculares a Γ en el punto $\beta(r)$. Por ello, si el punto r es regular, el vector unitario y normal a la curva en el mismo punto está dado por:

$$\vec{n} = \pm \frac{(\beta_2'(r), -\beta_1'(r))}{\|\beta'(r)\|}. \quad (17)$$

La Ec. (17) permite evaluar la integral curvilínea que figura en la Ec. (10).

Rótulas distribuidas sobre una recta

En el caso en que la curva Γ_c sea una recta representada como $y = mx + n$, que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ (ver Figura 2) se puede parametrizar en forma inmediata como

$$\beta(r) = \left(\frac{r-n}{m}, r \right), \quad \beta : [y_0, y_1] \rightarrow \Gamma_c. \quad (18)$$

Teniendo en cuenta (18) y que $\left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| = \|(1/m, 1)\| = \sqrt{1+m^2}/m$, la integral curvilínea de la Ec. (14) cuando se reemplaza y por r , es

$$\int_{y_0}^{y_1} \lambda(y) \left(W^{(1)}\left(\frac{(y-n)}{m}, y\right) - W^{(2)}\left(\frac{(y-n)}{m}, y\right) \right) \sqrt{1+m^2}/m dy, \quad (19)$$

donde $y_0 = 0$ e $y_1 = b$.

Rótulas distribuidas sobre una parábola con eje paralelo al eje y

En este caso la curva Γ_c está representada por una ecuación cuadrática como:

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \quad (20)$$

siendo $a_1 = \frac{1}{4p}$, $a_2 = -\frac{h}{2p}$, $a_3 = \frac{h^2}{4p} + k$, donde (h, k) son las coordenadas del vértice y p es la distancia del vértice al foco de la parábola. La Ec. (20), también se puede escribir como

$$(x - h)^2 = 4p(y - k). \quad (21)$$

La forma paramétrica de (21) es:

$$\beta(r) = \left(2\sqrt{p(r - k)} + h, r \right), \quad \beta : [y_0, y_1] \rightarrow \Gamma_c. \quad (22)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (21) y que

$$\left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| = \left\| \left(\sqrt{\frac{p}{r - k}}, 1 \right) \right\| = \sqrt{1 + \frac{p}{r - k}}, \quad (23)$$

la integral curvilínea de la Ec. (14) cuando se reemplaza y por r , es

$$\int_{y_0}^{y_1} \lambda(y) \left[W^{(1)} \left(2\sqrt{p(y - k)} + h, y \right) - W^{(2)} \left(2\sqrt{p(y - k)} + h, y \right) \right] \left(\sqrt{1 + p/(y - k)} \right) dy. \quad (24)$$

Rótulas distribuidas sobre una parábola con eje paralelo al eje x

En este caso la curva Γ_c está representada por

$$x = a_1 y^2 + a_2 y + a_3, \quad (25)$$

donde $a_1 = \frac{1}{4p}$, $a_2 = -\frac{k}{2p}$, $a_3 = \frac{k^2}{4p} + h$, que también se puede escribir como

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \quad (26)$$

La forma paramétrica de la Ec. (26) es:

$$\beta(r) = \left(\frac{(r - k)^2}{4p} + h, r \right), \quad \beta : [y_0, y_1] \rightarrow \Gamma_c. \quad (27)$$

Teniendo en cuenta (26) y que

$$\left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| = \left\| \left(\frac{r-k}{2p}, 1 \right) \right\| = \sqrt{1 + \frac{(r-k)^2}{4p^2}}, \quad (28)$$

la integral curvilínea de la Ec. (14) cuando se reemplaza y por r , es

$$\int_{y_0}^{y_1} \lambda(y) \left[W^{(1)} \left((y-k)^2/4p + h, y \right) - W^{(2)} \left((y-k)^2/4p + h, y \right) \right] \sqrt{1 + (y-k)^2/4p^2} dy. \quad (29)$$

3.2 Funciones de aproximación

La deflexión transversal en cada subdominio $G^{(1)}$ y $G^{(2)}$ se puede expresar como productos de polinomios simples en cada una de las coordenadas, de la siguiente manera:

$$W^{(k)}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(k)} p_i^{(k)}(x) q_j^{(k)}(y) \quad (30)$$

donde los $c_{ij}^{(1)}$ y $c_{ij}^{(2)}$ son los coeficientes de ponderación desconocidos que se determinarán a través de la aplicación del método de Ritz.

Los conjuntos de polinomios $\{p_i^{(k)}(x)\}, \{q_j^{(k)}(y)\}, k=1,2$, se generan de manera automática a partir de polinomios bases que se obtienen satisfaciendo las condiciones de borde geométricas correspondientes a la dirección correspondiente en cada coordenada y en cada subdominio. La incorporación en el funcional energético de la condición de transición (11), mediante el multiplicador de Lagrange, permite considerar en la construcción de los polinomios bases que la curva con rótulas es un borde libre.

