

ANÁLISIS DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN LA INTERFACE NEUMÁTICO – CARRETERA. MODELOS DE SIMULACIÓN DE ACELERACIÓN.

Gustavo R. Di Rado^a, Daniel S. Presta García^b, Gustavo H. Devincenzi^c

^a*Departamento de Vías de Comunicación, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727,
3500 Resistencia, Chaco, Argentina, gdirado@ing.unne.edu.ar, <http://ing.unne.edu.ar>*

^b*Departamento de Expressão Gráfica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo
Aranha 99 sala 408/5, Porto Alegre, RS - Brasil, daniel.garcia@ufrgs.br*

^c*Departamento de Computación, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, 3500
Resistencia, Chaco, Argentina, gdevin@ing.unne.edu.ar*

Palabras Clave: Fuerzas tractoras, Simulación, Dinámica vehicular

Resumen. El neumático es el principal elemento de interacción entre el vehículo y la carretera. En su interface se generan fuerzas de acción y reacción, que son las responsables de dar tracción, frenado y direccionamiento al medio de transporte en cuestión.

El estudio y análisis de la mecánica y los principios físicos involucrados en el funcionamiento de un neumático es de fundamental importancia para el entendimiento de la performance y características de movimiento de un vehículo terrestre.

En el área de la seguridad vial, el desgaste y mal mantenimiento de este componente principal, es también el causante de muchos accidentes fatales que pueden ser evitados a través del conocimiento suficiente acerca de su accionar.

En este trabajo se presenta un análisis de las fuerzas que actúan sobre el neumático y los modelos matemáticos diversos que permiten realizar una simulación computacional del fenómeno.

El objetivo principal del proyecto es el diseño de un simulador de conducción de automóviles para su utilización en la verificación de la consistencia geométrica de carreteras.

1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del ingeniero de tránsito es la provisión de un sistema seguro para el tráfico en las carreteras. Esta es una tarea con diversas áreas de dificultad. En los últimos años las muertes en accidentes de tránsito en la República Argentina han oscilado entre 7.000 y 8.000 personas por año, siendo de aproximadamente 7700 en 2010, con un promedio del orden de 21 personas por día.

Esto se ha transformado en una problemática mundial. En los últimos años las muertes en las carreteras de EE.UU. han oscilado entre 40.000 y 43.000 por año, cifra menor que los máximos experimentados en la década del '70, cuando se llegó a más de 55.000 accidentes de tráfico por año. Esta mejora se debió mayormente a la aplicación de políticas punitivas, de prevención y de educación vial, aunque aún los valores actuales son extremadamente altos. Más estadounidenses han muerto en las carreteras de EE.UU. que en todas las guerras en las que la nación ha participado, incluyendo la Guerra Civil (Roess R., Prassas E., Mc Shane W, 2004).

La estructura vial se compone de tres elementos fundamentales: El Conductor, El vehículo y La Vía.

Estas variables constituyen las bases sobre las cuales se funda la seguridad vial, y como ninguna de ellas puede ser considerada de forma individual, su interacción debe ser revisada exhaustivamente para asegurar resultados con un grado de eficiencia aceptable.

Otra instancia a tener en cuenta es la condición del medio ambiente (lluvia, niebla, noche, carpeta de rodamiento resbaladiza, etc.) la cuál cumple un rol muy importante en la disminución de la capacidad de conducción de vehículos.

La Ingeniería de tráfico sería mucho más sencilla si los distintos componentes del sistema de tránsito tuvieran características uniformes. Los dispositivos de control de tráfico serían fácilmente diseñados si todos los conductores reaccionaran a ellos en la misma forma con lo que finalmente la seguridad podría lograrse también más fácilmente.

Lo cierto es que hay una diversidad de elementos importantes a considerar y difíciles de interrelacionar a través de un modelo de representación confiable.

En los vehículos terrestres, las fuerzas principales de control, tracción y frenado son generadas a nivel de la interface rueda-camino en la superficie de contacto, así como también el confort de marcha y el consumo de combustible.

El estudio y análisis del sistema dinámico generado, es de vital importancia para simular de forma precisa el comportamiento vehicular, a través del ajuste de diferentes parámetros en las ecuaciones involucradas.

Dos tipos de circunstancias pueden ser abordadas con interés para la modelación matemática. Una es la mecánica de los neumáticos circulando en superficies rígidas (hormigón, asfalto, etc), y la otra es la mecánica de neumáticos circulando en superficies deformables como por ejemplo arena, ripio, etc. En este artículo se abordarán ambas situaciones, se realizarán pruebas de aceleración en tramos rectos especialmente modelados al efecto, y se obtendrán las curvas de performance en tiempo real, para evaluar los diferentes terrenos.

2 MECÁNICA DE UN NEUMÁTICO

2.1 Estructura:

La estructura rígida de una rueda está rodeada por un elemento flexible con forma de toroide con aire comprimido en su interior. La parte más importante de un neumático es la carcasa que está compuesta por hilos entrelazados con módulo de elasticidad elevado, insertas en un compuesto de caucho con un módulo de elasticidad bajo. Las hilos son fabricados de material sintético o compuestos metálicos, y están ancladas en el talón, que es fabricado de un cable de acero de alta resistencia revestido con caucho, que se asienta sobre la llanta y transfiere las fuerzas que genera el vehículo (Fig 2.1.1).

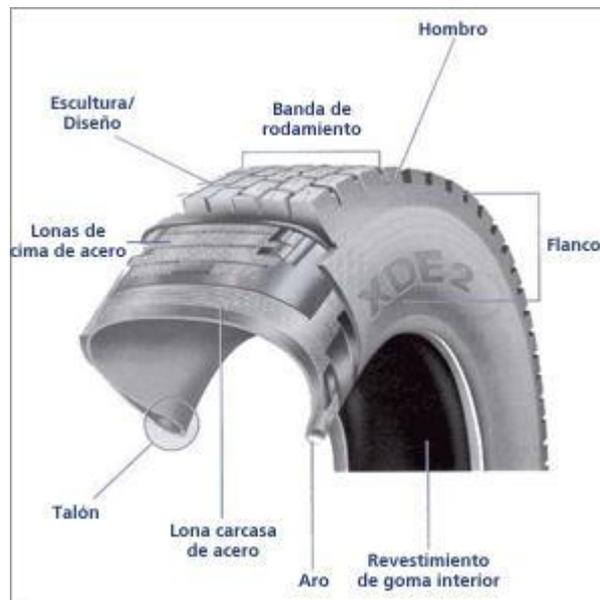


Figura 2.1.1: Estructura de un neumático.

La resistencia del neumático es frecuentemente descrita por el número de carcassas que posee. Algunos automóviles tienen dos carcassas, mientras los aviones comerciales llegan a tener 30 o más.

Las capas internas están fabricadas de diferentes tejidos de poliéster. La capa superior ayuda a sostener la estructura en neumáticos aptos para circular a altas velocidades. La parte interna de la carcassa está compuesta por una fina capa de caucho butilo con alta impermeabilidad al aire para evitar pérdida de presión en neumáticos sin cámara.

Los cinturones son capas de acero, nylon, poliéster, kevlar, etc. revestidas de caucho extendidas alrededor del neumático por debajo de la banda de rodadura. Están diseñados para reforzar la carcassa y mantener la banda de rodadura contra el camino para que haga el mejor contacto posible. Los cinturones evitan la torsión y resisten el daño por impactos y penetraciones.

El flanco provee estabilidad lateral y protege la carcassa ayudando a prevenir el escape de aire.

La banda de rodadura es la porción del neumático que toma contacto con el camino, está confeccionada de una mezcla de caucho sintético y natural y posee un patrón o dibujo acorde al propósito con que es fabricada la cubierta. Es de mayor importancia en la estructura general del neumático, porque de su compuesto depende la adherencia, gran parte del control

y estabilidad en las curvas, la tracción y la posibilidad de que el vehículo sea incidido por el fenómeno de "aquaplaning" en carreteras afectadas por lluvias intensas.

Estructuralmente, existen dos tipos de neumáticos: diagonales y radiales.

En las cubiertas radiales los hilos de la carcasa son colocados perpendiculares a la banda de rodadura. Con esto se obtiene mayor flexibilidad radial, reducción de la resistencia a la rodadura, y mejora las capacidades en curvas.

En las cubiertas diagonales, los hilos se colocan en capas sucesivas a 30° o 40° unos de otros.

La diferencia más importante en la dinámica de las cubiertas diagonales y radiales, es su diferente grado de adherencia al camino cuando son afectadas de fuerzas laterales. En las primeras, la disposición de los hilos de la carcasa hace que el neumático trabaje como un todo sin independencia entre la deformación del flanco y de la banda de rodadura, esto provoca que la huella de contacto disminuya y que la tracción decrezca (Fig. 2.1.2 (b)).

En las cubiertas radiales, la disposición de los hilos, da independencia de acción a la deformación del flanco y la banda de rodadura, logrando mantener la huella de contacto y la adherencia (Fig. 2.1.2 (a))

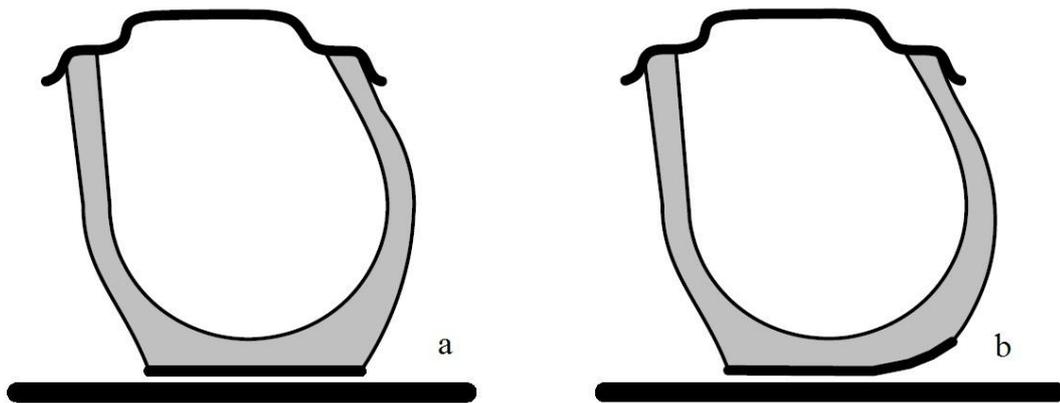


Figura 2.1.2: a) Neumático Radial – b) Neumático Diagonal.

En el Mercosur los neumáticos son identificados con una serie de cuatro números y dos letras, como por ejemplo 215/65R16 98H, lo que implica:

215: Ancho de la cubierta descargada de flanco a flanco en mm (An).

65: Indica que la altura del flanco es el 65% del ancho (Pa).

R: Cubierta radial.

16: Diámetro de la llanta en pulgadas (Dc)

98: Código que indica el peso máximo que soporta el neumático, en este caso 750 kg.

H: Velocidad máxima a la cuál puede llegar el vehículo por 10 minutos antes de producirse daños irreversibles, en este caso 210 kph.

