

## VIBRACIONES LIBRES DE PÓRTICOS CON VÍNCULOS Y UNIONES FLEXIBLES

Alejandro R. Ratazzi<sup>a</sup>, Diana V. Bambill<sup>a, b</sup>, Carlos A. Rossit<sup>a, b</sup> and Carla Ciccioli<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), Bahía Blanca, Argentina.*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.*

*[alejandro.ratazzi@uns.edu.ar](mailto:alejandro.ratazzi@uns.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar), [carossit@criba.edu.ar](mailto:carossit@criba.edu.ar), [carla.ciccioli@uns.edu.ar](mailto:carla.ciccioli@uns.edu.ar)*

**Keywords:** vibración, vigas, unión, vínculo, semirrigidez, Euler-Bernoulli, cálculo variacional.

**Abstract.** En el presente trabajo se presenta un modelo simplificado para estudiar el efecto de la flexibilidad de vínculos y uniones en las vibraciones libres en el plano de pórticos en L. El modelo está basado en el cálculo variacional y la teoría de Euler-Bernoulli de vigas. Las ecuaciones que representan el problema del título se obtuvieron de plantear el Principio de Hamilton. Con la formulación propuesta, se obtiene la solución exacta del modelo analizado contribuyendo al diseño de elementos estructurales más eficientes. En este trabajo se determinan las características dinámicas del pórtico y se investiga el efecto de la rigidez de los vínculos externos y uniones internas en las frecuencias naturales. Los estudios sobre algunos ejemplos de pórticos con y sin uniones elásticas intermedias, y condiciones de vínculo clásicas y elásticas, muestran que es posible obtener una buena predicción del comportamiento de una estructura real. Los resultados numéricos se comparan con los calculados con el método de elementos finitos y con casos particulares del modelo propuesto disponibles en la literatura técnica calificada.

## 1 INTRODUCCIÓN

El modelo de esta estructura sencilla (Figura 1), se ha seleccionado porque es representativa de un gran número sistemas de radar y robóticos que se componen de cuerpos interconectados en forma flexible, (Moghadam et al. 2013). También es de suma importancia en el diseño estructural, al ser el núcleo fundamental de muchas estructuras resistentes en puentes y edificios, y en el campo de las microestructuras donde son utilizadas en modernos equipos electrónicos en entornos vibratorios.

Cheng y Hatam (2000) realizaron un análisis de vibraciones de sistemas estructurales compuestos de vigas, que denomina “point-coupled structures” (estructuras acopladas en puntos). En ese caso particular desarrollaron un método aplicable a estructuras acopladas en un punto debido a que la zona de contacto entre elementos acoplados es suficientemente pequeña en comparación con la longitud de onda de modo que puede considerarse en el análisis como un solo punto y resuelven entre otros, el modelo de la viga en L.

Chen y Chou, (1999) utilizaron el modelo de una estructura no amortiguada de vigas en L, en voladizo para ilustrar la aplicación del método “robust Kalman-filter-based OMFC” y la robustez de la estabilidad.

Warminski et al., (2008) presentaron un trabajo donde se analizan las investigaciones teóricas y experimentales de un sistema autoparamétrico compuesto de dos vigas de sección rectangular dispuestas en L. Las ecuaciones diferenciales de movimiento y las condiciones de borde se obtienen por la aplicación del principio de Hamilton. Se analizaron tanto los modos en el plano de la estructura como fuera de él.

En cuanto a las condiciones de borde, por su importancia, el caso de las vibraciones de sistemas de vigas con condiciones de borde ideales está tratado en muchos libros clásicos como el de Timoshenko y Young (1990); Clough y Penzien (2004); Warburton (1976); Blevins (2001) y más recientemente en el de Karnovsky y Lebed (2004). Por otro lado, el efecto que variaciones en las condiciones de “rigidez” de los vínculos producen en las vibraciones naturales de un sistema de vigas es un tema de interés práctico. De hecho, los vínculos ideales utilizados habitualmente en el cálculo de estructuras, implican hipótesis teóricas que rara vez se materializan en las estructuras portantes. Una condición de rigidez en el vínculo puede quedar invalidada en la realidad, por un deterioro del mismo, una falla en el medio donde el vínculo se relaciona con el entorno externo a la estructura o bien un error de apreciación de magnitudes al suponer la hipótesis de infinita rigidez. Considerar la posibilidad de variación en la magnitud de la rigidez del vínculo, permite evaluar el rango de incidencia que esas circunstancias generan. En este trabajo se analiza la influencia de los parámetros de rigidez de distintas condiciones de vinculación para determinar relaciones más adecuadas a la naturaleza de distintos vínculos y su entorno.

La presencia de una articulación interna en una estructura viga ha sido tratada en trabajos publicados por Wang y Wang (2001), Lee et al. (2003), Chang et al. (2006), Grossi y Quintana (2008), Quintana et al. (2010) y Ratazzi et al. (2011, 2012). En el presente estudio se analizan las condiciones de semirrigidez de una unión interna entre dos vigas.

## 2 PLANTEO DEL MODELO

El pórtico en L de la Figura 1 se considera formado por tres vigas. La denominada viga 1 es vertical, de longitud  $l_1$  y tiene vínculos elásticos externos en su extremo inferior. La viga 2, de longitud  $l_2$ , está rígidamente unida al tramo 1 con un ángulo recto y en su otro extremo está

vinculada mediante una rótula elástica a la viga 3, que es colineal con ella. Por último, la viga 3, tiene longitud  $l_3$ , está unida a la viga 2 a través de una vinculación semirrígida y su otro extremo se vincula mediante una articulación externa fija.

Para plantear el modelo estructural se utiliza la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y no se tiene en cuenta la deformación axial de las barras. La condición de infinita rigidez axial es una hipótesis razonable en la resolución de este tipo de problemas. Las condiciones elásticas de la vinculación se representan con resortes traslacionales y rotacionales. En la viga 1, la vinculación externa está representada por tres resortes. Los dos resortes traslacionales tienen las direcciones tangente y normal al eje de la viga respectivamente y restringen los desplazamientos en dirección del eje del tramo  $u_1$  y en dirección transversal a él,  $w_1$ ; sus constantes de rigidez se indican como  $t_u$  y  $t_w$ . El giro de este extremo de la viga está controlado por un resorte rotacional de constante  $r_z$ . Las vigas colineales 2 y 3 están unidas entre sí por una rótula cuya condición elástica está representada por un resorte rotacional de rigidez  $r_m$ .

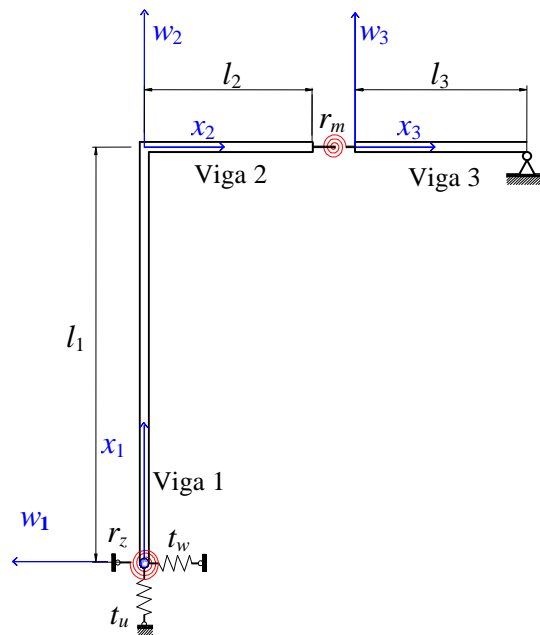


Figura 1: Estructura

Con el subíndice  $i=1, 2$  ó  $3$  se identifica la pertenencia a cada una de las vigas, de esta forma los desplazamientos transversales al eje en el instante  $t$ , en cada caso quedan indicados por  $w_i = w_i(x_i, t)$ ;  $i = 1, 2, 3$ ; los sentidos asumidos como positivos son los indicados en la Figura 1.