Los polinomios de orden superior se obtienen como:

$$p_i^{(k)}(x) = p_1^{(k)}(x) x^{i-1}, \quad i = 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \quad (31)$$

$$q_j^{(k)}(y) = q_1^{(k)}(y) y^{j-1}, \quad j = 2, \dots, N, \quad k = 1, 2. \quad (32)$$

3.3 Función multiplicador de Lagrange

En este problema el multiplicador de Lagrange es una función que se puede representar por un conjunto de polinomios (Reddy, 1986) como

$$\lambda(y) = \sum_{i=1}^M c_i^{(\lambda)} y^{i-1}, \quad (33)$$

donde $c_i^{(\lambda)}$ son coeficientes desconocidos.

3.4 Formulación de la ecuación de autovalores

Si se reemplaza en el funcional de energías (12), la expresión de las distintas energías dadas por (6) y (10) la aplicación del método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange requiere cumplir con la condición de funcional estacionario, esto es (Reddy, 1986):

$$\delta L(W, \lambda; U, \eta) = 0, \quad (34)$$

donde (U, η) son las direcciones admisibles para (W, λ) . La condición (34) conduce a la formulación variacional (Reddy, 1986):

$$\begin{cases} \delta L_W(W, \lambda; U) = 0 \Rightarrow \delta \Pi(W) + \lambda \delta G(W) = 0, \\ \delta L_\lambda(W, \lambda; \eta) = 0 \Rightarrow G(W) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Si se reemplaza en (35) las expresiones (12) y (33) se obtiene el siguiente problema de autovalores:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{ \mathbf{c} \} = \{ 0 \}, \quad (36)$$

donde las matrices que contienen los términos de la energía de deformación y de la energía cinética del sistema están dadas por:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{(1,1)}] & [K^{(1,2)}] & [K^{(1,\lambda)}] \\ & [K^{(2,2)}] & [K^{(2,\lambda)}] \\ \text{sim.} & & [0] \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M^{(1,1)}] & [0] & [0] \\ & [M^{(2,2)}] & [0] \\ \text{sim.} & & [0] \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Las expresiones de los distintos elementos de la matriz de rigidez $[K]$ y de la matriz de masa $[M]$ están dados por:

$$\begin{aligned}
 K_{ijkl}^{(1,1)} = & \int_0^b \int_0^{\beta^1(y)} \left[D_{11}^{(1)} P_{ik}^{(1,1)(2,2)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} + D_{12}^{(1)} \left(P_{ik}^{(1,1)(0,2)} Q_{jl}^{(1,1)(2,0)} + P_{ik}^{(1,1)(2,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,2)} \right) + \right. \\
 & D_{22}^{(1)} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(2,2)} + 2D_{16}^{(1)} \left(P_{ik}^{(1,1)(1,2)} Q_{jl}^{(1,1)(1,0)} + P_{ik}^{(1,1)(2,1)} Q_{jl}^{(1,1)(0,1)} \right) + \\
 & \left. + 2D_{26}^{(1)} \left(P_{ik}^{(1,1)(1,0)} Q_{jl}^{(1,1)(1,2)} + P_{ik}^{(1,1)(0,1)} Q_{jl}^{(1,1)(2,1)} \right) + 4D_{66}^{(1)} P_{ik}^{(1,1)(1,1)} Q_{jl}^{(1,1)(1,1)} \right] dx dy + \\
 & + c_{R_1} \int_0^b P_{ik}^{(1,1)(1,1)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \Big|_{x=0} dy + c_{T_1} \int_0^b P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \Big|_{x=0} dy + \\
 & + c_{R_2} \int_0^{x_0} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(1,1)} \Big|_{y=0} dx + c_{T_2} \int_0^{x_0} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \Big|_{y=0} dx + \\
 & + c_{R_4} \int_0^{x_1} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(1,1)} \Big|_{y=b} dx + c_{T_4} \int_0^{x_1} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \Big|_{y=b} dx + \\
 & + c_{R_{12}} \int_0^b \left[P_{ik}^{(1,1)(1,1)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \left(n_{x_c}^{(1)} \right)^2 + P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(1,1)} \left(n_{y_c}^{(1)} \right)^2 \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy + \\
 & + c_{R_{12}} \int_0^b \left[\left(P_{ik}^{(1,1)(1,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,1)} + P_{ik}^{(1,1)(0,1)} Q_{jl}^{(1,1)(1,0)} \right) n_{x_c}^{(1)} n_{y_c}^{(1)} \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy + \\
 & + c_{T_c} \int_0^b P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy, \tag{39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ijkl}^{(2,2)} = & \int_0^b \int_{\beta^1(y)}^a \left[D_{11}^{(2)} P_{ik}^{(2,2)(2,2)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} + D_{12}^{(2)} \left(P_{ik}^{(2,2)(0,2)} Q_{jl}^{(2,2)(2,0)} + P_{ik}^{(2,2)(2,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,2)} \right) + \right. \\
 & D_{22}^{(2)} P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(2,2)} + 2D_{16}^{(2)} \left(P_{ik}^{(2,2)(1,2)} Q_{jl}^{(2,2)(1,0)} + P_{ik}^{(2,2)(2,1)} Q_{jl}^{(2,2)(0,1)} \right) + \\
 & \left. + 2D_{26}^{(2)} \left(P_{ik}^{(2,2)(1,0)} Q_{jl}^{(2,2)(1,2)} + P_{ik}^{(2,2)(0,1)} Q_{jl}^{(2,2)(2,1)} \right) + 4D_{66}^{(2)} P_{ik}^{(2,2)(1,1)} Q_{jl}^{(2,2)(1,1)} \right] dy dx + \\
 & + c_{R_3} \int_0^b P_{ik}^{(2,2)(1,1)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} \Big|_{x=a} dy + c_{T_3} \int_0^b P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} \Big|_{x=a} dy + \\
 & + c_{R_2} \int_{x_0}^a P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(1,1)} \Big|_{y=0} dx + c_{T_2} \int_{x_0}^a P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} \Big|_{y=0} dx + \\
 & + c_{R_4} \int_{x_1}^a P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(1,1)} \Big|_{y=b} dx + c_{T_2} \int_{x_1}^a P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} \Big|_{y=b} dx + \\
 & + c_{R_{12}} \int_0^b \left[P_{ik}^{(2,2)(1,1)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} \left(n_{x_c}^{(2)} \right)^2 + P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(1,1)} \left(n_{y_c}^{(2)} \right)^2 \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy + \\
 & + c_{R_{12}} \int_0^b \left[\left(P_{ik}^{(2,2)(1,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,1)} + P_{ik}^{(2,2)(0,1)} Q_{jl}^{(2,2)(1,0)} \right) n_{x_c}^{(2)} n_{y_c}^{(2)} \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy, \tag{40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ijkl}^{(1,2)} = & c_{R_{12}} \int_0^b \left[\left(P_{ik}^{(1,2)(1,1)} Q_{jl}^{(1,2)(0,0)} + P_{ik}^{(1,2)(0,0)} Q_{jl}^{(1,2)(1,1)} \right) n_{x_c}^{(1)} n_{y_c}^{(2)} \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy + \\
 & + c_{R_{12}} \int_0^b \left[\left(P_{ik}^{(1,2)(1,0)} Q_{jl}^{(1,2)(0,1)} n_{x_c}^{(1)} n_{y_c}^{(2)} + P_{ik}^{(1,2)(0,1)} Q_{jl}^{(1,2)(1,0)} n_{x_c}^{(2)} n_{y_c}^{(1)} \right) \right] \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy, \tag{41}
 \end{aligned}$$