De esta manera se puede obtener el radio geométrico en mm del neumático sin inconvenientes Ec. (1).

$$r_g = \frac{An \cdot \frac{Pa}{100} \cdot 2 + Dc \cdot 25.4}{2} \quad (1)$$

2.2 Fuerzas y Momentos:

Para describir las características de un neumático y las fuerzas y momentos que se generan a partir de su acción, debemos definir un sistema de ejes de referencia:

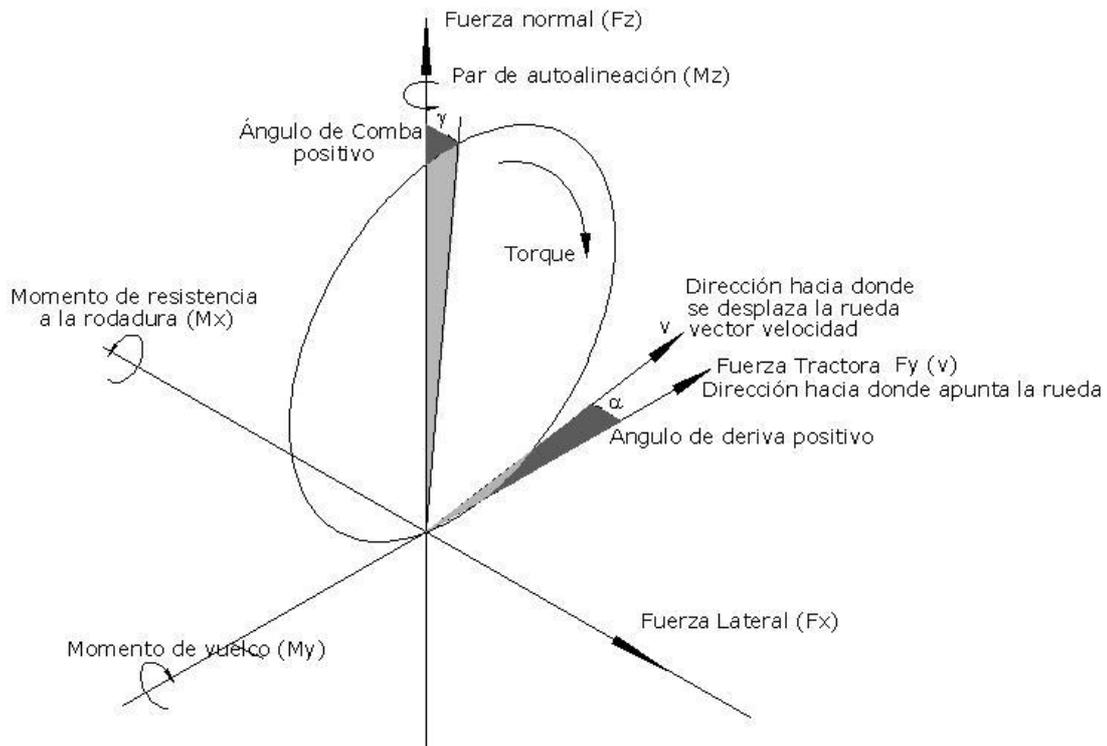


Figura 2.2.1: Sistema de Coordenadas del Neumático.

El origen de coordenadas está en el centro de la huella de contacto.

El sistema utilizado es levemente diferente del que recomienda la SAE (Society of Automotive Engineers), ya que hemos considerado que la dirección hacia donde apunta el neumático es el eje "y" y que la fuerza lateral actúa sobre el eje "x", esto surgió del modelado tridimensional del escenario y entorno, y se considera un cambio que no altera la simulación.

Como vemos en la Fig. 2.2.1, existen tres fuerzas y tres momentos que rigen el movimiento de un neumático:

Fuerza tractora: es la resultante de las fuerzas que impulsan al vehículo, si esta es > 0 o que frenan al vehículo si es < 0 .

Fuerza lateral: es perpendicular a la anterior y producida principalmente por la aceleración lateral en curvas. Es positiva hacia la derecha y negativa a la izquierda.

Fuerza normal: es perpendicular a las dos anteriores, y representa la reacción del peso del vehículo que le corresponde a cada rueda. Positiva hacia arriba.

Momento de vuelco: es el momento ejercido por el camino sobre el neumático.

Momento de resistencia a la rodadura: es el momento que tiende a frenar el movimiento de la rueda debido principalmente a la deformación del neumático.

Par de auto alineación: es el momento que tiende a enderezar la rueda luego de efectuar una maniobra de giro.

Tenemos dos ángulos importantes asociados con el giro de la rueda: el ángulo de comba,

que es dado mecánicamente al vehículo para proveerle fuerza de sustentación lateral, y el ángulo de deriva que es el ángulo entre el vector velocidad y la verdadera trayectoria, se produce debido a la deformación del neumático principalmente en curvas (se explicará más adelante en este artículo).

2.3 Rigidez de un neumático:

La deformación de un neumático en respuesta a las fuerzas aplicadas desde el camino en cualquier dirección es una parte principal de la dinámica de vehículos, y el cálculo de su rigidez está basado en diferentes experimentos que dependen de sus propiedades mecánicas y las condiciones del medio ambiente.

La rigidez de un neumático está firmemente ligada a la dirección que se considera para su estudio, esto es, las cargas verticales que producen una tensión normal, o las cargas horizontales ya sean longitudinales o transversales que producen tensiones tangenciales en la huella de contacto.

La rigidez de las cubiertas radiales, por ejemplo está dividida en dos partes. Por un lado el flanco tiene una rigidez pequeña por la disposición de sus hilos en la carcasa, y por otro lado, la banda de rodamiento tiene una rigidez grande por la existencia de los cinturones, como se explicó en el apartado anterior y Fig. 2.1.2.

Si consideramos una rueda cargada verticalmente sobre una superficie rígida y plana, veremos que como reacción a la carga, el neumático se deforma y genera una superficie de presión en la huella de contacto (Fig. 2.3.1).

La fuerza de reacción puede ser considerada como una función de la deformación de la cubierta de caucho:

$$F_z = f(\Delta_z) \quad (2)$$

Si se construye una curva experimental entre estas dos variables, obtendremos el gráfico de la Fig. 2.3.2 (Jazar R., 2008) en la que podemos observar que la relación en este caso es casi lineal, por lo que podemos expresar en ese rango:

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial(\Delta_z)} \cdot \Delta_z \quad (3)$$



Figura 2.3.1: Neumático cargado verticalmente.

En donde $\frac{\partial f}{\partial(\Delta_z)}$ es la pendiente de la curva en el punto inicial, y se la denomina coeficiente de rigidez k_z .

Por lo tanto, la deformación normal Δ_z , permanece proporcional a la fuerza vertical F_z .

$$F_z = k_z \cdot \Delta_z \quad (4)$$

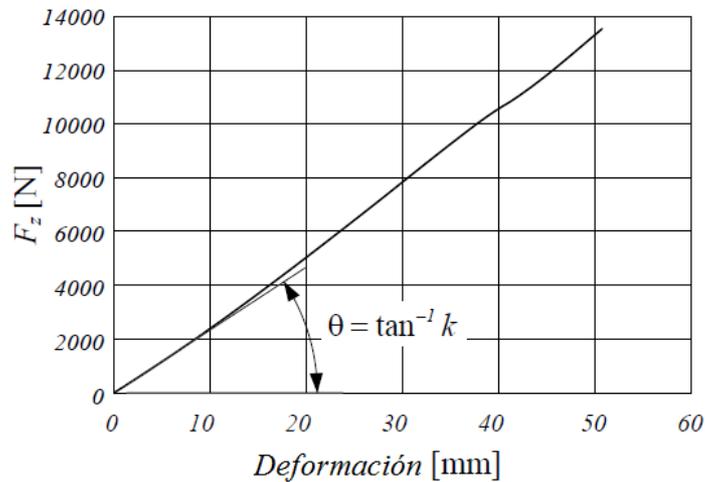


Figura 2.3.2: Gráfico de relación fuerza vertical – deformación. (Jazar R., 2008)

La curva de rigidez puede ser influenciada por muchos parámetros, siendo el principal la presión de inflado.

La distribución de presiones en la huella de contacto es representada en la Fig. 2.3.3, en donde podemos ver un gráfico tridimensional y dos cortes, uno transversal y otro longitudinal.

En el centro del corte longitudinal (plano Z-X), el valor de la presión σ_z está cercano a la presión de inflado, y en los bordes es mayor.

Si la rueda está detenida, la distribución es simétrica con respecto al eje Z en el plano Z-X, pero si ésta gira, la distribución se mueve hacia el sentido del giro, lo que da origen a la fuerza de resistencia a la rodadura, que se explicará más adelante en este artículo.

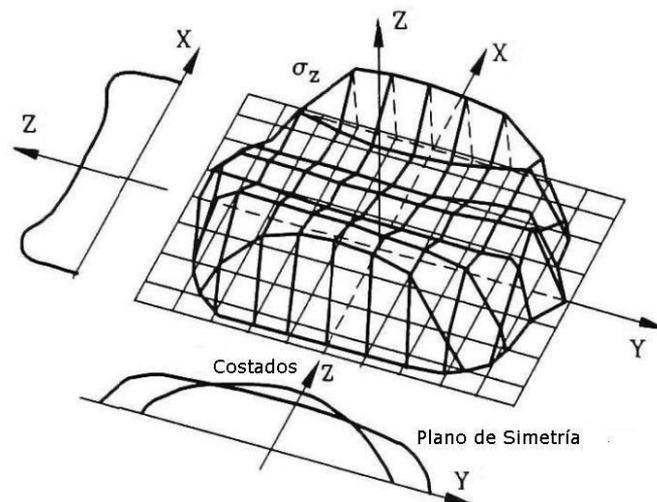


Figura 2.3.3: Distribución de presiones en la huella de contacto. (Genta G., 2006)

De la misma manera se pueden analizar las fuerzas horizontales o tangenciales, longitudinales y transversales, realizando ensayos experimentales y construyendo las curvas

que las relacionan con sus respectivas deformaciones, cuando el neumático está en operación. Es así que se presenta el diagrama de Fig. 2.3.4 (Jazar R., 2008), en donde se observa que en todos los casos estudiados, la curva presenta una linealidad hasta cierto valor de deformación, por lo que se puede proceder analíticamente calculando las derivadas parciales en el punto de origen como lo hicimos anteriormente, y determinando las rigideces en los sentidos que corresponden.

Las fuerzas longitudinal y lateral están limitadas por la fuerza de sustentación al deslizamiento, considerando la carga vertical del neumático.

Como una aproximación se puede considerar entonces, que las fuerzas generadas en esta zona, pueden ser calculadas como una función lineal a las deformaciones Δ medidas, dentro de un cierto rango.

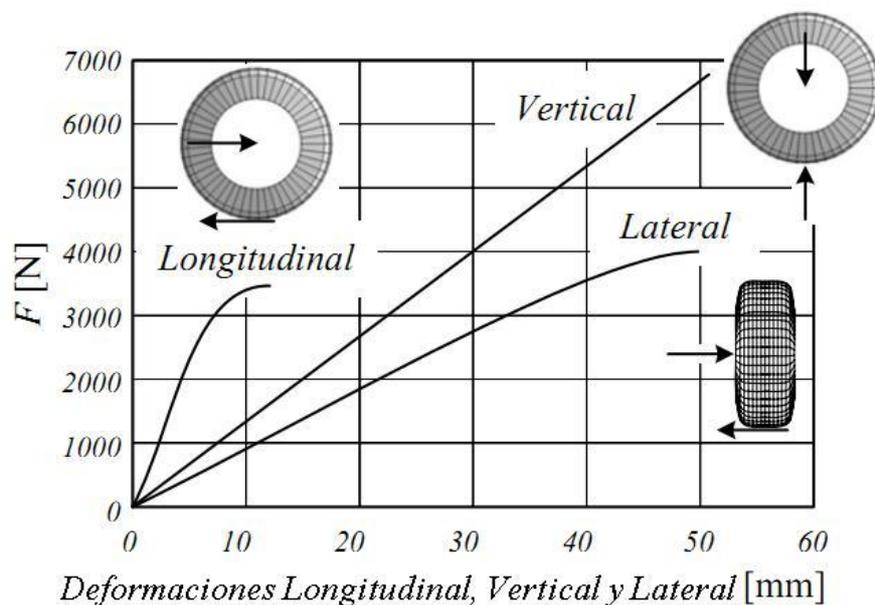


Figura 2.3.4: Deformaciones del neumático en las diferentes direcciones. (Jazar R., 2008)

Es así que podemos expresar las siguientes ecuaciones:

$$F_x = k_x \cdot \Delta_x \quad (5)$$

$$F_y = k_y \cdot \Delta_y \quad (6)$$

En las cuales k_x y k_y , son los coeficientes de rigidez en sentido X e Y.

En el presente trabajo, y como principal objetivo del proyecto general hasta el momento en que se escribe este artículo, se plantea la obtención de una herramienta de simulación que permita ser utilizada para la verificación de las condiciones geométricas de un trayecto de ruta, obteniendo perfiles de velocidades, aceleraciones, desplazamientos, pendientes etc. en tramos rectos y curvos, y a partir de ellos, verificar si la velocidad operacional está dentro del entorno de valores de la velocidad directriz del proyecto con el fin de clasificarlo mediante un índice denominado de consistencia geométrica, que determina la mayor o menor seguridad y confort para el usuario en el manejo del vehículo.