El desplazamiento de la viga 1 en dirección de su eje, bajo la hipótesis de rigidez axial, se relaciona directamente con el desplazamiento transversal de la viga 2 en el nudo rígido, por lo cual puede escribirse que:

$$u_1 = u_1(x_1, t) = w_2(0, t); \quad \forall x_1 \quad (1)$$

Las ecuaciones diferenciales gobernantes del movimiento del sistema de vigas Bernoulli de la estructura para vibraciones libres se obtienen al aplicar el principio de Hamilton, que

requiere de las expresiones de las energías potencial y cinética como prerequisite fundamental. (Albarracín y Grossi, 2005).

La energía cinética total del sistema de vigas está dada por:

$$T^* = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left( \int_0^{l_i} \rho_i A_i \left( \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 dx_i \right) + \frac{\rho_1 A_1 l_1}{2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} \Big|_{(0,t)} \right)^2; \quad (2)$$

donde  $\rho_i A_i$  es la masa por unidad de longitud y  $l_i$  la longitud de la viga  $i$ . El segundo término de la expresión de la energía cinética (2) corresponde a la traslación de la viga 1 como cuerpo rígido, adecuada a la hipótesis de infinita rigidez axil asumida, ecuación (1).

La energía potencial del sistema estructural está dada por la expresión:

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_0^{l_i} E_i I_i \left( \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \right]; \quad (3)$$

donde  $E_i$  e  $I_i$ , son el módulo de elasticidad del material y el momento de inercia de la sección transversal de cada viga. Y los trabajos elásticos de los vínculos descriptos, vienen dados por:

$$T_e^* = \frac{1}{2} r_m \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \Big|_{(l_2,t)} - \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \Big|_{(0,t)} \right)^2 + \frac{1}{2} r_z \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \Big|_{(0,t)} \right)^2 + \frac{1}{2} t_w (w_1(0,t))^2 + \frac{1}{2} t_u (u_1(0,t))^2; \quad (4)$$

Con las expresiones anteriores se conforma el funcional de energía:

$$J(\mathbf{w}_i) = T^* - U^* - T_e^* \quad (5)$$

Introduciendo las coordenadas adimensionales:

$$X_i = \frac{x_i}{l_i}; \quad \text{con } X_i \in [0,1] \quad \forall i = 1, 2, 3; \quad (6)$$

los desplazamientos adimensionales de cada sección quedan expresados como:

$$U_1 = U_1(X_1, t) = \frac{u_1(x_1, t)}{l_1}; \quad W_i = W_i(X_i, t) = \frac{w_i(x_i, t)}{l_i}. \quad (7)$$

En cuanto a las características físicas y geométricas de las vigas se definen parámetros adimensionales referidos a las características de la viga 1, tal como se indica:

$$v_{l_i} = \frac{l_i}{l}; \quad v_{EI_i} = \frac{E_i I_i}{EI}; \quad v_{\rho A_i} = \frac{\rho_i A_i}{\rho A}; \quad i = 1, 2, 3; \quad \text{donde } l = l_1; \quad EI = E_1 I_1 \quad \text{y} \quad \rho A = \rho_1 A_1. \quad (8)$$

Y también las constantes de rigidez de los vínculos elásticos se adimensionalizan como:

$$T_w = t_w \frac{l^3}{EI}; \quad T_u = t_u \frac{l^3}{EI}; \quad R_z = r_z \frac{l}{EI}; \quad R_m = r_m \frac{l}{EI}. \quad (9)$$

## 2.1 Derivación de las ecuaciones gobernantes de movimiento en vibraciones libres

El principio de Hamilton requiere que entre dos instantes arbitrarios de tiempo para los cuales las posiciones del sistema son conocidas, el mismo ejecute un movimiento que haga estacionario al funcional de energía del sistema, ecuación (5).

La condición estacionaria requerida por el principio de Hamilton se expresa como:

$$\delta J(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0; \quad \forall \mathbf{v} \in D_0 \quad (10)$$

donde  $D_0$  es el espacio admisible de las direcciones para  $w$  en el dominio  $D_0$  de la función.

Luego, y teniendo en cuenta las adimensionalizaciones realizadas se escribe como:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_a}^{t_b} (T^* - U^* - T_e^*) dt = \\ & = \delta \left\{ \frac{1}{2} \rho A l^3 \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[ \sum_{i=1}^3 \int_0^1 v_{\rho A_i} v_{l_i}^3 \left( \frac{\partial W_i(X_i, t)}{\partial t} \right)^2 dX_i + v_{\rho A_1} v_{l_1} v_{l_2}^2 \left( \frac{\partial W_2}{\partial t} \Big|_{(0,t)} \right)^2 \right] dt \right\} - \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{EI}{l} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[ \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \frac{v_{EI_i}}{v_{l_i}} \left( \frac{\partial^2 W_i(X_i, t)}{\partial X_i^2} \right)^2 dX_i \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} R_m \left( \frac{\partial W_2}{\partial X_2} \Big|_{(1,t)} - \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \Big|_{(0,t)} \right)^2 dt + \right. \\ & \left. \left. + \int_{t_a}^{t_b} R_z \left\{ \left( \frac{\partial W_1}{\partial X_1} \Big|_{(0,t)} \right)^2 dt + \int_{t_a}^{t_b} T_w (v_{l_1})^2 (W_1(0, t))^2 dt + \int_{t_a}^{t_b} T_u (v_{l_2})^2 (W_2(0, t))^2 dt \right\} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Las condiciones de borde en los extremos de la estructura son:

$$v_{l_1} W_1(1, t) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(0, t) - R_z \left( \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \right) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{(v_{l_1})^2} \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(0, t) + T_w v_{l_1} W_1(0, t) = 0; \quad (14)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{(v_{l_2})^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(0, t) + T_u v_{l_2} W_2(0, t) - \frac{\rho_1 A_1 l^4}{EI} v_{l_1} v_{l_2} W_2(0, t) = 0; \quad (15)$$

$$v_{l_3} W_3(1, t) = 0; \quad (16)$$

$$\frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}} \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2}(1, t) = 0; \quad (17)$$

y las condiciones de compatibilidad y equilibrio de corte y momento en las uniones entre vigas contiguas son:

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(1, t) = \frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(0, t); \quad (18)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(1,t) = \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(0,t); \quad (19)$$

$$v_{l_2} W_2(1,t) = v_{l_3} W_3(0,t); \quad (20)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(1,t) - R_m \left( \frac{\partial W_3}{\partial X_3}(0,t) - \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(1,t) \right) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}} \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2}(0,t) - R_m \left( \frac{\partial W_3}{\partial X_3}(0,t) - \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(1,t) \right) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(1,t) - \frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}^2} \frac{\partial^3 W_3}{\partial X_3^3}(0,t) = 0. \quad (23)$$

donde los esfuerzos internos de corte y momento adimensionalizados en función de las deformaciones han sido expresados como:

$$Q_i = \frac{v_{EI_i}}{(v_{l_i})^2} \frac{\partial^3 W_i}{\partial X_i^3}; \quad M_i = \frac{v_{EI_i}}{v_{l_i}} \frac{\partial^2 W_i}{\partial X_i^2}. \quad (24)$$