$$K_{ijk}^{(1,\lambda)} = \int_0^b \theta_k P_i^{(1,0)(0,0)} Q_j^{(1,0)(0,0)} \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy, \tag{42}$$

$$K_{ijk}^{(2,\lambda)} = \int_0^b \theta_k P_i^{(0,2)(0,0)} Q_j^{(0,2)(0,0)} \Big|_{x=\beta^1(y)} \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| dy, \tag{43}$$

$$M_{ijkl}^{(1,1)} = \int_0^b \int_0^{\beta^1(y)} P_{ik}^{(1,1)(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)(0,0)} dx dy, \quad (44)$$

$$M_{ijkl}^{(2,2)} = \int_0^b \int_{\beta^1(y)}^a P_{ik}^{(2,2)(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)(0,0)} dx dy, \quad (45)$$

donde

$$P_{ik}^{(\alpha,\eta)(r,s)} = \frac{\partial^r p_i^{(\alpha)}(x)}{\partial x^r} \frac{\partial^s p_k^{(\eta)}(y)}{\partial y^s}, \quad (46)$$

$$Q_{jl}^{(\alpha,\eta)(r,s)} = \frac{\partial^r p_j^{(\alpha)}(x)}{\partial x^r} \frac{\partial^s p_l^{(\eta)}(y)}{\partial y^s}, \quad (47)$$

$$\theta_k = y^{k-1}. \quad (48)$$

En el caso en que r o s sean nulos se asume que la derivada correspondiente, en las expresiones (46) y (47), toma el valor 1. La función $\beta^1(y)$ se obtiene al reemplazar el parámetro r por y en la expresión de β según el caso analizado.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan valores del parámetro de frecuencia adimensional

$$\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_{11}^{(1)}}, \quad (49)$$

para placas rectangulares con la incorporación de rótulas. En particular se analizan placas con rótulas distribuidas en rectas y parábolas con distintas configuraciones geométricas y para diferentes condiciones de apoyo perimetral. Para enfocar el estudio en el efecto que casusa la distribución de las rótulas sobre el coeficiente de frecuencia, de no indicarse lo contrario, se analiza una placa cuadrada de material isótropo con $D_{11}^{(k)} = D_{22}^{(k)} = D$, $D_{16}^{(k)} = D_{26}^{(k)} = 0$, $D_{12}^{(k)} = \mu D$, $D_{66}^{(k)} = 0.5(1 - \mu)D$, $\mu = 0.3$, $k = 1, 2$, $R_{12} = 0$ y $N = M = 9$.

La posición de las rótulas sobre una recta arbitraria queda definida mediante los puntos $P_0(x_0, 0)$ y $P_1(x_1, b)$ (ver Figura 2). En el caso de adoptar una curva parabólica con rótulas, se define el eje de la misma, se indica el vértice de la parábola (h, k) y la distancia focal p .