Es por esto que consideramos utilizar las ecuaciones explicadas, dentro de la linealidad, ya que el ritmo de conducción del vehículo virtual que se presenta en la simulación, no debe

exceder condiciones límites de deslizamiento o deformación excesiva del neumático (conducción en competencia), por lo que se estima que la simplificación es válida.

Debemos destacar en este apartado que el comportamiento de un neumático de caucho en carga y descarga no es el mismo, esto es, la curva de carga del neumático, no coincide con la curva de descarga (Fig. 2.3.5) (Jazar R. 2008).

Como vemos en la gráfica, la curva de descarga se desarrolla levemente por debajo de la curva de carga. Esto se debe al efecto denominado "histéresis", según el cual, la energía de deformación es mayor que la energía de recupero, y el espacio que resta entre las curvas es energía disipada.

En el caso de la cubierta de un vehículo, a medida que rota bajo el peso del rodado, se producen diversos procesos de carga y descarga que se transforman en energía disipada en forma de calor.

El efecto de histéresis se da porque cuando el neumático gira sobre las superficies irregulares de una pista, en la zona delantera de la huella de contacto se produce la carga y deformación del caucho, que luego no es recuperado al mismo ritmo en la zona trasera, por lo que no puede empujar la huella contra el camino como lo hace en la zona delantera. La diferencia de presiones entre ambas zonas provoca la fuerza de resistencia a la rodadura.

La histéresis es inversamente proporcional a la distancia de frenado, esto es, cuando mayor es la histéresis, menor es la distancia de frenado, por lo tanto se desgasta más rápido y tiene menor vida útil, como acontece por ejemplo en las cubiertas de los autos de carrera, que poseen mayor histéresis para controlar mejor la tracción y la fricción.

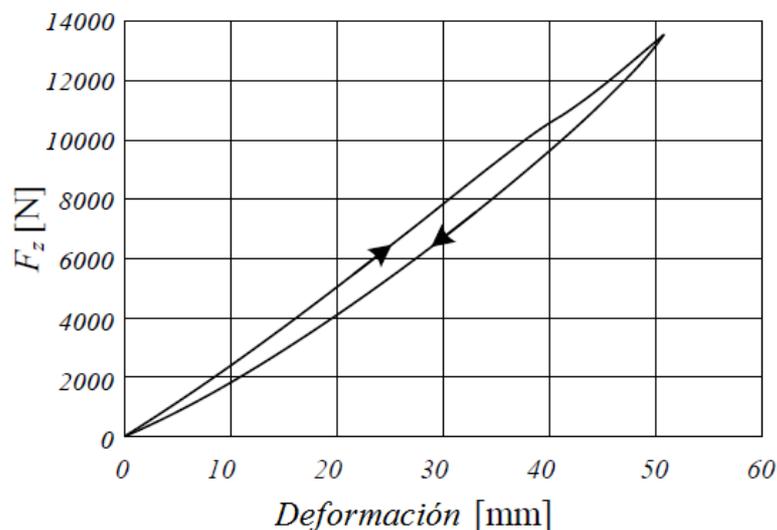


Figura 2.3.5: Efecto de Histéresis en la carga y descarga de un neumático. (Jazar R. 2008)

2.4 Radio Efectivo:

El radio efectivo o radio dinámico de un neumático se debe a su condición de estar fabricado con un material elasto-plástico, es decir deformable bajo carga y en operación. Si consideramos una rueda de material rígido, la relación entre la velocidad angular de la rueda ω_R y la velocidad lineal de la misma v_R , es simplemente:

$$v_R = \omega_R \cdot r_g \quad (7)$$

En donde r_g , es el radio geométrico.

Sin embargo, para una rueda de caucho, debemos definir el radio efectivo, como la relación existente entre la velocidad angular y la velocidad lineal, pero medida efectivamente en campo.

Esto se debe a que si seguimos una partícula del perímetro de la rueda, veremos que su velocidad está lejos de ser constante, ya que entre la rueda y la superficie no hay un punto, sino un área de contacto y una deformación (Fig. 2.4.1).

Por lo tanto, en las proximidades de esa área de contacto, en la "zona a", la partícula se frena debido a la compresión de la banda de rodamiento. En la "zona b" o de contacto, hay un deslizamiento muy limitado y la velocidad de la partícula coincide con la velocidad en el centro de la rueda, luego en la "zona c", la banda de rodamiento sufre un estiramiento, la partícula se acelera y vuelve a retomar la velocidad de giro libre, esto es, la regida por la Ec. (7).

Como consecuencia de esto, la velocidad de giro de un neumático de caucho es menor que la velocidad de giro de una rueda rígida con el mismo radio cargado r_c , y la misma velocidad lineal, ya que el radio efectivo, será menor que el radio geométrico, pero mayor que el radio cargado: $r_c < r_e < r_g$.

El centro de rotación de la rueda descansa un poco por debajo de la superficie de rodamiento, como se observa en la Fig. 2.4.1, en el punto A.

Como estimación práctica, el radio efectivo se puede calcular sustituyendo el arco de la rueda libre, con una recta en la huella de contacto y haciendo (Fig. 2.4.1):

$$r_g - r_c = r_g \cdot (1 - \cos(\phi)) \quad (8)$$

$$r_c = r_g \cdot \cos(\phi) \quad (9)$$

$$a = r_g \cdot \cos(\phi) \quad (10)$$

Si el movimiento del neumático lo comparamos con el de un disco rígido con radio r_e , el neumático se moverá una distancia $r_e \cdot \phi$ para una rotación angular ϕ , en un instante del tiempo será:

$$a = r_g \cdot \text{sen}(\phi) = r_e \cdot \phi \quad (11)$$

Por lo que finalmente:

$$r_e = \frac{r_g \cdot \text{sen}(\phi)}{\phi} \quad (12)$$

Como una aproximación, podemos decir que el radio efectivo de un neumático radial es:

$$r_e \approx 0.98 \cdot r_g \quad (13)$$

Y para un neumático diagonal:

$$r_e \approx 0.96 \cdot r_g \quad (14)$$

Esto es porque el neumático radial tiene menor rigidez radial que el diagonal.

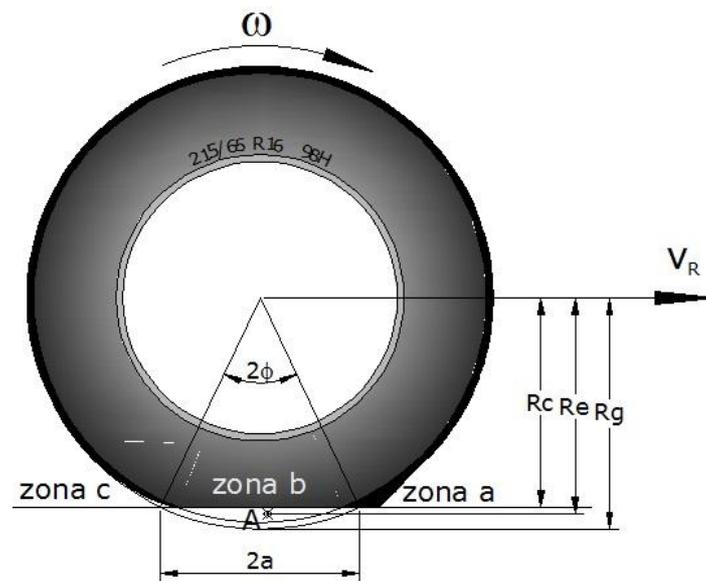


Figura 2.4.1: Radio efectivo en giro libre.

El radio efectivo depende de varios factores como por ejemplo, carga sobre la rueda, presión de inflado, desgaste de la cubierta, etc. Un elemento para analizar en detalle es la velocidad de giro de la rueda, ya que esto provoca su expansión debido a las fuerzas centrífugas, aumentando los respectivos radios geométrico, efectivo y cargado. Los neumáticos diagonales, expanden más que los radiales, debido a que estos últimos tienen una banda de rodamiento mucho más rígida que los primeros.

En el presente trabajo, se ha tomado el valor de la Ec. (13), ya que los vehículos actuales vienen equipados con neumáticos radiales.

2.5 Fuerzas longitudinales (Tracción y Frenado):

Para acelerar o frenar un vehículo, se deben generar fuerzas longitudinales entre el neumático y la carretera. Estas fuerzas provocan deformaciones debido al material elasto-plástico con que está fabricado el neumático, que hacen que se deban tener consideraciones especiales en el tratamiento del giro, y que lo hagan sensiblemente diferente a una rueda de material rígido.

Cuando un torque de tracción (M_t) es aplicado a la rueda, una fuerza de tracción se genera en la huella de contacto, la parte delantera del neumático marcado como "zona a" en la Fig. 2.5.1, se comprime (aún más que la rueda en giro libre explicado anteriormente), y en la "zona c", la banda de rodamiento se estira, sin embargo luego de cierto rango, en la "zona b" comenzará a producirse un deslizamiento cuya área se irá incrementando a medida que el torque del motor se incrementa.

Esta mayor deformación y deslizamiento causa que la distancia que se desplaza la rueda en tracción sea menor que la de la rueda en giro libre (a la misma velocidad angular), por lo tanto como se ve en la figura, el radio efectivo puede llegar a ser menor inclusive que el radio cargado cuando el torque de aceleración es muy grande. En la condición de borde, puede ocurrir que la rueda rote, pero que no se desplace, en lo que tendremos deslizamiento pleno.

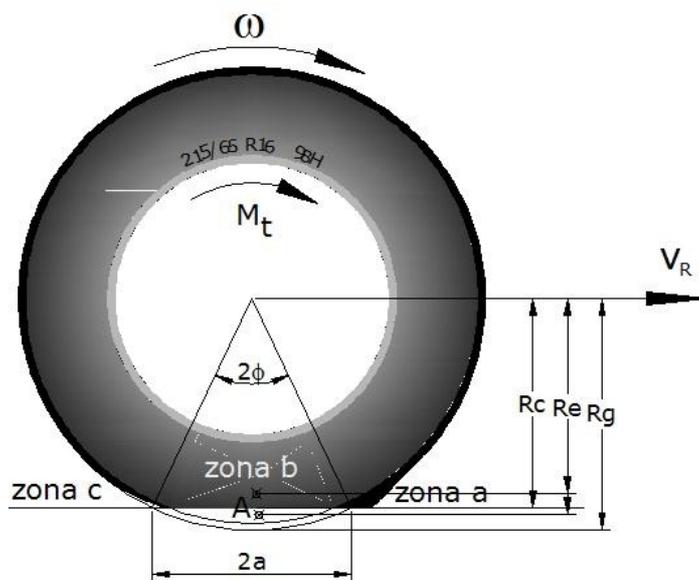


Figura 2.5.1: Radio efectivo en tracción.

Cuando aplicamos un torque de frenado (M_f), ocurre lo contrario, esto es, la banda de rodamiento en la "zona a" se estira (Fig. 2.5.2), y la "zona c", se comprime, con la existencia de deslizamiento luego de cierto rango en la "zona b", que depende de la intensidad del torque de frenado.

La condición de borde es determinada por una velocidad angular cero en la rueda, pero con desplazamiento pleno, es decir, velocidad lineal distinta de cero, esto es lo que se señala como "bloqueo".

Como consecuencia de la deformación y el deslizamiento, cuando se ejecuta la acción de frenado, el neumático recorre mayor distancia que si estuviera en giro libre (a la misma velocidad angular), por lo tanto, como se ve en la figura, el radio dinámico crece entorno al radio geométrico e incluso para un torque muy grande puede superarlo, ubicándose el centro de rotación "A", por debajo de él.