Utilizando el operador  $\delta$ , integrando por partes y ordenando los términos se llega al sistema gobernante de ecuaciones diferenciales para vibraciones libres de las vigas de la estructura.

$$v_{EI_1} \frac{\partial^4 W_1(X_1,t)}{\partial X_1^4} + v_{\rho A_1} (v_{l_1})^4 \frac{\partial^2 W_1(X_1,t)}{\partial t^2} = 0; \quad (25)$$

$$v_{EI_2} \frac{\partial^4 W_2(X_2,t)}{\partial X_2^4} + v_{\rho A_2} (v_{l_2})^4 \frac{\partial^2 W_2(X_2,t)}{\partial t^2} = 0; \quad (26)$$

$$v_{EI_3} \frac{\partial^4 W_3(X_3,t)}{\partial X_3^4} + v_{\rho A_3} (v_{l_3})^4 \frac{\partial^2 W_3(X_3,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (27)$$

## 2.2 Solución exacta

Aplicando el método de separación de variables, la solución de las ecuaciones (25-27) se toman de la forma:

$$W_1(X_1,t) = T(t) \cdot \bar{W}_1(X_1); \quad (28)$$

$$W_2(X_2,t) = T(t) \cdot \bar{W}_2(X_2); \quad (29)$$

$$W_3(X_3, t) = T(t) \cdot \bar{W}_3(X_3) \quad (30)$$

Si se asume una oscilación armónica, entonces será:

$$T(t) = e^{i\omega t}; \quad (31)$$

y cada función  $\bar{W}_i$  es la sumatoria de

$$\bar{W}_i = \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(X_i); \text{ con } i=1, 2, 3; \quad (32)$$

con

$$W_{1n}(X_1) = C_1 \cosh(\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_2 \sinh(\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_3 \cos(\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_4 \sin(\lambda_n \alpha_1 X_1); \quad (33)$$

$$W_{2n}(X_2) = C_5 \cosh(\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_6 \sinh(\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_7 \cos(\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_8 \sin(\lambda_n \alpha_2 X_2); \quad (34)$$

$$W_{3n}(X_3) = C_9 \cosh(\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{10} \sinh(\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{11} \cos(\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{12} \sin(\lambda_n \alpha_3 X_3). \quad (35)$$

$W_{1n}$ ,  $W_{2n}$ ,  $W_{3n}$  representan los modos naturales de vibración transversal de las vigas;  $\lambda$  es el coeficiente adimensional de la frecuencia natural de vibración del sistema estructural; y  $\omega$  es la frecuencia natural particular de ese modo en radianes por segundo:

$$\lambda = \sqrt[4]{l^4 \omega^2 \rho A / EI}. \quad (36)$$

Los  $\alpha_i$  son parámetros adimensionales dados por las características físico-geométricas de las vigas, y están definidas por la expresión:

$$\alpha_i = v_{l_i} \sqrt[4]{\frac{v_{\rho A_i}}{v_{EI_i}}}; \quad i=1, 2, 3. \quad (37)$$

Finalmente  $C_1, C_2, \dots, C_{12}$  son constantes.

Las ecuaciones (28-30), junto con las condiciones (12-23) generan un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las 12 constantes  $C_1$  a  $C_{12}$ . La solución no trivial del sistema de ecuaciones planteado requiere que su determinante sea nulo, esta condición permite obtener los coeficientes de frecuencia  $\lambda$ .

### 2.3 Método de elementos finitos

Algunos casos numéricos, de los que se presentan en este trabajo, fueron obtenidas también modelando el pórtico con el método de elementos finitos. Para ello se utilizó el software [Algor \(2009\)](#).

En el modelo de elementos finitos se adoptaron 100 elementos viga de 3 grados de libertad para cada una de las tres vigas del pórtico. Para representar la rótula elástica intermedia, se utilizó un elemento viga muy pequeño, aproximadamente 300 veces menor que la longitud de la viga de referencia (viga 1). Su momento de inercia de la sección se varió en cada situación

para simular la constante de rigidez  $R_m$  del resorte que conecta ambas vigas del tramo horizontal. Las demás condiciones de vinculación, se modelaron con vínculos elásticos o rígidos según el caso.

### 3 RESULTADOS

Los resultados presentados del método descripto fueron calculados mediante el software [Mathematica, \(2012\)](#).

El primer ejemplo numérico corresponde a un pórtico en L empotrado-articulado, sin rótula intermedia y con dos barras de igual longitud y sección transversal. Para representar esas condiciones se asignan a los parámetros que caracterizan el modelo los siguientes valores:

$$v_{EI_i} = 1; v_{\rho A_i} = 1; \forall i = 1, 2, 3; \text{ y } v_{l_2} = v_{l_3} = \frac{1}{2}; T_w \rightarrow \infty; T_u \rightarrow \infty; R_z \rightarrow \infty.$$

La [Tabla 1](#) presenta una comparación de resultados para dicho pórtico obtenidos con la solución exacta (la primera fila) y por el método de elementos finitos (segunda fila de resultados).

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
3,3912	4,4584	6,5330	7,5685	9,6270	10,649	11,674	13,789	15,950	16,807
3,3900	4,4266	6,5292	7,5608	9,6301	10,6311	11,5612	13,6587	15,9394	16,9702

Tabla 1: Primeros diez coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m \rightarrow \infty$ .

Como puede observarse en la tabla 1 los resultados obtenidos con el método analítico exacto y con elementos finitos prácticamente son coincidentes.

En la [Tabla 2](#) se muestra el caso de un pórtico articulado-articulado con una rótula elástica en el vértice que varía desde el caso de una articulación ideal a una unión rígida. Para ello en el modelado se asumen las características siguientes:

$$v_{EI_i} = 1; v_{\rho A_i} = 1; \forall i = 1, 2, 3; \text{ y } v_{l_2} \rightarrow 0; v_{l_3} = v_{l_1}; \text{ con } T_w \rightarrow \infty; T_u \rightarrow \infty; R_z = 0.$$

$R_m$	0	1	5	$\rightarrow \infty$	
$S_c$	0	$EI/L$	$5EI/L$	$\rightarrow \infty$	
$\lambda_1$	3,1408	3,1408	3,1408	3,1408	Presente trabajo
	3,1316	3,1316	3,1316	3,1316	MEF
	3,142	3,142	3,142	3,142	<a href="#">Galvão, (2010)</a>
$(\omega)$	$(8,915)$	$(8,915)$	$(8,915)$	$(8,915)$	
$\lambda_2$	3,1408	3,3684	3,6647	3,9245	Presente trabajo
	3,1316	3,5544	3,8037	3,9245	MEF
	3,142	3,367	3,665	3,927	<a href="#">Galvão, (2010)</a>
$(\omega)$	$(8,915)$	$(10,238)$	$(12,131)$	$(13,928)$	
$\lambda_3$	6,2766	6,2766	6,2766	6,2766	Presente trabajo
	6,2695	6,2695	6,2695	6,2695	MEF
	6,283	6,283	6,283	6,283	<a href="#">Galvão, (2010)</a>
$(\omega)$	$(35,665)$	$(35,665)$	$(35,665)$	$(35,665)$	

Tabla 2: Primeros tres coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Articulado - Articulado (A-A),  $R_m$  variable, con  $l_2 \rightarrow 0; l_3 = l_1$ .