En la Tabla 1 se presentan los seis primeros valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ para una placa SSSS con rótulas distribuidas sobre una recta oblicua con $x_0 = 0.5$, para distintos valores de x_1 . En el caso en que la recta es aproximadamente vertical, es decir para $x_1 = 0.49$, los valores obtenidos se compararon con los proporcionados por Quintana y Grossi (2012) y se observa una excelente concordancia. Las formas modales mostradas corresponden a $x_1 = 0.1$, 0.49 y 0.99.

En la Tabla 2 se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ y sus

correspondientes formas modales para una placa SSSS con rótulas distribuidas en una parábola eje de simetría paralelo al eje x y vértice en $(0.5, 0.5)$ con $p = 0.5$.

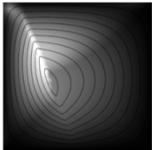
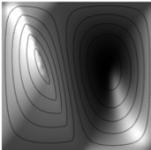
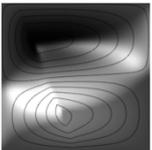
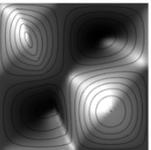
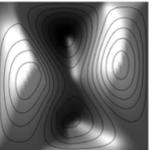
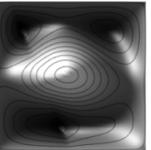
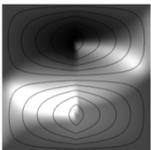
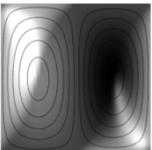
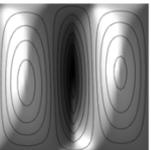
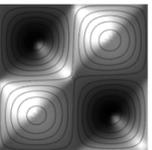
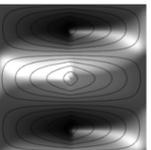
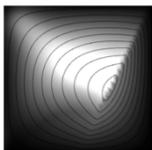
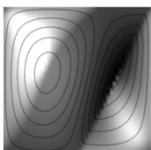
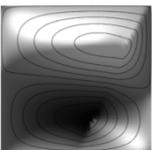
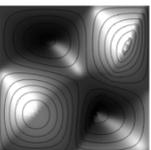
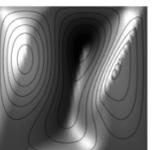
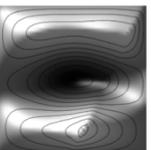
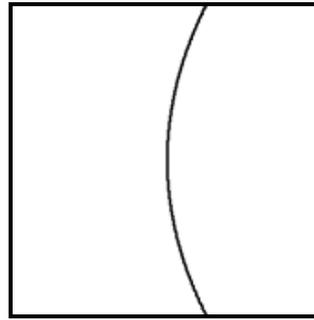
Secuencia Modal						
x_1	1	2	3	4	5	6
0.1	15.9710 	39.1351 	46.4099 	71.8047 	93.5841 	95.7653 
0.3	16.0818	44.6786	46.6403	75.5342	88.0002	95.8243
0.49	16.1346 	46.7376 	49.3307 	75.3127 	78.9588 	96.0402 
Ref.	16.13478	46.73815	49.34802	75.28338	78.95684	96.0406
0.6	16.1204	46.6676	47.8493	76.7183	80.4007	95.9908
0.8	16.0307	41.6466	46.4867	73.5519	94.7940	95.7897
0.99	15.7385 	37.3018 	46.3957 	70.8704 	88.4590 	95.5711 

Tabla 1: Primeros seis valores de Ω para una placa SSSS con rótulas sobre una recta oblicua. Los valores de Ref. corresponden a los proporcionados por [Quintana y Grossi \(2012\)](#) para $x = 0.5$.

En la [Tabla 3](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ para una placa SSSS, con rótulas distribuidas en una parábola con eje coincidente con el eje y y vértice $(0, -0.01)$ para distintos valores de p . Las formas modales mostradas corresponden a $p = 0.2$. Se observa que para valores pequeños de p , los valores de Ω tienden a los valores de una placa sin rótula interna. Esto se comprende debido a que al disminuir el valor de p la parábola tiende a coincidir con el borde $x = 0$ de la placa.

Esquema de la parábola:



Secuencia Modal

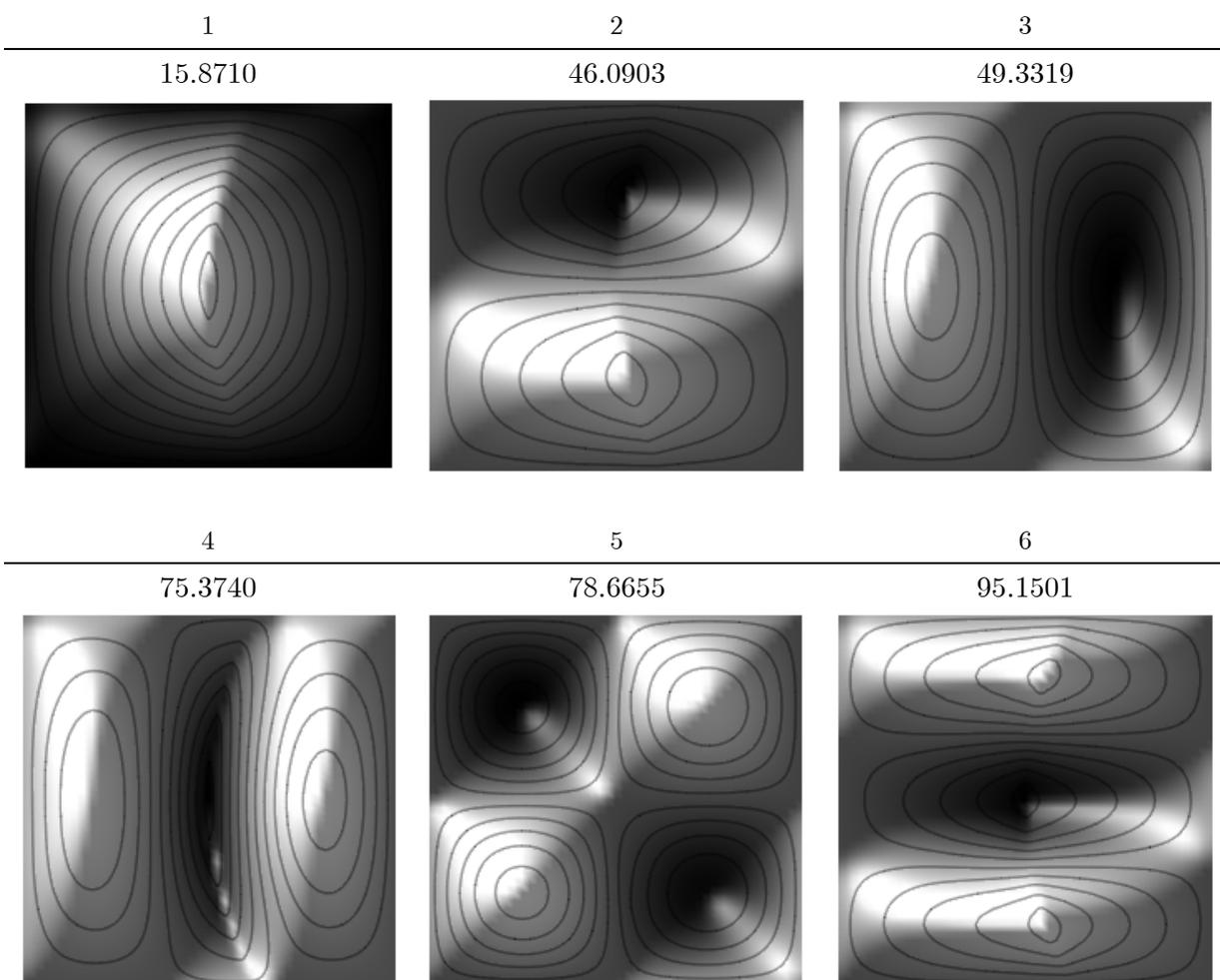
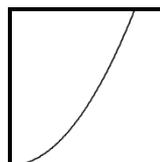


Tabla 2: Primeros seis valores de Ω y sus correspondientes formas modales para una placa SSSS, con una rótula libre parabólica interna, con su eje paralelo al eje x , y su vértice ubicado en $(0.5, 0.5)$, con $p = 0.5$.

En la [Tabla 4](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega^2 \sqrt{\rho h / D}$ para una placa ELLL con rótulas distribuidas en rectas definidas por el punto $x_0 = 0.01$, para distintos valores de x_1 . Las formas modales mostradas corresponden a $x_1 = 0.99$.

Esquema de la parábola para $p = 0.16$:



Secuencia Modal

p	1	2	3	4	5	6
0.2	14.1491	41.8721	43.5196	71.7528	88.7928	91.5450
10^{-2}	17.8036	35.6141	48.4747	71.6192	75.6352	97.8882
10^{-3}	19.2557	42.2192	49.2003	73.3275	77.5811	98.5778
10^{-4}	19.6154	47.3690	49.3151	78.4501	87.7059	98.6724
10^{-5}	19.7054	48.8150	49.3396	78.8298	95.7955	98.6900
10^{-6}	19.7292	49.1904	49.3456	78.9196	97.8892	98.6943

Tabla 3: Primeros seis valores de Ω para una placa SSSS con rótulas distribuidas en una parábola con eje coincidente con el eje y y vértice $(0, -0.01)$, para distintos valores de p . Las formas modales mostradas corresponden a $p = 0.2$.

Secuencia Modal

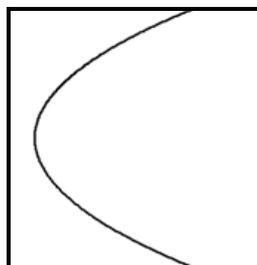
x_1	1	2	3	4	5	6
0.99	4.8227	18.4643	22.4969	27.8852	39.6411	53.3824
0.8	5.4768	17.2639	24.0622	29.4339	40.9258	53.2738
0.6	6.5032	16.6206	24.9817	27.6801	48.3233	55.6979
0.5	7.0015	17.1481	24.9515	27.3475	49.9366	53.6404
0.3	7.4088	18.6761	27.0205	27.5728	48.0952	55.8532
0.1	7.0125	16.5895	26.4019	27.4206	51.1562	55.0097
0.02	6.7470	15.3546	25.8976	26.1278	49.4886	51.7214

Tabla 4: Primeros seis valores de Ω para una placa ELLL con rótulas distribuidas en rectas definidas por el punto $x_0 = 0.01$, para distintos valores de x_1 . Las formas modales mostradas corresponden a $x_1 = 0.99$.