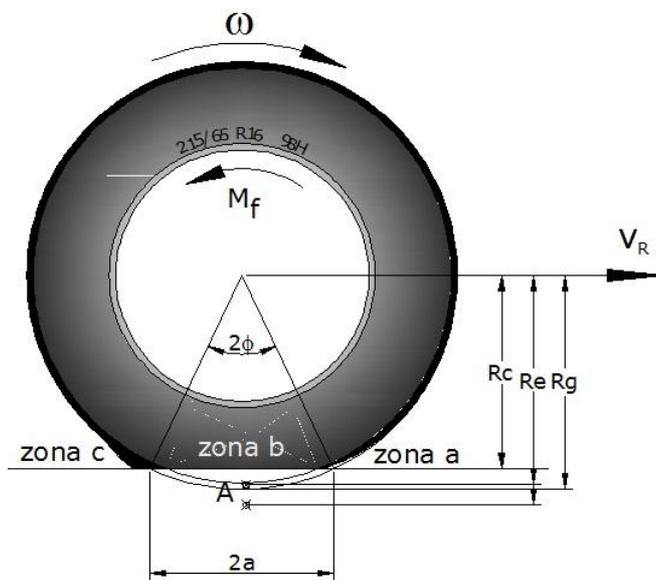


Figura 2.5.2: Radio efectivo en frenado.

Al fenómeno general se lo denomina deslizamiento longitudinal que es usualmente definido como:

$$s = \frac{\omega_R \cdot r_g}{v_R} - 1 \quad (15)$$

Donde ω_R , r_g y v_R , fueron especificados anteriormente.

En este caso:

$$v_R \neq \omega_R \cdot r_g \quad (16)$$

Cuando el neumático se encuentra afectado de un torque de aceleración tendremos:

$$v_R < \omega_R \cdot r_g \quad (17)$$

Y entonces el deslizamiento longitudinal es positivo Ec. (15).

Analizando la condición de borde en aceleración, mencionada anteriormente, tendremos al neumático girando, mientras la velocidad de traslación en el eje $v_R = 0$, esto es, $s = \infty$ Ec. (15), por lo que el deslizamiento en aceleración está limitado por los valores $0 < s < \infty$.

Cuando el neumático se encuentre afectado por un torque de frenado tendremos:

$$v_R > \omega_R \cdot r_g \quad (18)$$

Y en este caso el deslizamiento longitudinal será negativo Ec. (15).

Analizando la condición de borde en frenado, mencionada anteriormente, tendremos al neumático con rotación cero, mientras la velocidad de traslación en el eje $v_R \neq 0$, esto es, $s = -1$ Ec. (15), por lo que el deslizamiento en frenado está limitado por los valores $-1 < s < 0$.

La fuerza de tracción es proporcional a la carga sobre el neumático a través del coeficiente de fricción o adherencia longitudinal:

$$F_y = \mu_y(s) \cdot F_z \quad (19)$$

Donde F_y es la fuerza de tracción longitudinal, $\mu_y(s)$ coeficiente de fricción longitudinal, y F_z la carga sobre la rueda.

El coeficiente de fricción longitudinal es función del deslizamiento s , y puede ser graficado a partir de curvas experimentales que van a diferir en función de diferentes condiciones de entorno, como por ejemplo, tipo de superficie de rodamiento, clima, tipo de neumático, etc. Presentamos un ejemplo en (Fig. 2.5.3) (Jazar R. 2008).

Analizando este gráfico, vemos que el coeficiente de adherencia longitudinal puede ser asumido proporcional al deslizamiento cuando éste no supera un valor aproximado de 0.04 en aceleración y -0.04 en frenado indicado con OA en la figura, en realidad en este intervalo, el deslizamiento es provocado principalmente por la deformación de la banda de rodamiento del neumático en el período elástico, y no hay un desplazamiento real relativo entre la rueda y el camino. Cuando se aumenta el torque de tracción o de frenado, se comienza a producir deslizamiento y movimiento relativo en parte de la huella de contacto (Fig. 2.5.4 a), y se entra en la zona de la gráfica en donde la relación entre el coeficiente y el deslizamiento no es lineal, hasta que el valor del torque hace que el deslizamiento abarque casi toda la huella de contacto (Fig. 2.5.4 c), y se produzcan las condiciones de borde explicadas.

Hay dos valores notables del coeficiente de adherencia longitudinal (Fig. 2.5.3), μ_{tp} y μ_{fp} , que son los coeficientes de tracción y frenado máximos o valores pico, para un deslizamiento

de aproximadamente 0.1, luego de ese pico, se produce una disminución y se arriba a un valor prácticamente constante, μ_{td} y μ_{fd} que son los coeficientes de tracción y frenado dinámico. Esto ocurre a partir de un deslizamiento de aproximadamente 0.3.

Esta zona es de inestabilidad y de baja o ninguna maniobrabilidad para el uso práctico de un vehículo, por lo que en este trabajo, y atendiendo al objetivo principal, no es modelado. En su lugar se considera que el vehículo posee control de tracción en el arranque, y sistema antibloqueo en el frenado, por lo que siempre se mantendrá en torno a los valores pico (apartado 3).

En la zona de proporcionalidad tendremos:

$$\mu_y(s) = C_s \cdot s \quad (20)$$

Donde C_s se denomina coeficiente de deslizamiento longitudinal o coeficiente de rigidez longitudinal.

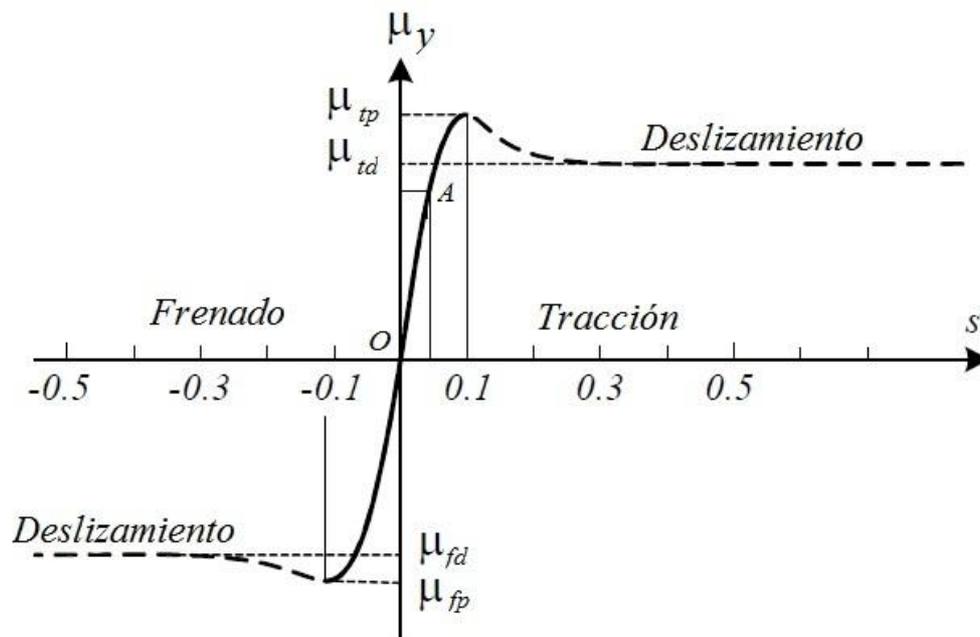


Figura 2.5.3: Relación coeficiente de fricción longitudinal – Deslizamiento (Jazar R. 2008).

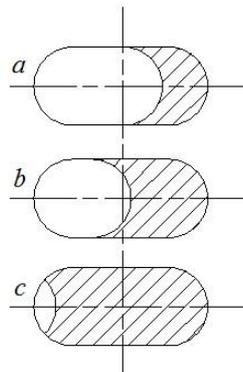


Figura 2.5.4: Huella de contacto con aumento de deslizamiento.

Valores promedio del coeficiente de adherencia longitudinal son presentados en [tabla 2.5.1](#).

| <i>Tabla 2.5.1 Valores promedio del coeficiente de fricción longitudinal</i> | | |
|--|---|---|
| <i>Superficie de rodamiento</i> | <i>Valor máximo de μ</i> | <i>Valor de deslizamiento de μ</i> |
| <i>Asfalto seco</i> | 0.8-0.9 | 0.75 |
| <i>Hormigón seco</i> | 0.8-0.9 | 0.76 |
| <i>Asfalto húmedo</i> | 0.5-0.7 | 0.45-0.6 |
| <i>Hormigón húmedo</i> | 0.8 | 0.7 |
| <i>Grava</i> | 0.6 | 0.55 |
| <i>Nieve</i> | 0.2 | 0.15 |
| <i>Hielo</i> | 0.1 | 0.07 |

Tabla 2.5.1: Valores del coeficiente de fricción longitudinal

Muchos modelos de simulación empíricos han sido desarrollados para representar matemáticamente el comportamiento explicado en [Fig. 2.5.3](#), sin embargo, solo algunos de ellos son lo suficientemente simples y precisos para asegurar una aplicación confiable.

El más utilizado es el modelo presentado en 1991 por Hans B. Pacejka conocido como "Magic Formula" cuya expresión para la fuerza de tracción longitudinal es:

$$F_x(s) = D \cdot \text{sen}(C \cdot \arctan(B \cdot (1 - E) \cdot (s + Sh) + E \cdot \arctan(B \cdot (s + Sh)))) + S_v \quad (21)$$

O también para el coeficiente de adherencia longitudinal:

$$\mu(s) = D \cdot \text{sen}(C \cdot \arctan(B \cdot s - E \cdot (B \cdot s - \arctan(B \cdot s)))) \quad (22)$$

Donde los coeficientes B , C , D y E , son coeficientes que se obtienen experimentalmente para cada tipo de neumático, y que dependen de la carga vertical sobre la rueda. No tienen un significado físico directo.

En 2002, De-Wit presenta el modelo:

$$\mu(s) = c_1 \cdot \sqrt{s} - c_2 \cdot s \quad (23)$$

En donde solo se necesitan dos coeficientes.

En todos los casos, es necesario obtener al menos una curva experimental como la de la [Fig. 2.5.3](#) para ajustar los coeficientes mencionados, lo cual dificulta la utilización de estos modelos.

Algunos valores generales pueden ser encontrados en ([Genta G., 2006](#)) apéndice A, o en ([Wong J. Y., 2001](#)).

2.6 Fuerza de Resistencia a la Rodadura:

Si un neumático que no rota toma contacto con una superficie plana, la distribución de presiones será simétrica con respecto al eje vertical en la superficie de contacto, y la fuerza vertical resultante es posicionada en el centro de dicha área.

Cuando un neumático gira, la banda de rodamiento es deformada ([Fig. 2.4.1](#)). Como resultado de esta distorsión, la presión normal en la mitad delantera de la huella es mayor que en la mitad trasera ([Rajamani R., 2006](#)).

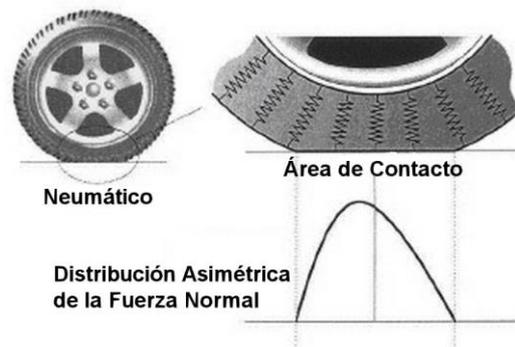


Figura 2.6.1 Distribución asimétrica del diagrama de presiones bajo la rueda girando.

Esta distribución asimétrica de las presiones en la interface rueda – superficie (Fig. 2.6.1), provoca que la resultante de todas las fuerzas que generan esta distribución, se ubique a una distancia Δx (Fig. 2.6.2) del eje de la rueda, lo que induce un torque alrededor del eje de rotación que se opone al giro y por lo tanto al desplazamiento del vehículo. Esto se denomina momento de resistencia a la rodadura T_y .

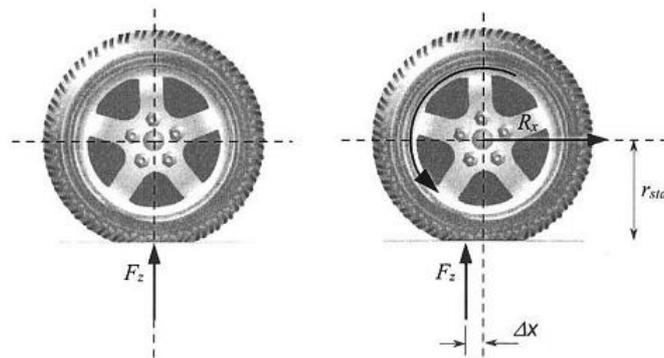


Figura 2.6.2 Momento de Resistencia a la Rodadura.