Estos resultados se comparan con los de la literatura y con los obtenidos con el método de elementos finitos, según se observa en la [Tabla 2](#) el acuerdo entre grupos de resultados es excelente. [Galvão, \(2010\)](#) y colaboradores presentan las tres primeras frecuencias naturales de una viga en L para distintas conexiones semirrígidas en el vértice. Para valores bajos del parámetro  $R_m \rightarrow 0$  ( $S_c \rightarrow 0$ ) la unión se aproxima a una unión articulada y la primera y segunda frecuencias convergen al mismo valor, en este ejemplo la segunda frecuencia resulta ser la más afectada por la variación de rigidez del vínculo tal como se observa en la [Tabla 2](#).

Las Tablas siguientes presentan a una estructura de similares características en la que se varía la posición de la rótula elástica que vincula las vigas 2 y 3 y su rigidez mientras se mantienen las condiciones externas de vinculación del sistema.

La [Tabla 3](#) contiene los primeros cinco coeficientes de frecuencia para los casos E-A y A-A con una rótula semirrígida en el vértice.

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1408	3,9205	6,2767	7,0470	9,3963
300	3,1408	3,9179	6,2767	7,0425	9,3963
200	3,1408	3,9147	6,2767	7,0368	9,3963
100	3,1408	3,9053	6,2767	7,0204	9,3963
50	3,1408	3,8871	6,2767	6,9893	9,3963
10	3,1408	3,7677	6,2767	6,8078	9,3963
3	3,1408	3,5684	6,2767	6,5775	9,3963
1	3,1408	3,3684	6,2767	6,4155	9,3963
0	3,1408	3,1408	6,2767	6,2767	9,3963
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3909	4,4555	6,5319	7,5319	9,6261
300	3,3904	4,4532	6,5310	7,5598	9,6249
200	3,3899	4,4504	6,5299	7,5550	9,6234
100	3,3883	4,4420	6,5266	7,5412	9,6189
50	3,3850	4,4258	6,5202	7,5153	9,6102
10	3,3614	4,3232	6,4773	7,3714	9,5569
3	3,3108	4,1682	6,4057	7,2116	9,4848
1	3,2415	4,0361	6,3390	7,1148	9,4319
0	3,1411	3,9233	6,2770	7,0504	9,3907

Tabla 3: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales,  $R_m$  variable, con  $l_2 \rightarrow 0$ ;  $l_3=l_1$ .

En el caso A-A, tal como se observó en la [Tabla 2](#) las frecuencias primera y tercera no varían como tampoco lo hace la quinta. En este caso la segunda y cuarta frecuencia son las más afectadas por el cambio de rigidez del vínculo. En la otra condición de borde, cuando los extremos están empotrado-articulado, también la segunda frecuencia resulta ser la más afectada, aunque las cinco frecuencias disminuyen al disminuir la rigidez  $R_m$ .

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1400	3,9243	6,2736	7,0522	9,3940
300	3,1395	3,9243	6,2715	7,0511	9,3925
200	3,1389	3,9243	6,2689	7,0496	9,3906
100	3,1369	3,9243	6,2611	7,0455	9,3849
50	3,1331	3,9243	6,2458	7,0376	9,3738
10	3,1053	3,9240	6,1345	6,9910	9,2962
3	3,0440	3,9233	5,9087	6,9318	9,1600
1	2,9505	3,9225	5,6359	6,8904	9,0313
0	2,7747	3,9211	5,2993	6,8595	8,9124
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3910	4,4587	6,5288	7,5693	9,6235
300	3,3906	4,4586	6,5258	7,5690	9,6205
200	3,3902	4,4584	6,5222	7,5689	9,6168
100	3,3888	4,4579	6,5114	7,5682	9,6060
50	3,3861	4,4566	6,4904	7,5670	9,5851
10	3,3659	4,4476	6,3467	7,5595	9,4528
3	3,3209	4,4282	6,0871	7,5491	9,2579
1	3,2510	4,3994	5,8047	7,5406	9,0963
0	3,1181	4,3497	5,4883	7,5332	8,9571

Tabla 4: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m$  variable, con  $l_2=1/4 l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ .

La **Tabla 4** muestra los primeros cinco coeficientes de frecuencia para los mismos casos A-A y E-A con una rótula elástica ubicada en una posición intermedia:  $l_2=1/4 l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ . En el caso A-A, es ahora la segunda frecuencia la que prácticamente no cambia al variar de rigidez del vínculo. Para la otra condición de borde, E-A, también la segunda y la cuarta son las menos afectadas.

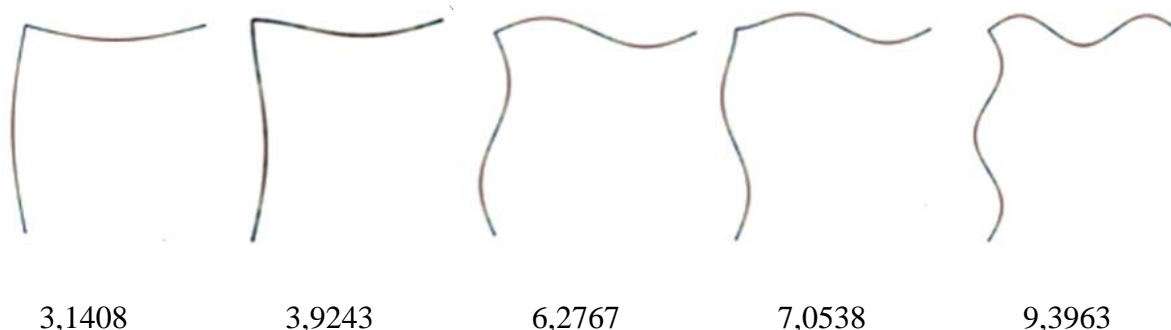


Figura 2: Formas modales de estructura A-A con  $R_m \rightarrow \infty$

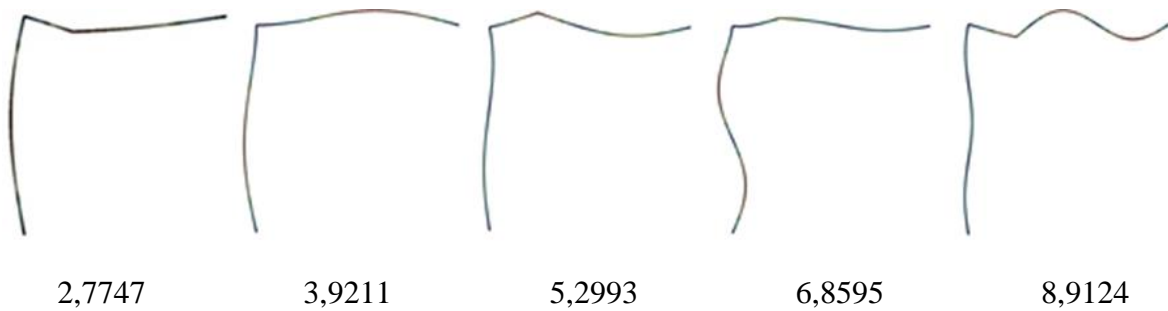


Figura 3: Formas modales de estructura A-A con una unión articulada,  $R_m \rightarrow 0$ , en  $l_2=1/4l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ .

Las formas modales del caso particular del sistema A-A, con  $R_m \rightarrow \infty$ , se muestran en la Figura 2 y en la Figura 3 el mismo caso con una articulación en  $l_2=1/4l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ .

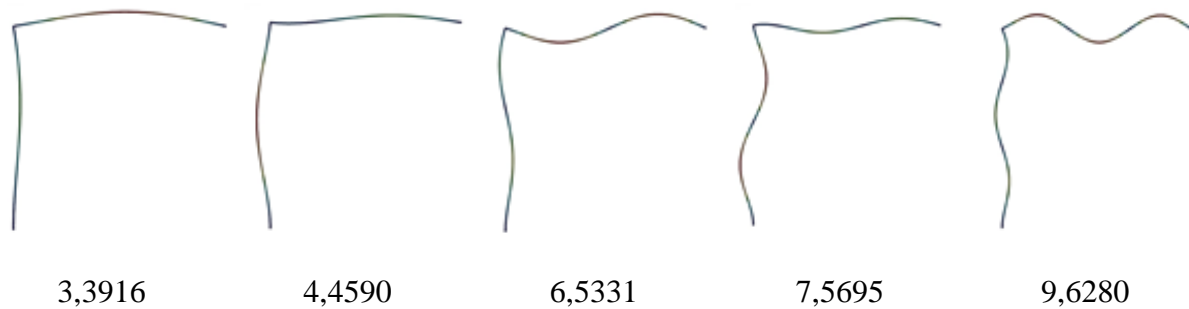


Figura 4: Formas modales de estructura E-A con  $R_m \rightarrow \infty$

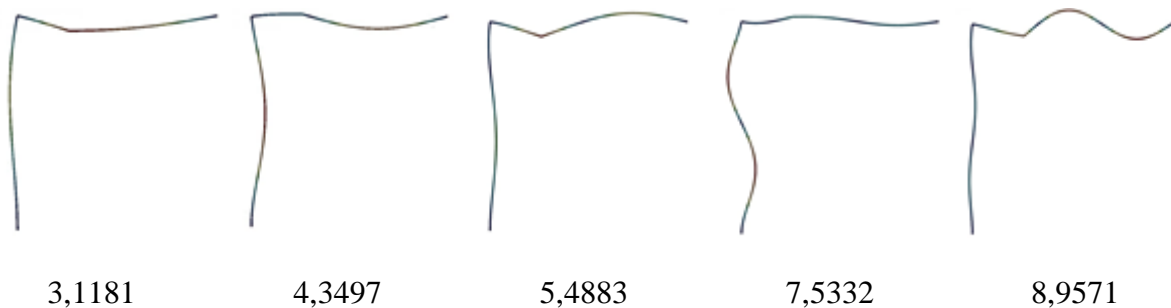


Figura 5: Formas modales de estructura E- A con una unión articulada,  $R_m \rightarrow 0$ , en  $l_2=1/4l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ .

Las formas modales del caso particular del sistema E-A, con  $R_m \rightarrow \infty$ , se muestran en la Figura 4 y en la Figura 5 el mismo caso de vinculación externa con una articulación intermedia ubicada en  $l_2=1/4l_1$ ;  $l_3=3/4 l_1$ .

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1396	3,9242	6,2744	7,0510	9,3930
300	3,1389	3,9240	6,2728	7,0490	9,3963
200	3,1379	3,9239	6,2708	7,0466	9,3963
100	3,1350	3,9234	6,2650	7,0395	9,3963
50	3,1293	3,9225	6,2535	7,0261	9,3963
10	3,0872	3,9163	6,1670	6,9473	9,3962
3	2,9935	3,9046	5,9836	6,8505	9,3961
1	2,8482	3,8905	5,7583	6,7875	9,3960
0	2,5667	3,8723	5,4874	6,7444	9,3959
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3903	4,4590	6,5290	7,5684	9,6279
300	3,3894	4,4590	6,5262	7,5676	9,6278
200	3,3884	4,4590	6,5228	7,5667	9,6278
100	3,3852	4,4590	6,5125	7,5639	9,6275
50	3,3789	4,4590	6,4925	7,5588	9,6270
10	3,3333	4,4589	6,3562	7,5289	9,6235
3	3,2343	4,4588	6,1127	7,4913	9,6176
1	3,0873	4,4585	5,8519	7,4639	9,6114
0	2,8212	4,4582	5,5608	7,4422	9,6046

Tabla 5: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m$  variable, con  $l_2=1/3 l_1$ ;  $l_3=2/3 l_1$ .

La [Tabla 5](#) muestra los primeros cinco coeficientes de frecuencia para los mismos casos A-A y E-A con una rótula elástica ubicada en otra posición intermedia y se observan situaciones muy similares a la de la Tabla anterior. En el caso A-A, es ahora la segunda frecuencia la que prácticamente no cambia al variar de rigidez del vínculo. Para la otra condición de borde, E-A, también la segunda y la cuarta son las menos afectadas.

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1392	3,9230	6,2767	7,0535	9,3914
300	3,1382	3,9221	6,2767	7,0532	9,3882
200	3,1369	3,9210	6,2767	7,0529	9,3842
100	3,1330	3,9178	6,2767	7,0518	9,3721
50	3,1253	3,9116	6,2767	7,0497	9,3481
10	3,0665	3,8708	6,2767	7,0349	9,1740
3	2,9258	3,8048	6,2767	7,0048	8,8568
1	2,6903	3,7441	6,2767	6,9654	8,5479
0	2,1732	3,6887	6,2767	6,9260	8,2520
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3892	4,4586	6,5331	7,5690	9,6206
300	3,3876	4,4583	6,5331	7,5687	9,6157
200	3,3855	4,4580	6,5331	7,5682	9,6097
100	3,3796	4,4569	6,5329	7,5670	9,5917
50	3,3678	4,4549	6,5326	7,5645	9,5571
10	3,2827	4,4416	6,5303	7,5461	9,3320
3	3,1011	4,4199	6,5258	7,5068	8,9809
1	2,8345	4,3988	6,5200	7,4511	8,6732
0	2,3200	4,3695	6,5093	7,3561	8,4001

Tabla 6: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m$  variable, con  $l_2=1/2 l_1$ ;  $l_3=1/2 l_1$ .

La [Tabla 6](#) presenta un modelo en que las vigas 2 y 3 tienen la misma longitud. En ambos casos A-A y E-A, la frecuencia fundamental resulta ser la más afectada por el cambio de rigidez del vínculo intermedio y se mantiene constante la tercera frecuencia.

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1396	3,9227	6,2743	7,0522	9,3963
300	3,1389	3,9216	6,2728	7,0510	9,3963
200	3,1379	3,9203	6,2708	7,0496	9,3963
100	3,1349	3,9163	6,2650	7,0454	9,3960
50	3,1290	3,9084	6,2537	7,0375	9,3963
10	3,0822	3,8547	6,1743	6,9908	9,3963
3	2,9546	3,7585	6,0272	6,9313	9,3963
1	2,6939	3,6627	5,8685	6,8888	9,3962
0	1,8790	3,5773	5,6969	6,8563	9,3962
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3895	4,4582	6,5297	7,5690	9,6280
300	3,3881	4,4576	6,5275	7,5687	9,6280
200	3,3864	4,4570	6,5246	7,5682	9,6279
100	3,3811	4,4549	6,5162	7,5670	9,6279
50	3,3708	4,4510	6,4999	7,5646	9,6277
10	3,2931	4,4240	6,3923	7,5505	9,6266
3	3,1101	4,3758	6,2130	7,5319	9,6247
1	2,7988	4,3242	6,0371	7,5174	9,6227
0	1,9811	4,2682	5,8595	7,5052	9,6203

Tabla 7: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m$  variable, con  $l_2=2/3 l_1$ ;  $l_3=1/3 l_1$ .