En la [Tabla 5](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ y sus

correspondientes formas modales para una placa ELLL con rótulas en una parábola con eje paralelo al eje x , vértice $(0.1, 0.5)$ y $p = 0.1$.

Esquema de la parábola:



Secuencia Modal

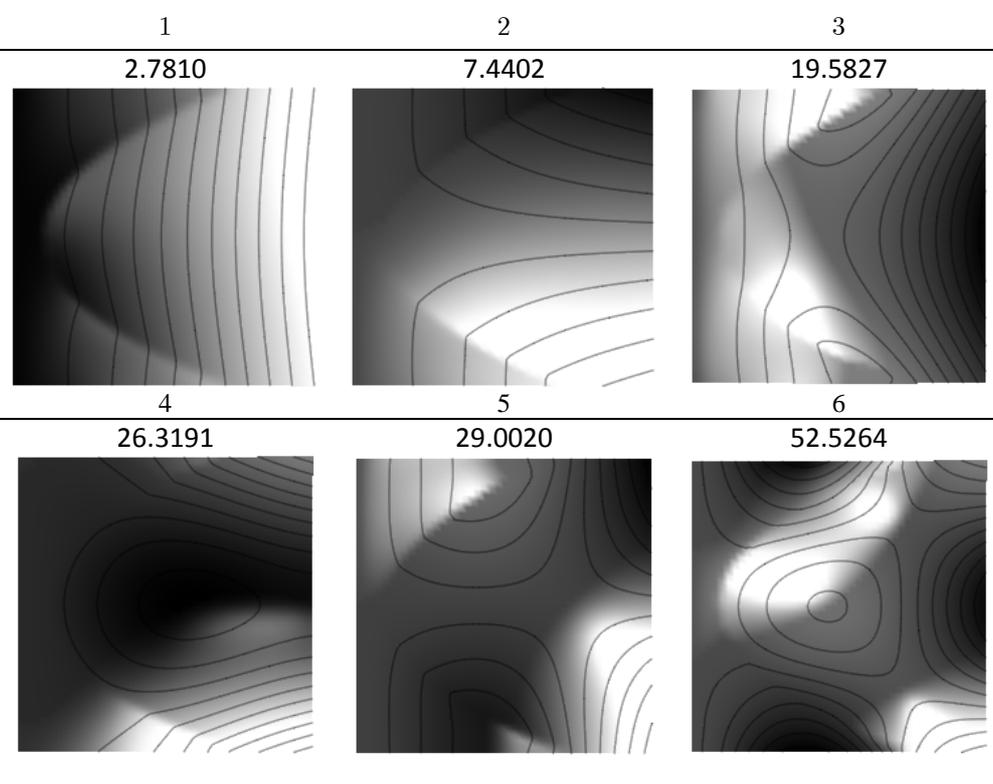


Tabla 5: Primeros seis valores de Ω y sus correspondientes formas modales para una placa ELLL con rótulas en una parábola con eje paralelo al eje x , vértice $(0.1, 0.5)$ y $p = 0.1$.

En la [Tabla 6](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_{11}^{(1)}}$, y sus correspondientes formas modales para una placa SSSS con rótulas sobre una recta oblicua para $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.8$, siendo el dominio $G^{(1)}$ con material anisótropo y $G^{(2)}$ con material isótropo. La anisotropía del primer dominio está caracterizada por $D_{22}^{(1)} / D_{11}^{(1)} = 0.2130195$, $D_{12}^{(1)} / D_{11}^{(1)} = 0.3245569$, $D_{16}^{(1)} / D_{11}^{(1)} = 0.5120546$, $D_{26}^{(1)} / D_{11}^{(1)} = 0.1694905$ y $D_{66}^{(1)} / D_{11}^{(1)} = 0.3387559$. Para este estudio se consideró $N = M = 13$.

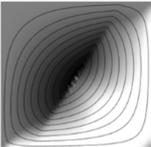
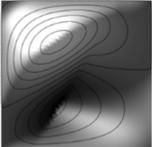
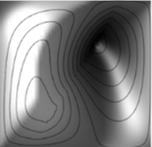
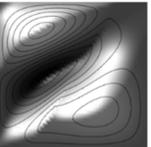
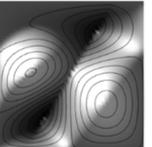
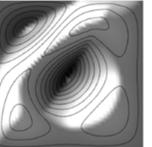
Secuencia Modal					
1	2	3	4	5	6
12.9147	30.9333	42.9712	55.3592	61.7761	82.2022
					

Tabla 6: Primeros seis valores de Ω y sus correspondientes formas modales para una placa SSSS con rótulas sobre una recta oblicua para $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.8$, siendo el dominio $G^{(1)}$ con material anisótropo y $G^{(2)}$ con material isótropo.