El momento entre la resultante vertical F_z y el desplazamiento Δx , genera un par de equilibrio, formado por lo que denominaremos fuerza de resistencia a la rodadura R_r , y el radio estático de la rueda r_{stat} . Por lo tanto:

$$T_y = R_r \cdot r_{stat} = F_z \cdot \Delta x \Rightarrow R_r = -F_z \cdot \frac{\Delta x}{r_{stat}} \cdot \text{sign}(\omega_{wl}) = -F_z \cdot f_r(v) \cdot \text{sign}(\omega_{wl}) \quad (24)$$

Donde $\text{sign}(\omega_{wl})$ asegura que T_y sea de sentido contrario a la velocidad angular de la rueda. El cociente entre Δx y el radio estático r_{stat} , se denomina coeficiente adimensional de resistencia a la rodadura $f_r(v)$, y depende levemente de la velocidad de avance.

Hay diferentes factores que afectan este fenómeno, éstos incluyen la estructura de la rueda (construcción y materiales) y sus condiciones de operación (condiciones del camino, presión de inflado, velocidad, temperatura, etc.), que son detallados en la publicación (Di Rado et al. 2008).

Existen diversas ecuaciones empíricas que modelan matemáticamente este coeficiente, y que pueden ser utilizadas a los efectos de la simulación computacional.

La utilizada en el presente trabajo, es la presentada por (Jazar R., 2008), que puede ser utilizada para diferentes tipos de superficies de rodamiento, y hasta una velocidad de

aproximadamente 150 km/h.

El modelo matemático, es el siguiente polinomio cuadrático, cuya variable es la velocidad del vehículo:

$$f_r = \mu_0 + \mu_1 \cdot v^2 \tag{25}$$

En donde μ_0 tiene un valor variable en función del tipo de superficie de rodamiento y μ_1 un valor de $7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$. La velocidad está expresada en m/s.

Si comparamos los datos obtenidos de pruebas experimentales con los obtenidos por la ecuación citada (Fig. 2.6.3), vemos que para un rango de velocidades entre aproximadamente 30 y 150 km/h la coincidencia de curvas es muy buena, y el modelo puede ser utilizado con precisión.

Para velocidades mayores a la velocidad crítica se producen “ondas” en el sector trasero de la cubierta que gira (Fig. 2.6.4) (Genta G., 2006), lo que hace que la rodadura crezca rápidamente y se aleje de la curva analítica.

Los valores de μ_0 son presentados en la Tabla 2.6.1, para distintas superficies de rodamiento, esto hace muy conveniente la utilización del modelo en simuladores todo terreno.

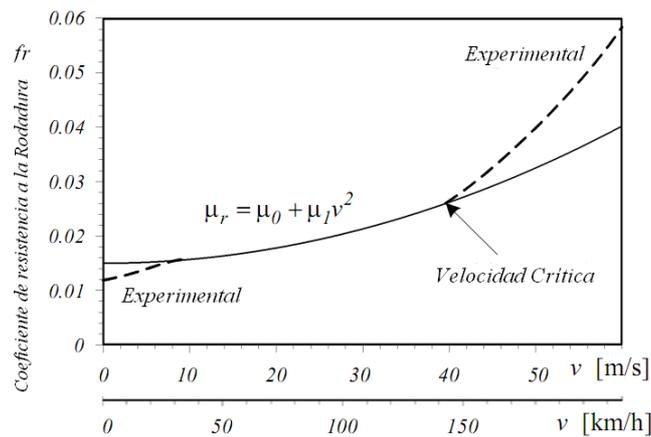


Figura 2.6.3 Comparación entre la ecuación analítica y datos experimentales en cubiertas radiales.

| Condición y tipo de Superficie | μ_0 |
|------------------------------------|---------------|
| Hormigón muy bueno | 0.008 – 0.1 |
| Asfalto muy bueno | 0.01 – 0.0125 |
| Hormigón promedio | 0.01 – 0.015 |
| Pavimento muy bueno | 0.015 |
| Macadán muy bueno | 0.013 – 0.016 |
| Asfalto promedio | 0.018 |
| Hormigón en malas condiciones | 0.02 |
| Pavimento de bloque en buen estado | 0.02 |
| Macadán promedio | 0.018 – 0.023 |
| Asfalto en mala condición | 0.23 |
| Macadán sucio | 0.023 – 0.028 |
| Camino de piedra en buen estado | 0.033 – 0.055 |
| Camino de tierra en buen estado | 0.045 |
| Camino de piedra en mal estado | 0.085 |
| Nieve poco profunda (5 cm) | 0.025 |
| Nieve profunda (10 cm) | 0.037 |
| Camino de tierra sin mantenimiento | 0.08 – 0.16 |
| Arena | 0.15 – 0.3 |

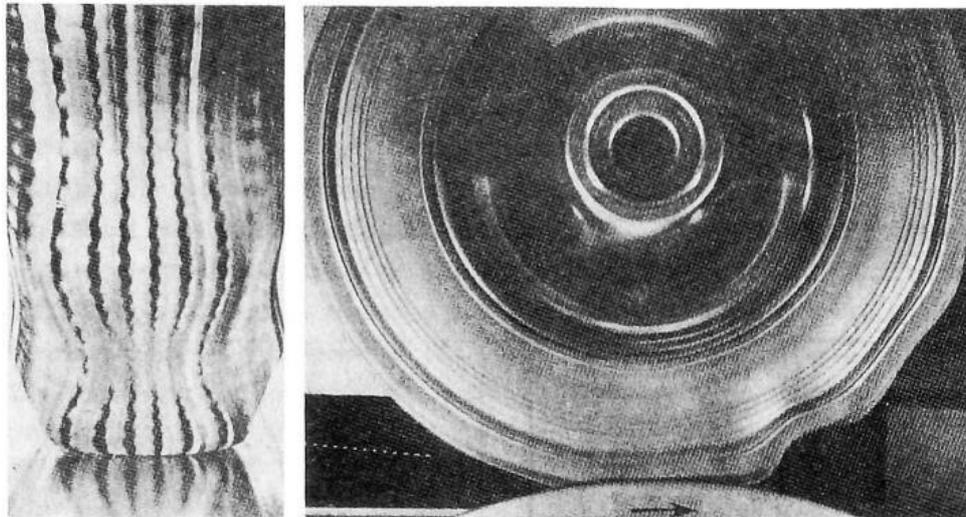
Tabla 2.6.1 Valor de μ_o para diferentes superficies.

Figura 2.6.4 Ondas producidas en un neumático a alta velocidad (Genta G., 2006).

3 ACELERACIÓN EN LA SIMULACIÓN:

Hasta el momento de escribir el presente artículo, el funcionamiento del simulador para efectuar las maniobras de conducción (giro, aceleración, frenado, cambio de marcha, etc.), está basado en el uso del teclado (Fig. 3.1), en donde las flechas a izquierda y derecha controlan las maniobras de giro, la tecla hacia arriba la aceleración, la tecla hacia abajo el frenado, y la tecla de espacio, el cambio de marcha ascendente y descendente. Esto ha sido diseñado pensando en la metodología más común empleada en la mayoría de los juegos de video, y en la familiarización de los usuarios con este formato. Además se han añadido las teclas "A", y "C" que aportan a una función fundamental, mantener la velocidad constante en los tramos en que se lo necesite. Esto es, al presionar la tecla de avance, el vehículo entra en aceleración permanente, y al soltarla en desaceleración. Si se pretende mantener la velocidad constante, habría que presionar y soltar reiteradamente esta tecla, con el inconveniente que esto significa para el usuario. De esta manera, en el momento de acelerar, con la tecla de avance sujeta, y en una determinada relación de marcha, se presiona la tecla "C", lo cual activa una variable que indica un cambio en el bucle de ejecución, y mantiene la velocidad del vehículo. Cuando se desea volver a acelerar se presiona la tecla "A".



Figura 3.1: Teclas utilizadas en la simulación.

Se destaca que cuando se ha presionado la tecla "C", quedando la variable activada, y se suelta la tecla de avance (aceleración), el vehículo entra en desaceleración hasta que se vuelve a presionar la tecla de avance, manteniendo la velocidad constante a partir de ese momento.

Esta metodología modifica el sistema de manejo de un vehículo real, esto es, no se dispone de la posibilidad de contar con un embrague, con el cuál ir regulando el movimiento en la salida desde velocidad cero, es decir, al presionar la tecla de avance (0 ó 1), se entrega toda la potencia disponible, lo que produciría un torque elevado, y como se explicó en Fig. 2.5.3, un deslizamiento pleno, con giro de los neumáticos y con poco o nada de movimiento de avance del vehículo.

En lo que respecta al frenado, ocurre algo similar, al no contar con un pedal de freno, no se tiene la posibilidad de ejercer una presión variable, y de esta manera regular el proceso de detención. Por el contrario, la presión de la tecla de retroceso, se asimila a la presión total del pedal de freno, lo que provocaría el deslizamiento, y bloqueo de las ruedas del vehículo (Fig. 2.5.3).

Con el fin de solucionar estos inconvenientes, en los apartados siguientes, se explica cuales fueron los algoritmos utilizados.

3.1 Aceleración:

La fuerza que genera el torque de aceleración o fuerza tractora, cuya deducción puede ser encontrada en (Di Rado et. al. 2011), es la siguiente:

$$Ft_f = \frac{T_m \cdot N_t \cdot N_d \cdot \eta_{td}}{r_e} - [(I_m + I_c) \cdot N_{td}^2 + I_d \cdot N_d^2 + I_r] \cdot \frac{a}{r_e^2} \quad (26)$$

$$N_{td} = N_t \cdot N_d$$

Donde T_m es el torque que entrega el motor, N_t es la relación de caja, N_d es la relación del diferencial, I_i son las inercias rotacionales de la transmisión, r_e el radio efectivo, η_{td} el rango de eficiencia de aproximadamente 90% (Di Rado et. al. 2011).

El término de la Ec. (26):

$$[(I_m + I_c) \cdot N_{td}^2 + I_d \cdot N_d^2 + I_r] \cdot \frac{a}{r_e^2} \quad (27)$$

Se denomina inercia rotacional, y es substituido en la ecuación de aceleración por una masa equivalente M_r , que se suma a la masa M del vehículo, utilizando la ecuación (Gillespie T., 1992):

$$\frac{M + M_r}{M} = 1.04 + 0.0025 \cdot N_{td}^2 \Rightarrow M + M_r = (1.04 + 0.0025 \cdot N_{td}^2) \cdot M \quad (28)$$

Finalmente la ecuación de la aceleración impulsada por esta fuerza es:

$$aEng((x(t))) = \frac{\frac{T_m \cdot N_t \cdot N_d \cdot \eta_{td}}{r_e} - R_a - R_r \pm R_g}{M + M_r} \quad (29)$$

Donde R_a es la fuerza de resistencia aerodinámica, R_r es la fuerza de resistencia a la rodadura, R_g es la componente del peso paralela a la superficie de rodamiento, y M_r fue definido con anterioridad.

Por otro lado, la fuerza límite de avance, para un vehículo de tracción delantera antes de producir deslizamiento en aceleración es la siguiente (Wong J. Y., 2001):

$$Ft_{f \max} = \mu \cdot W_f = \mu \cdot \left(\frac{l_1}{L} \cdot W \cdot \cos \alpha - \frac{h}{L} \cdot (Ft_{f \max} - R_r) \right) \quad (30)$$

En donde la fuerza de Resistencia a la rodadura, R_r es:

$$R_r = W \cdot \cos \alpha \cdot f_r(v) \quad (31)$$

Finalmente reemplazando Ec. (31) en Ec. (30), tenemos:

$$Ft_{f \max} = \frac{\mu \cdot W \cdot \cos \alpha \cdot (l_1 + f_r(v) \cdot h)}{1 + \frac{\mu \cdot h}{L}} \quad (32)$$

$f_r(v)$ fue definido con anterioridad, h es la altura del centro de gravedad, L la distancia entre ejes, l_1 la distancia entre el centro de gravedad y la rueda trasera, W el peso total del vehículo, μ coeficiente de adherencia y α la pendiente de la superficie de rodamiento.