Las Tablas 7 y 8 presentan un modelo en que la viga 2 tiene mayor longitud que la viga 3. También en ellas la frecuencia fundamental resulta ser la más afectada por el cambio de rigidez del vínculo intermedio. En la Tabla 7 la quinta frecuencia permanece sin cambio para el caso A-A y varía ligeramente para el caso E-A. Este efecto se observa de manera atenuada en la Tabla 8, para el caso en que la longitud de la viga 3 es aún menor.

$R_m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
A-A					
$\rightarrow \infty$	3,1408	3,9243	6,2767	7,0538	9,3963
500	3,1400	3,9231	6,2735	7,0506	9,3938
300	3,1395	3,9223	6,2715	7,0484	9,3922
200	3,1389	3,9212	6,2688	7,0457	9,3902
100	3,1369	3,9182	6,2610	7,0378	9,3843
50	3,1329	3,9121	6,2453	7,0230	9,3731
10	3,1011	3,8680	6,1272	6,9385	9,3031
3	3,0084	3,7749	5,8795	6,8434	9,2031
1	2,7838	3,6577	5,5945	6,7872	9,1220
0	1,7642	3,5342	5,2896	6,7508	9,0527
E-A					
$\rightarrow \infty$	3,3916	4,4590	6,5331	7,5695	9,6280
500	3,3901	4,4583	6,5281	7,5681	9,6247
300	3,3892	4,4579	6,5247	7,5672	9,6225
200	3,3880	4,4573	6,5205	7,5661	9,6198
100	3,3843	4,4556	6,5080	7,5628	9,6119
50	3,3771	4,4522	6,4836	7,5566	9,5969
10	3,3210	4,4274	6,3167	7,5213	9,5071
3	3,1766	4,3747	6,0220	7,4788	9,3872
1	2,8895	4,3032	5,7245	7,4496	9,2949
0	1,8530	4,2059	5,4344	7,4273	9,2185

Tabla 8: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales, Empotrado-Articulado (E-A),  $R_m$  variable, con  $l_2=3/4 l_1$ ;  $l_3=1/4 l_1$ .

Todas las situaciones mostradas en las tablas precedentes se relacionan con las formas modales de las distintas estructuras elegidas como ejemplo. Para cada modo particular, una mayor variación angular en la unión de las vigas 2 y 3 produce una contribución más significativa del resorte a rotación de la rótula elástica a la rigidez total del sistema estructural. Expresado de otra forma si el modo analizado tiene poca o nula variación angular en la sección de ubicación de la rótula, el cambio en la rigidez del vínculo intermedio, no afectará la frecuencia de ese modo.

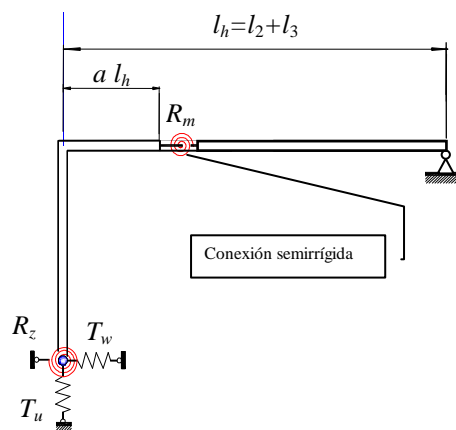


Figura 6: Posición de la conexión semirrígida ( $R_m$ ):  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ .

A continuación se presenta el caso de un pórtico empotrado elásticamente-articulado donde se ha considerado la presencia de la conexión semirrígida ( $R_m$ ) en distintas posiciones del tramo horizontal, **Figura 6**.

$$v_{EI_i} = 1; v_{\rho A_i} = 1; \forall i = 1, 2, 3 \text{ y } l_1 = \frac{2}{3}(l_2 + l_3).$$

El parámetro  $a$  indica la posición relativa de la unión entre vigas horizontales con respecto a la longitud total del tramo horizontal  $l_h$ :

$$a = \frac{l_2}{l_h}; \text{ con } l_h = l_2 + l_3$$

Las **Figuras 7 a 11** muestran el comportamiento de los coeficientes de frecuencia en función de la posición de la unión para cinco casos de condiciones de vínculo externo:

Caso 1:  $T_u = 100$ ;  $T_w = 100$ ;  $R_z = 3$ .

Caso 2:  $T_u = 50$ ;  $T_w = 50$ ;  $R_z = 3$ .

Caso 3:  $T_u = 10$ ;  $T_w = 10$ ;  $R_z = 3$ .

Caso 4:  $T_u = 5$ ;  $T_w = 5$ ;  $R_z = 3$ .

Caso 5:  $T_u = 5$ ;  $T_w = 5$ ;  $R_z = 0$ .

La **Figura 7** presenta los coeficientes de frecuencia fundamental de la estructura de la **Figura 6**, cuando  $a$  varía entre los extremos del tramo horizontal del pórtico, o sea asume valores del intervalo  $(0, 1)$ . La línea indicada con 1.1 corresponde a los valores de los coeficientes de frecuencia fundamentales del caso 1, análogamente, la indicada como 1.5 corresponde a las frecuencias fundamentales del caso 5. En particular en la **Figura 7**, es de hacer notar que para los casos 4 y 5, la variación de  $R_z = 3$  a  $R_z = 0$ , no afecta los valores de la frecuencia fundamental, y como se observa para ambas situaciones, las curvas resultan prácticamente coincidentes.

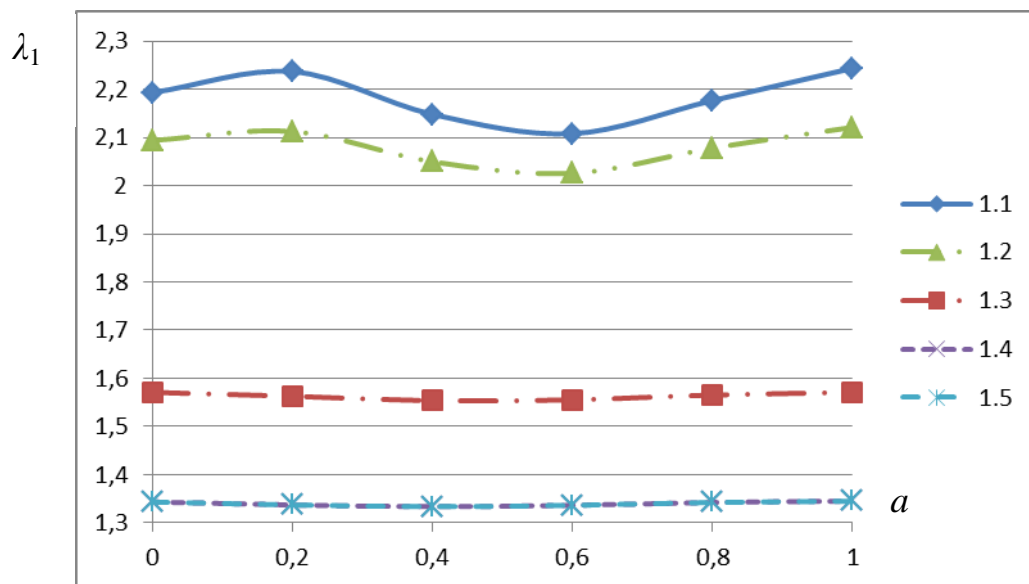


Figura 7: Coeficientes de frecuencia fundamental para un pórtico:  $l_1 = (l_2 + l_3) \frac{2}{3}$ ; con vínculos elásticos-Articulado y una conexión semirrígida en  $a$  con  $R_m = 3$ .