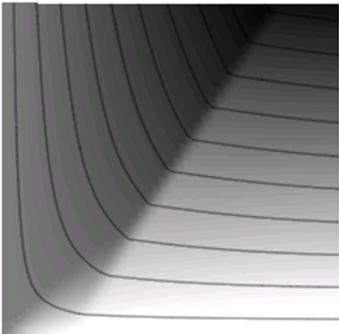
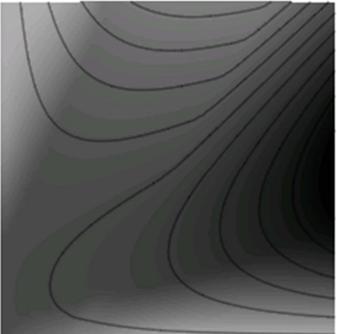
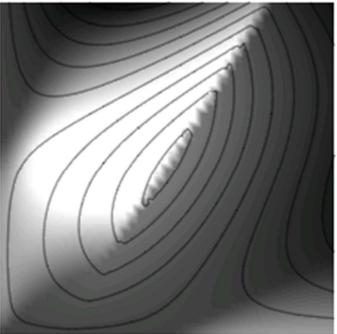
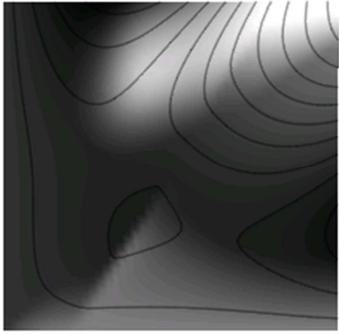
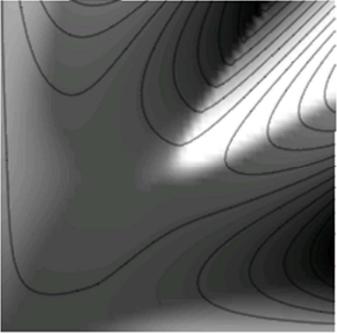
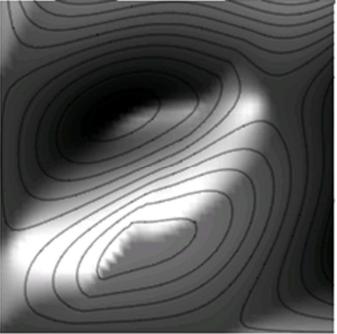
Secuencia Modal		
1	2	3
1.3227	5.5566	10.7030
		
4	5	6
14.2501	22.3377	27.0646
		

Tabla 7: Primeros seis valores de Ω y sus correspondientes formas modales para una placa SSSS con rótulas sobre una recta oblicua para $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.8$, siendo el dominio $G^{(1)}$ con material anisótropo y $G^{(2)}$ con material isótropo.

En la [Tabla 7](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_{11}^{(1)}}$, y sus correspondientes formas modales para una placa laminada SSFF con rótulas sobre una recta

oblicua para $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.8$, siendo el dominio $G^{(1)}$ con material laminado con un ángulo $\beta = 45^\circ$, y el dominio $G^{(2)}$ laminado con un ángulo $\beta = 30^\circ$. Para $\beta = 45^\circ$, las propiedades del material son $D_{11}^{(1)} = 0.6028973$, $D_{22}^{(1)} = 0.15359594$, $D_{12}^{(1)} = 0.2029258$, $D_{16}^{(1)} = 0.29412968$, $D_{26}^{(1)} = 0.0949542$, $D_{66}^{(1)} = 0.20264792$, para $\beta = 30^\circ$, las propiedades del material son $D_{11}^{(2)} = 0.32073661$, $D_{22}^{(2)} = 0.32073661$, $D_{12}^{(2)} = 0.26042281$, $D_{16}^{(2)} = 0.22463768$, $D_{26}^{(2)} = 0.22463768$ y $D_{66}^{(2)} = 0.26014493$. Para este estudio se consideró $N = M = 13$.

En la [Tabla 8](#) se presentan los primeros seis valores de $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ y sus correspondientes formas modales para una placa isótropa con restricciones elásticas en todos sus bordes y en la recta oblicua siendo $x_0 = 0.6$, $x_1 = 0.3$. Las restricciones elásticas están dadas por $c_{R_1} = c_{R_2} = c_{R_3} = c_{R_4} = 1$, $c_{T_1} = c_{T_2} = c_{T_3} = c_{T_4} = c_{T_c} = 10$, $c_{R_{12}} = 1$.