La ecuación de aceleración regida por esta fuerza será:

$$aLim((x(t))) = \frac{Ft_{f \max} - R_a - R_r \pm R_g}{M + M_r} \quad (33)$$

Donde R_a , R_r , R_g , M y M_r fueron definidos con anterioridad.

El diagrama de flujo del modelo acoplado es:

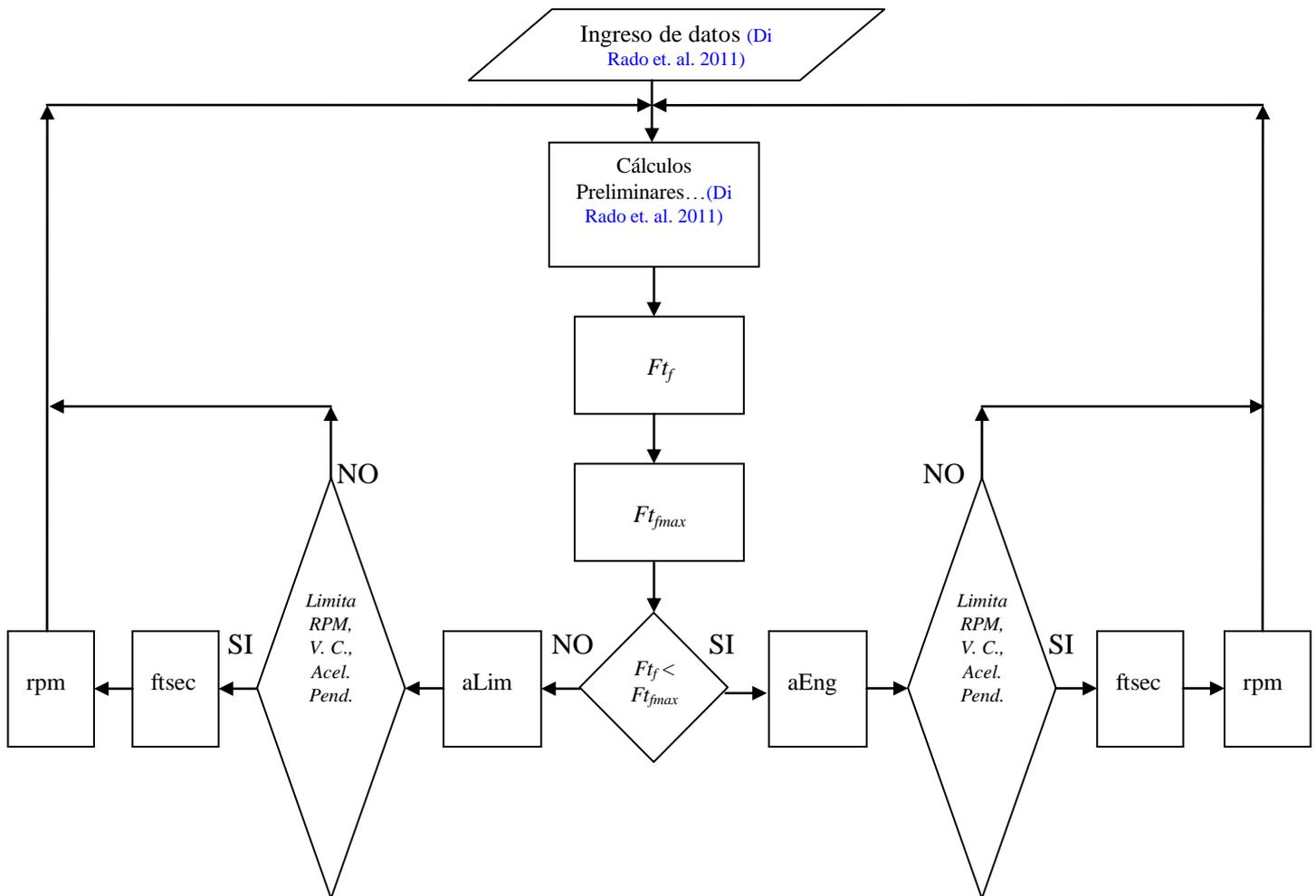


Figura 3.1.1 Diagrama de flujo del modelo de aceleración con límite de tracción.

En el diagrama de flujo, puede observarse la secuencia lógica que sigue la simulación para mover el vehículo virtual desde velocidad cero.

Se ingresa al bucle formalizando la entrada de datos que se almacenan en un script inicial, a continuación se realizan los cálculos preliminares según la referencia que se detalla en el diagrama y se obtienen las fuerzas definidas por la Ec. (26) y la Ec. (32).

Se inserta la primera condición que compara ambas fuerzas, y decide si la fuerza entregada por el torque del motor es menor que la fuerza límite de avance, que está condicionada por el tipo de tracción que posea el vehículo (delantera, trasera o en las cuatro ruedas), por su geometría, y por las condiciones de la superficie de rodamiento. Si es así, acelera el vehículo con la capacidad del motor, y si no, acelera con la limitación mencionada. Esto se verifica en cada paso de iteración, ya el torque del motor va disminuyendo conforme se va acelerando, y colocando los cambios de marcha superiores.

En este punto, se inserta la segunda condición, para ambos caminos, que está referida a tres limitaciones: Máximo RPM que permite el motor, posibilidad de circular a velocidad constante, y posible aceleración negativa.

Cuando se da la condición de que las RPM del motor estén por debajo del límite y que no se haya presionado la tecla "C" explicada anteriormente, el vehículo acelera con la capacidad del motor. Si alguna de estas condiciones no se da, es decir, que las RPM lleguen al límite o

que se presione la tecla "C", evita la integración de la aceleración, no renueva el valor de la velocidad, y por lo tanto la mantienen constante.

Lo mismo ocurre mientras la aceleración sea positiva. Si por alguna circunstancia esta se torna negativa (en general en motores pequeños al subir pendientes pronunciadas en relaciones de marcha altas, etc.), vuelve a integrar la aceleración para disminuir la velocidad.

Se realizaron pruebas de aceleración con control de tracción sobre diferentes superficies de rodamiento, y se construyeron diagramas velocidad – tiempo, y velocidad – espacio, utilizando un automóvil de fabricación nacional Renault Clío 1.2L 16v con las siguientes características: cilindrada 1149 cm³, Potencia máxima 75 cv a 5500 rpm, peso en orden de marcha 930 kg, peso delantero 565 kg, peso trasero 365 kg, distancia entre ejes 2.47 m, neumáticos 175/65 r 14, diámetro de rueda 1.94 pies, coeficiente de penetración (Cd) 0.38, velocidad máxima de aproximadamente 161 km/h, aceleración de 0 a 100 km/h 12.9 segs, aceleración de 0 a 1000 metros 34.7 segs. Datos obtenidos de manuales de usuario y de la fuente: <http://www.renault.com.ar/automoviles>.

Para la ejecución de estas pruebas se modelaron tramos de carreteras rectos de 6 km de longitud, simulando asfalto seco, asfalto húmedo, ripio y nieve de poca profundidad (5cm), con el fin de representar una amplia gama de interacción neumático – carretera, y de performance de conducción.

Se hace muy importante en las simulaciones en tiempo real, la creación de escenarios que recreen y asimilen las condiciones del entorno. Es por esto, que se presenta en Figs. 3.1.2, 3.1.3, y 3.1.4, el ambiente virtual creado para cada caso analizado, y la visión que tendría el conductor si estuviera en el mundo real.



Figura 3.1.2: Tramo de pista de asfalto.

En este aspecto, la demarcación horizontal, por ejemplo, es de vital importancia para la seguridad vial, ya que favorece a visualizar los carriles de circulación y la limitación lateral de pista (Fig. 3.1.2), elementos faltantes en los otros dos escenarios.



Figura 3.1.3: Tramo de pista de ripio.



Figura 3.1.4: Tramo de pista con nieve.

El procedimiento consistió en acelerar sostenidamente el vehículo en terreno llano (pendiente cero), desde el reposo, y hasta la velocidad máxima permitida por sus características técnicas y por la superficie de rodamiento, que en el caso del asfalto húmedo y seco fue de ~161 kph (verificado con el manual del usuario), en ripio de ~142 kph, y en nieve poco profunda de ~155 kph, en este último caso con dificultad por la baja adherencia y la inestabilidad lateral.

Hay dos parámetros principales incidentes en la tracción y la aceleración del vehículo, el coeficiente de adherencia E_c (32), y el coeficiente de resistencia a la rodadura E_c (25). Estos dos elementos combinados en la Ecs. (29) y (33), determinan la performance que tiene el vehículo.

Los coeficientes de adherencia utilizados fueron extraídos de la tabla 2.5.1 y los

coeficientes de resistencia a la rodadura de la tabla 2.6.1.

Las curvas presentadas en Fig. 3.1.5 y en Fig. 3.1.6, muestran en ordenadas, la velocidad en kph y aceleración en pies/seg², y en abscisas, el tiempo transcurrido durante la prueba en segundos para superficie de rodamiento asfáltica en estado húmedo y seco. Además se indican las relaciones de marcha y el momento en que se las utiliza.

En esta circunstancia, el coeficiente de resistencia a la rodadura es el mismo para ambos casos ($\mu_0 = 0.018$), asfalto promedio (Tabla 2.6.1), por lo que la performance la determina la adherencia.

La curva a), que representan la aceleración sobre una superficie de asfalto seco ($\mu = 0.85$), es la que menos tiempo utiliza para acceder a la máxima velocidad de 161 kph (~ 65 seg.), y la que mayor pendiente presenta en Fig. 3.1.5, confirmando la mayor capacidad de tracción, que puede observarse en Fig. 3.1.6, en donde la 1ª marcha está limitada por el coeficiente de adherencia y genera una aceleración de casi 9 pies/seg². Cuando se conecta la 2ª marcha, la fuerza de tracción cedida por la potencia del motor se torna menor que la fuerza límite, y de ahí en adelante controla la prueba, con aceleraciones que en 5ª velocidad son cercanas a cero, y el vehículo no puede aumentar su velocidad en terreno llano.

La curva b), representa la circulación sobre asfalto húmedo ($\mu = 0.50$), sin película de agua, esto es, sin posibilidad de hidropneumático dinámico. Podemos observar que también accede a la máxima velocidad de 161 kph, pero en un tiempo mayor, con una diferencia que en 2ª, 3ª y 4ª marcha se incrementa de 2 a 4 seg., con una pendiente sensiblemente menor, con menor capacidad de tracción, (Fig. 3.1.5). En Fig. 3.1.6, se observa que la máxima aceleración en 1ª marcha, controlada por la adherencia, es de ~5.3 pies/seg², y en 2ª marcha, también controlada por la adherencia, se produce un salto positivo a ~6.6 pies/seg², esto es porque la fuerza de tracción límite es constante, y ahora la masa equivalente (Ec. (28)), es menor, porque las pérdidas en la relación de transmisión N_{td} son menores. Desde 3ª marcha, la aceleración es controlada por la potencia entregada por el motor hasta el final de la prueba.