La siguiente **Figura 8** muestra los coeficientes de la segunda frecuencia natural del modelo para los mismos casos 1 a 5 indicados. Se utiliza la misma notación: la línea 2.1 corresponde a los coeficientes de la segunda frecuencia para el caso 1, y así sucesivamente.



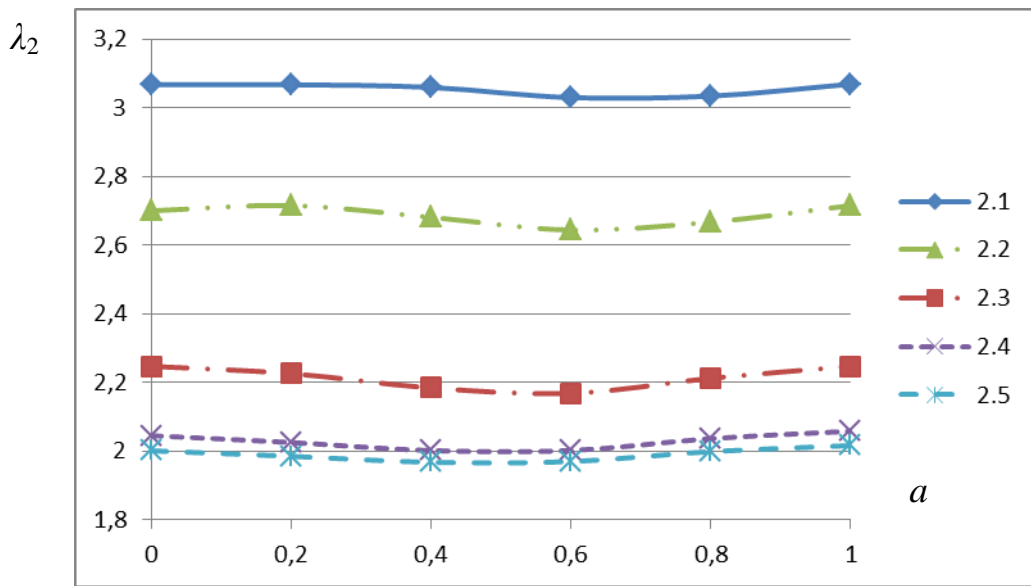


Figura 8: Coeficientes de la segunda frecuencia natural para un pórtico:  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ ; con vínculos elásticos-Articulado y una conexión semirrígida en  $a$  con  $R_m =3$ .

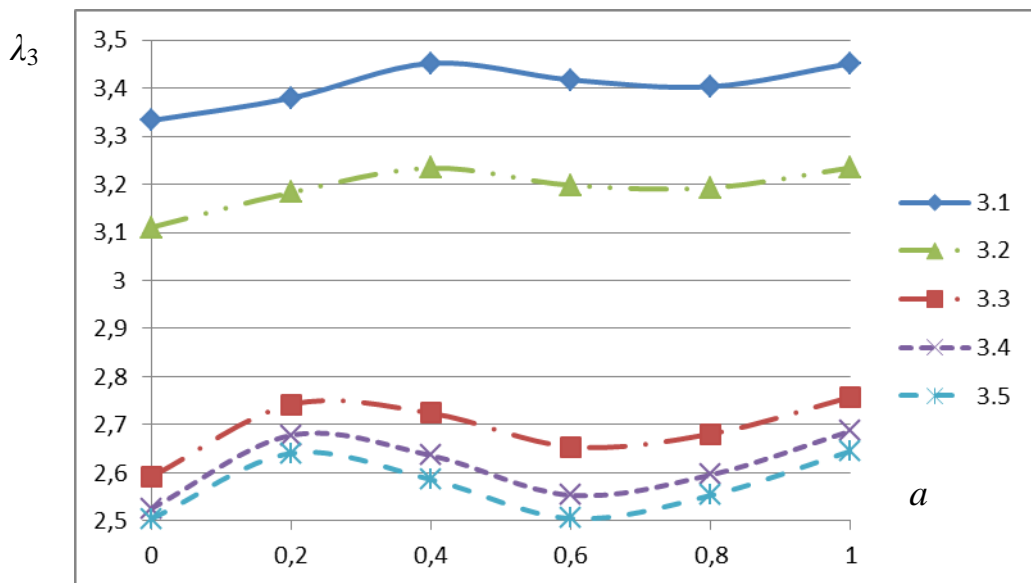


Figura 9: Coeficientes de la tercera frecuencia natural para un pórtico:  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ ; con vínculos elásticos-Articulado y una conexión semirrígida en  $a$  con  $R_m =3$ .

Las Figuras 7-11, muestran que en general la posición en que está ubicada la unión semirrígida entre las vigas del tramo horizontal, incide en el valor del coeficiente de frecuencia analizado.

Asimismo se observa que la disminución de rigidez en los vínculos externos del extremo, como era de esperarse, produce una disminución en todos los coeficientes de frecuencia.

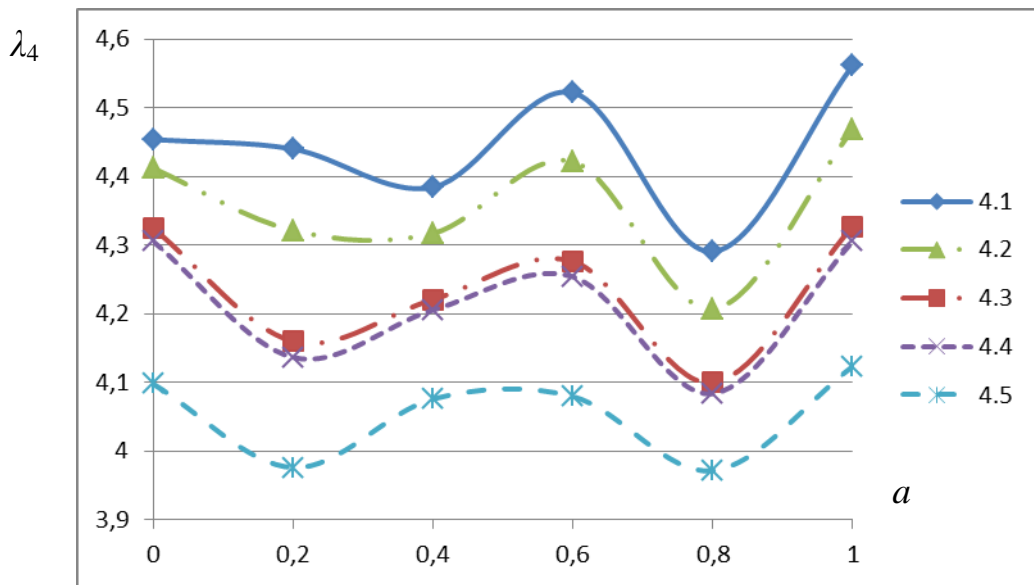


Figura 10: Coeficientes de la cuarta frecuencia natural para un pórtico:  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ ; con vínculos elásticos-Articulado y una conexión semirrígida en  $a$  con  $R_m=3$ .