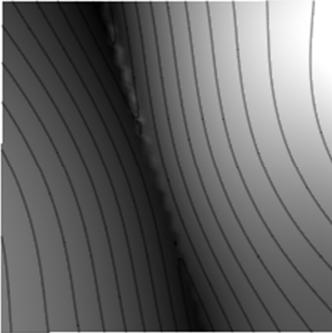
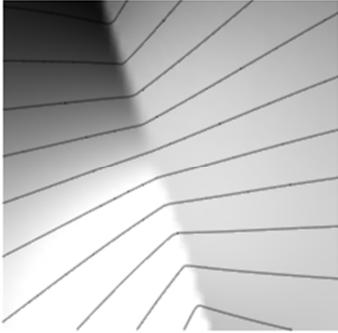
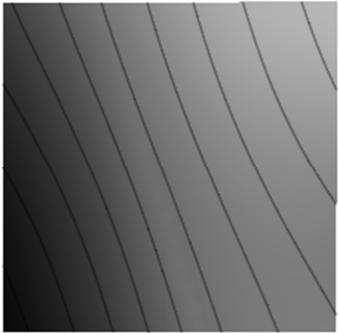
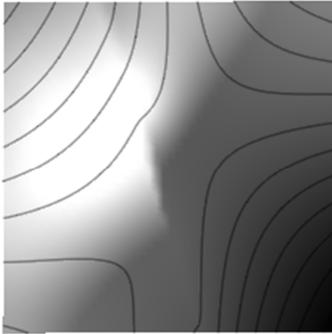
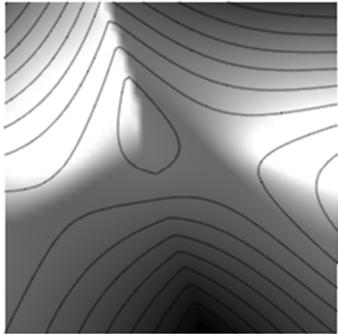
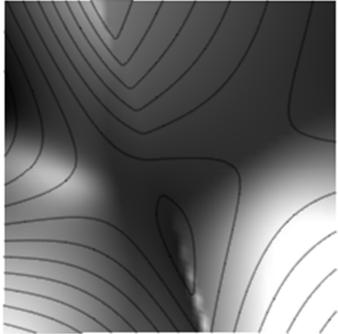
Secuencia Modal		
1	2	3
6.2298	8.5414	9.6984
		
4	5	6
18.3595	26.0785	26.3480
		

Tabla 8: Primeros seis valores de Ω_i y sus correspondientes formas modales para una placa con $x_0 = 0.6$, $x_1 = 0.3$, y restricciones elásticas $c_{R_1} = c_{R_2} = c_{R_3} = c_{R_4} = 1$, $c_{T_1} = c_{T_2} = c_{T_3} = c_{T_4} = c_{T_c} = 10$, $c_{R_{12}} = 1$.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla un algoritmo computacionalmente eficiente que proporciona resultados con muy buena precisión, para determinar los parámetros de frecuencias de placas rectangulares con rótulas distribuidas arbitrariamente en distintas curvas. La metodología se basa en el método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange. El campo de desplazamientos se aproxima mediante conjuntos de polinomios simples que se generan automáticamente. La solución obtenida tiene la ventaja de ser una solución analítica que permite apreciar de manera clara la forma en que los distintos parámetros mecánicos y geométricos, y permite además, estudiar como influyen en la respuesta dinámica del sistema, lo que resulta especialmente atractivo en problemas de diseño y optimización.

En cuanto a los resultados obtenidos, y según el conocimiento de los autores, se presentaron los primeros valores existentes al momento de placas rectangulares con una curva de rótulas elásticas intermedia. Específicamente, como curvas intermedias se presentan resultados considerando rectas y parábolas, donde se observa también que es extensible a otro tipo de curvas.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa N°1899) y por el Consejo de Investigación de la Universidad Católica de Salta (Proy. N° 111/13, y 115/13).

REFERENCIAS

- Gelfand I. M. y Fomin S. V., *Calculus of variations*. Prentice-Hall Inc, 1963.
- Grossi, R.O y Raffo J.L., Natural vibrations of anisotropic plates with several internal line hinges. *Acta Mechanica*, en prensa, 2013.
- Grossi, R.O., Boundary value problems for anisotropic plates with internal line hinges. *Acta Mechanica*, 223:125–144, 2012.
- Grossi, R.O. y Quintana, M.V. Boundary and eigenvalue problems for generally restrained anisotropic plates with internal hinges. *IV Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (INMAT)*, Buenos Aires, Argentina, 2008.
- Grossi, R.O. y Quintana, M.V., The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams and plates. *Mecánica Computacional*, 26:572-591, 2007.
- Gupta, P.R. y Reddy, J.N., Buckling and vibrations of orthotropic plates with an internal line hinge. *International Journal of Structure and Stability Dynamic*, 2:457–486, 2002.
- Huang, M., Ma, X. Q., Sakiyama, T., Matsuda, H. y Morita, C., Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 322: 227–240, 2009.
- Li, T.Y., Liu, J.X. y Zhang, T., Vibrational power flow characteristics of circular plate structures with peripheral surface crack. *Journal of Sound and Vibration*, 276:1081–1091, 2004.
- Mikhlin, S., *Variational Methods of Mathematical Physics*. Mac Millan, 1964.
- Quintana, M.V. y Grossi, R.O., Free vibrations of a generally restrained rectangular plate with an internal line hinge. *Applied Acoustic*, 73:356–365, 2012.
- Reddy J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw Hill, New York, 1986.
- Reddy J.N., *Mechanics of Composite Laminated Plates and Shell: Theory and Analysis*. CRC

Press, 2004.

Wang, C.M., Xiang, Y. y Wang, C.Y., Buckling and vibration of plates with an internal line hinge via the Ritz method. *Proceedings of First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Sydney, 1663–1672, 2001.

Xiang, Y. y Reddy, J., Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, 263:285–297, 2003.

Yuan J. y Dickinson S.M., The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh–Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 159:39–55, 1992.