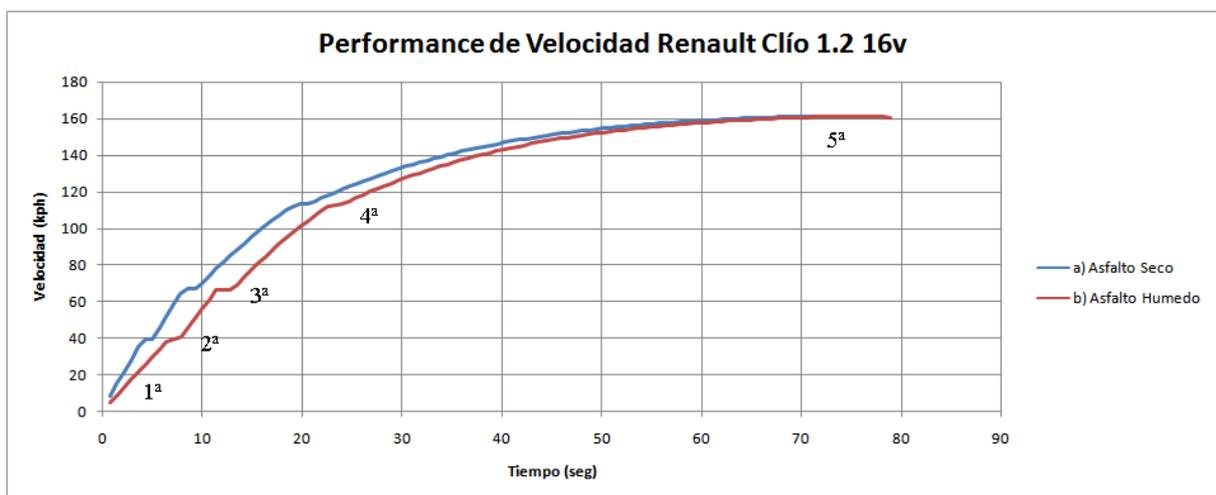


Figura 3.1.5: Aceleración limitada en diferentes superficies de rodadura.

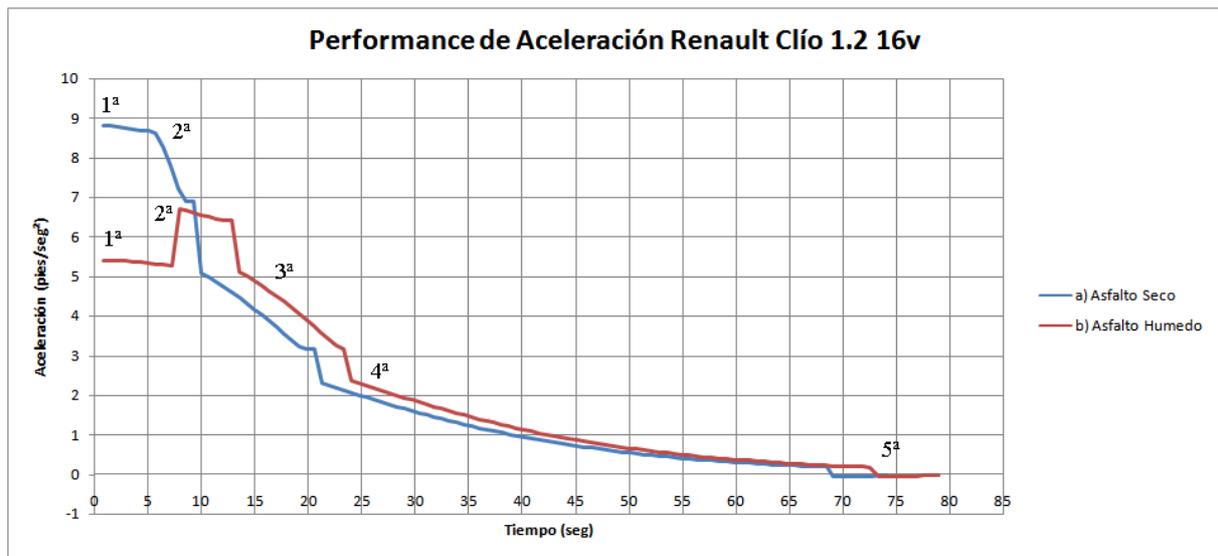


Figura 3.1.6: Aceleración limitada por la superficie de rodamiento.

En Figs. 3.1.7 y 3.1.8, se analiza la diferencia existente en la performance de velocidad y aceleración sobre asfalto húmedo y ripio. Se ha colocado nuevamente la curva b), pero ahora acompañada por la curva c) (ripio) cuyas características son: $\mu = 0.60$ y $\mu_0 = 0.055$ (Tablas 2.5.1 y 2.6.1). Esta comparación está basada en que los coeficientes de adherencia de ambas superficies son similares, pero existe una diferencia marcada en la rodadura, producto de transitar sobre una superficie pedregosa y muy deformable. Esto se puede verificar en la Fig. 3.1.7, en donde a bajas velocidades, hasta la 2ª marcha, las pendientes de ambas curvas son similares, con valores de aceleración limitada por la adherencia, similares (Fig. 3.1.8), ya que hasta ese momento, a pesar de que en ripio se cuenta con algo más de tracción, su resistencia a la rodadura es mayor, produciéndose una compensación. Al colocar la 3ª marcha, el control de aceleración lo toma la potencia del motor, comienza a hacerse más importante la fuerza de resistencia a la rodadura frente al mismo impulso, y ambas curvas se separan francamente a ~ 75 kph. Las velocidades máximas alcanzadas difieren en ~ 20 kph.

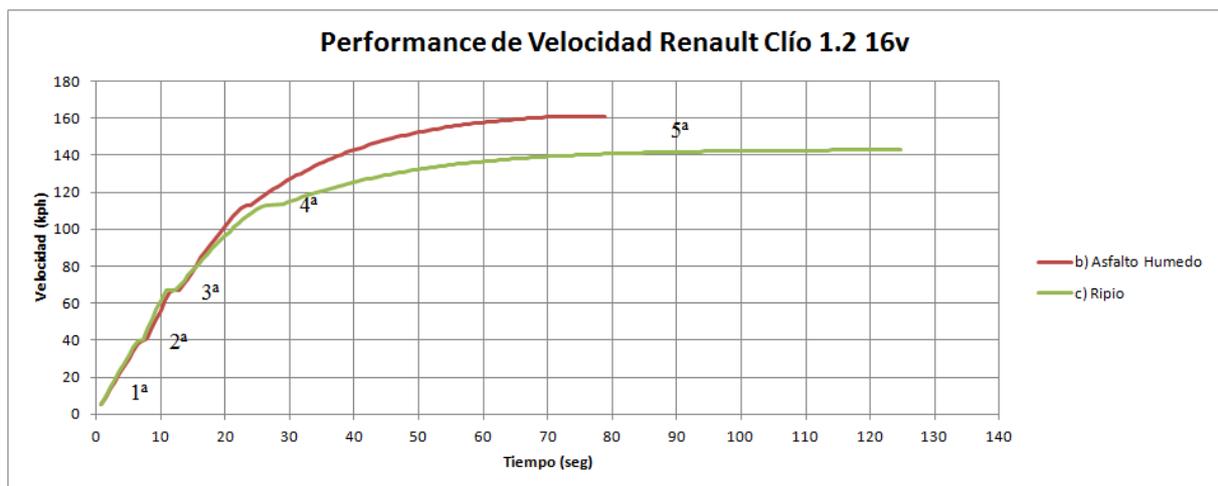


Figura 3.1.7: Velocidad en ripio limitada por la resistencia a la rodadura.

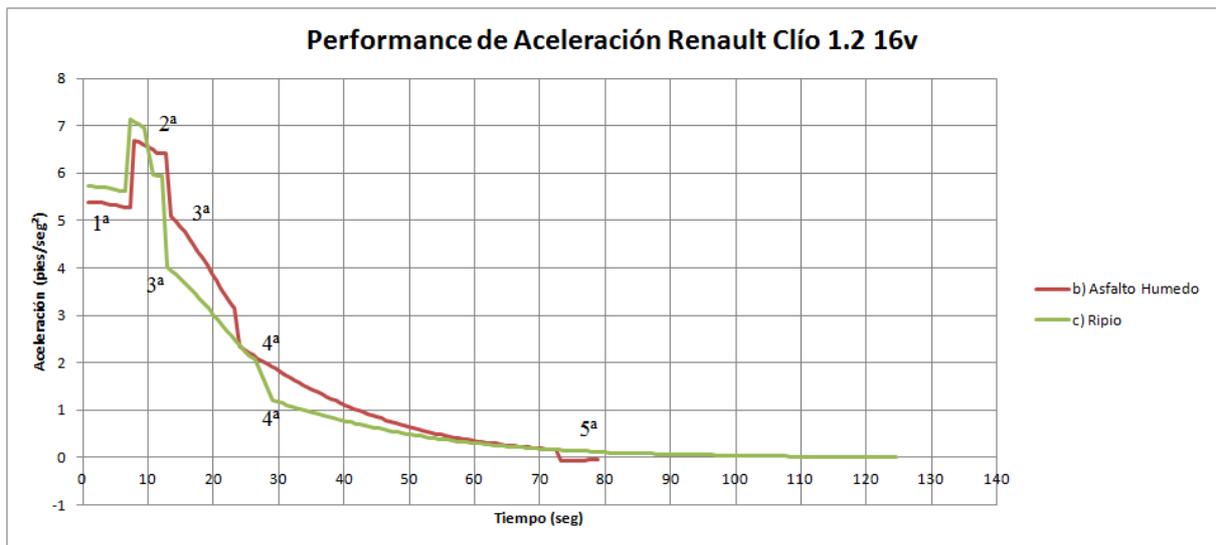


Figura 3.1.8: Aceleración en ripio y asfalto húmedo.

Finalmente, se presenta en Figs. 3.1.9 y 3.1.11, el desempeño del vehículo sobre nieve con un coeficiente de adherencia muy bajo, $\mu = 0.2$ (Tabla 2.5.1), y un coeficiente de resistencia a la rodadura $\mu_0 = 0.025$ (Tabla 2.6.1), un poco superior al del asfalto promedio. Por efecto de la baja adherencia, el vehículo debe partir desde el reposo con un valor de aceleración máximo limitado por la baja tracción de ~ 2 pies/seg² (Fig. 3.1.11), para evitar el deslizamiento de los neumáticos. El control de tracción debe mantenerse durante casi toda la prueba, y solamente en 4ª marcha, se libera la entrega plena de potencia del motor. La curva de velocidad – tiempo (Fig. 3.1.9), tiene baja pendiente, y puede alcanzar los 100 kph solo a los 50 segs. La velocidad máxima es regulada por la resistencia a la rodadura.

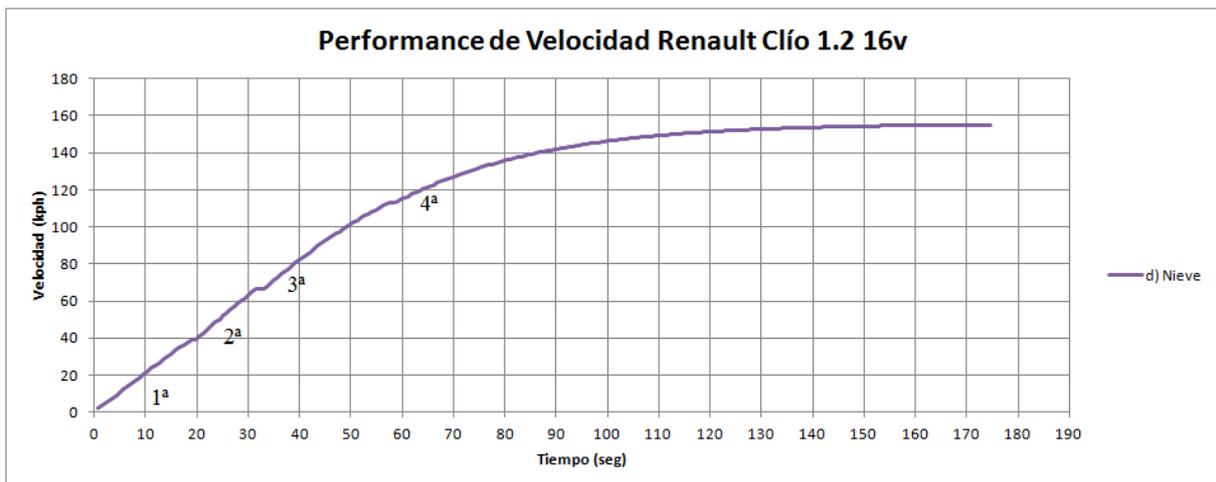


Figura 3.1.9: Velocidad - Tiempo en Nieve poco profunda (5 cm)