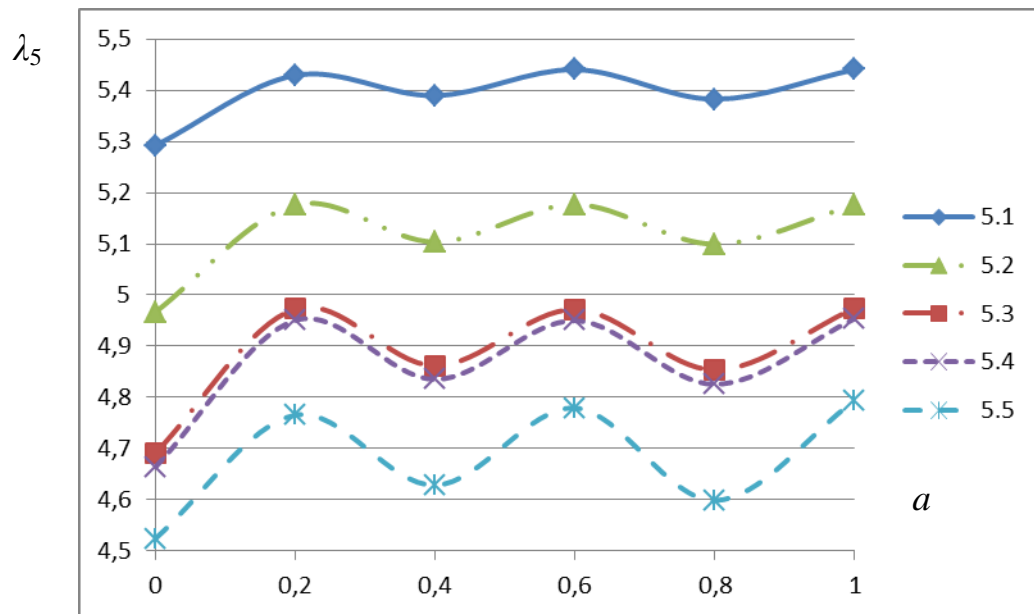


Figura 11: Coeficientes de la quinta frecuencia natural para un pórtico:  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ ; con vínculos elásticos-Articulado y una conexión semirrígida en  $a$  con  $R_m=3$ .

La **Tabla 9** contiene los coeficientes de frecuencia de ejemplos numéricos más generales, en los cuales el pórtico está elásticamente vinculado –articulado, y los parámetros que definen las características físico-geométricas de cada viga se adoptaron diferentes entre sí.

$T_u = 100;$		$T_w = 100;$		$R_z = 3$		
$v_{EI_2} = v_{\rho A_2}$	$v_{EI_3} = v_{\rho A_3}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0,25	1	2,2139	3,1417	3,2819	4,3412	5,2897
0,50	0,75	2,2852	3,1127	3,3350	3,3350	5,3547
0,75	0,50	2,3603	3,0843	3,3618	4,5393	5,4046
1	0,25	2,4809	3,0597	3,3692	4,5922	5,4659
$T_u = 5;$		$T_w = 5;$		$R_z = 3$		
$v_{EI_2} = v_{\rho A_2}$	$v_{EI_3} = v_{\rho A_3}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0,25	1	1,3763	2,0002	2,5392	4,1448	4,6827
0,50	0,75	1,3831	2,0109	2,6285	4,1974	4,8421
0,75	0,50	1,3868	2,0066	2,7066	4,2105	4,9567
1	0,25	1,3875	1,9893	2,8297	4,1884	5,0853

Tabla 9: Primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural de un pórtico:  $l_1=(l_2+l_3) 2/3$ , con vínculos elásticos -articulado y una conexión semirrígida con  $R_m = 3$  en  $a=0,20$ .

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan resultados que evidencian el comportamiento dinámico de vigas en L con vínculos elásticos externos e intermedios. Se analiza la influencia de los mismos en cuanto a su posición y magnitud. Los valores muestran muy buen acuerdo con casos particulares calculados a través de un modelado con elementos finitos, así como con los disponibles en la literatura técnica. Por ello, el modelo propuesto, resuelto mediante la técnica del cálculo variacional y el clásico método de separación de variables, resulta ser una herramienta eficaz que permite analizar de manera unificada un gran número de casos particulares de interés tecnológico.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, (UNS), con el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, (CONICET).

#### REFERENCIAS

- Albarracín, C. M., Grossi, R. O., Vibrations of elastically restrained frames, *Journal of Sound and Vibration*, 285: 467-476, 2005.
- ALGOR software, Versión 23.01, 2009.
- Blevins, R, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger Melbourne, FL, 2001.
- Chang, T.P., Lin, G.L. and Chang, E., Vibrations analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillaton, *International Journal of Solid and Structures*, 43:6398-6412, 2006.

- Chen, S-H., Chou, J-H., Linear Structure Vibration Control Using MFT and Robust Kalman-Filter-Based OMFC Method, *Journal of Mechanics*, 15(01):1-9, 1999.
- Cheng, L., Hatam, M., Vibrational analysis of point-coupled structures, *Thin-Walled Structures*, 36:197–212, 2000.
- Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of structures*, Computers and Structures, 3rd. Ed., Inc. Berkeley, 2004.
- Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., Nonlinear dynamic behavior and instability of slender frames with semi-rigid connections, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52:1547–1562, 2010.
- Grossi, R. O., Quintana, M. V., The transitions in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Karnovsky, I.A. and Lebed, O.I., *Free vibrations of beam and frames*, McGraw Hill, New York, 2004.
- Lee, Y.Y., Wang, C.M. and Kitipornchai, S., Vibration of Timoshenko beams with internal hinge, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 0733-9399/293-30, 2003.
- Moghadam, A.A.A., Torabi, K., Moavenian, M., Davoodi, R., Dynamic modeling and robust control of an L-shaped microrobot based on fast trilayer polypyrrole-bending actuators, *Intelligent Material Systems and Structures*, 24:484-498 2013.
- Quintana, V., Raffo, J. L., Grossi, R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beam with an internal hinge, *Mecánica Computacional*, XXIX: 2499-2516, 2010.
- Ratazzi, R. A., Grossi, R. O., Bambill, D. V., Vibraciones de una estructura aporticada con una rótula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación, *Mecánica Computacional*, XXX:2499-2516, 2011.
- Ratazzi, R. A., Bambill, D. V., Rossit, C.A., Vibraciones de pórticos con conexiones intermedias elásticas, *Mecánica Computacional*, XXXI:2611-2627, 2012.
- Timoshenko, S., Young, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons 5th. Ed., New York, 1990.
- Wang, C.Y. and Wang, C.M., Vibrations of a beam with an internal hinge, *Internacional Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1:163-167, 2001.
- Warburton, G.B., *The dynamical behaviour of structures*, (2<sup>nd</sup>, edition), PergamonPress Ltd., Oxford.1976.
- Warminski, J., Cartmell, M.P., Bochenski, M., Ivanov, Ivelin, Analytical and experimental investigations of an autoparametric beam structure, *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):486-508, 2008.
- Wolfram MATHEMATICA 9 software, Copyright 1988-2012.