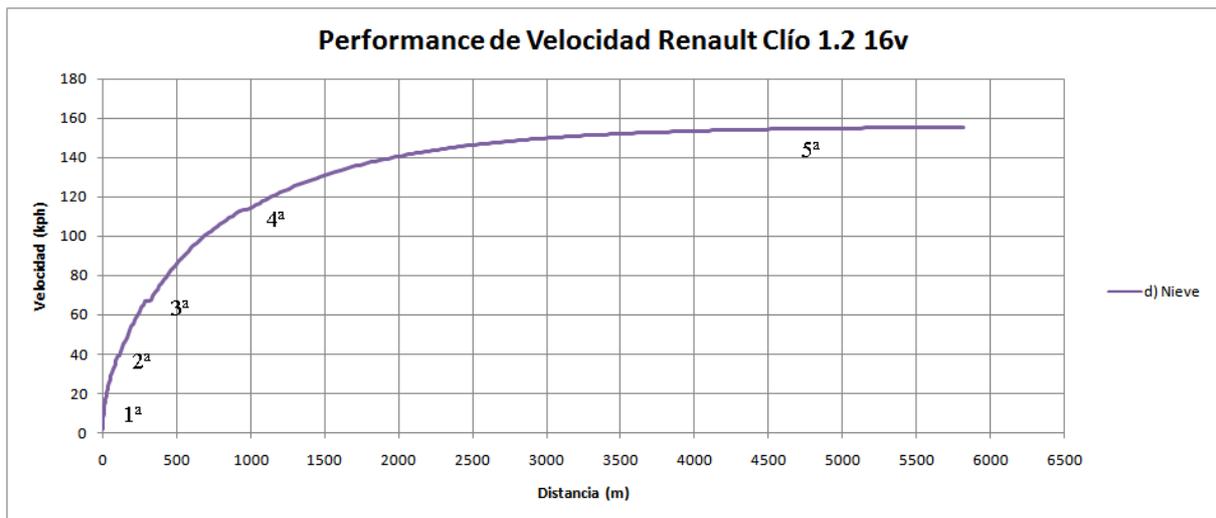


Figura 3.1.10: Velocidad – Espacio recorrido en Nieve poco profunda (5 cm)

En este caso se agrega el gráfico velocidad – espacio (Fig. 3.1.10), a los efectos de notar que debido a las condiciones de pista, el vehículo necesita aproximadamente 700 mts, para alcanzar los 100 kph, y aproximadamente 5 km para la velocidad máxima.

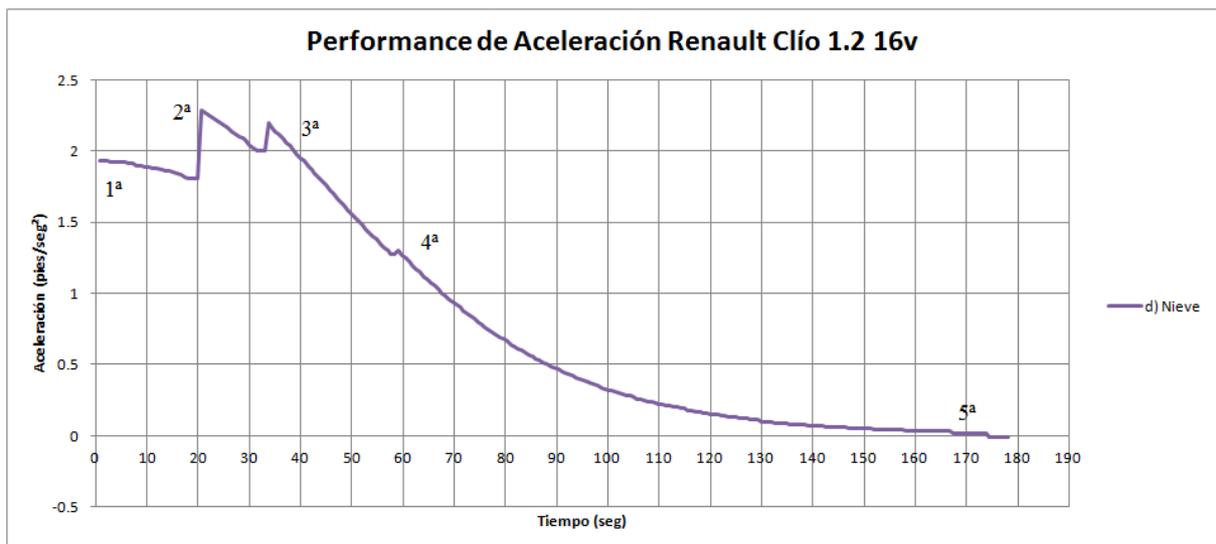


Figura 3.1.11: Aceleración limitada por la baja adherencia en nieve.

4 MÉTODO DE INTEGRACIÓN:

Muchas ecuaciones diferenciales de interés para la física, y que expresan modelos matemáticos, muchos de ellos empíricos, de fenómenos de ocurrencia importante dentro de la Ingeniería, tienen características muy complejas que en la mayoría de los casos no permiten que se puedan resolver de manera explícita. Por esta razón, deben aplicarse métodos de resolución numérica aproximados a la solución cerrada, que permitan iterar en pequeños rangos de tiempo la tasa de cambio de la variable, utilizando su valor del paso anterior y a partir de una condición inicial preestablecida.

Las Ecs. (29) y (33) del capítulo 3.1, representa el fenómeno físico de la aceleración del vehículo, y las fuerzas que constituyen la resistencia a rodamiento (empírica), y la resistencia

aerodinámica (semi-empírica) dependen de la variable velocidad, que es a su vez lo que queremos determinar en cada paso de integración.

La variable velocidad es llamada variable dependiente y el elemento con respecto del cuál es diferenciada (tiempo), variable independiente.

Como la función involucra una sola variable independiente, se denomina Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

Existen diferentes métodos de integración numérica que arriban con diferente grado de aproximación a la solución de una EDO, y cuál de ellos utilizar, es un problema a resolver dependiendo del grado de complejidad de la ecuación y de los recursos computacionales con que se cuenta.

4.1 Método de Euler:

El método de Euler es el más simple, y es el que expresa la solución de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \rightarrow h = x_{i+1} - x_i \quad (34)$$

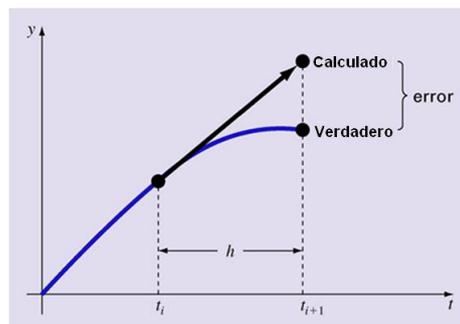


Figura 3.1.1 Precisión del método de Euler.

Como vemos en este caso, el valor calculado se aleja apreciablemente del valor verdadero cuando el paso de integración es lo suficientemente grande, es por esto, que se deben adoptar pasos muy pequeños, para ir corrigiendo el error a medida que se actualiza la variable, con el consiguiente esfuerzo computacional.

Se han diseñado otros métodos en los cuales se ha mejorado la precisión sin aumentar el costo computacional, a partir de predecir los nuevos valores con pendientes promedio entre las localizaciones de la variable independiente.

En el presente trabajo se ha optado por trabajar con Runge-Kutta 4, por ser el método de un solo paso más preciso, y que menos recursos computacionales requiere, teniendo en cuenta los variados cambios de pendiente de las curvas que representan el modelo, durante el proceso de conducción del simulador.

4.2 Método de Runge-Kutta 4:

Los métodos de Runge-Kutta expresan la solución de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) \cdot h \quad (35)$$

En donde $\phi(x_i, y_i, h)$ se denomina función incremental, y puede ser interpretada como la

pendiente representativa del intervalo. La función incremental puede ser escrita como:

$$\phi = a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \dots + a_n \cdot k_n \quad (36)$$

La forma clásica del método de Runge-Kutta de 4° orden es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ k_1 &= \Delta h[f(x, y)] \\ k_2 &= \Delta h[f(x + \frac{1}{2}\Delta h, y + \frac{1}{2}k_1)] \\ k_3 &= \Delta h[f(x + \frac{1}{2}\Delta h, y + \frac{1}{2}k_2)] \\ k_4 &= \Delta h[f(x + \Delta h, y + k_3)] \end{aligned} \quad (37)$$

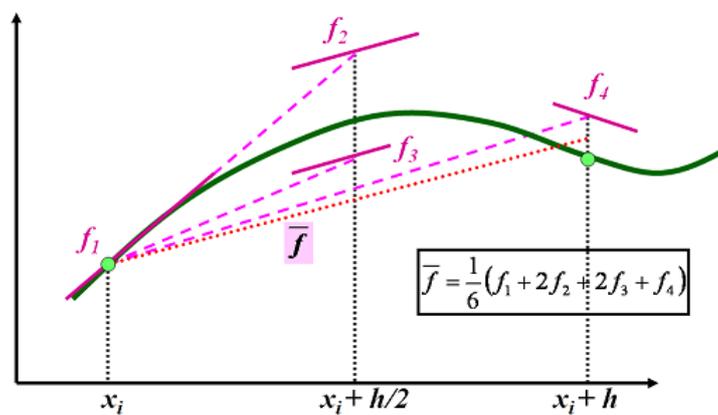


Figura 3.2.1 Obtención de la pendiente promedio para aproximación a la solución.

Cada uno de los ks de la Ec. (37) representa una pendiente, y Δy el promedio pesado de la pendiente mejorada.

5 CONCLUSIONES:

En el presente trabajo se ha desarrollado un algoritmo de aceleración para vehículos de dos ejes con tracción delantera, que permite ser utilizado en diferentes condiciones y tipos de superficie de rodamiento, combinando los coeficientes que caracterizan la interacción neumático - carretera.

Se ha utilizado un modelo simplificado de aceleración longitudinal, empleando una condición de entrega de torque y fuerza de tracción al límite del deslizamiento de los neumáticos.

Las curvas obtenidas, demuestran una buena representación de la performance general de velocidad y aceleración, circulando sobre carpeta asfáltica seca y húmeda, y sobre superficies más extremas como ripio y nieve, que permiten su análisis y comparación.

El modelo desarrollado se considera, en principio, satisfactorio para su utilización en la verificación de las condiciones geométricas de tramos de carreteras y al análisis de las velocidades de proyecto y operacional.

En futuros trabajos, se abordarán las problemáticas del frenado y el tránsito en curvas y se deberán trazar perfiles de velocidades con el modelo de aceleración presentado.

REFERENCIAS

- Di Rado G. R., Devincenzi G. H., *Use of rolling resistance's empiric equations in a driving simulator*, Revista Carreteras, Index Scopus, Asociación Española de Carreteras, ISSN: 0212 – 6389, Número de la edición 161, Pág. 70 a Pág. 78, Madrid, España, Septiembre – Octubre 2008.
- Di Rado G. R., Devincenzi G. H., *Effect of Aerodynamic Resistance on car's Acceleration*, Revista Carreteras, Index Scopus, Asociación Española de Carreteras, ISSN: 0212 – 6389, Número de la edición 163, Pág. 76 a Pág. 80, Madrid, España, Enero – Febrero 2009.
- Gillespie T. D., *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers, Inc, 1992
- Jazar R., *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, 2008.
- Giancarlo Genta, *Motor Vehicle Dynamics*, World Scientific, 2006.
- Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluids Mechanics*, second edition, Pergamon Press, 1987.
- Monster Marco, *Car Physics for Games*, versión 1.9, <http://www.asawicki.info/Mirror/Car%20Physics%20for%20Games/Car%20Physics%20for%20Games.html>, Noviembre 2003.
- Rajamani R., *Vehicle Dynamics and Control*, Springer, 2006.
- Roess R., Prassas E., Mc Shane W., *Traffic Engineering*, Pearson Prentice Hall, 2004.
- Wong J. Y., *Theory of Ground Vehicles*, John Wiley & Sons INC., 2001.
- Di Rado G. R., Devincenzi G. H., Presta García Daniel S., *Aplicación del Método de Integración Numérica de Ecuaciones Diferenciales Runge Y Kutta 4 (Rk4) a un Modelo de Simulación Longitudinal de Dinámica Vehicular Terrestre*, Mecánica Computacional Vol. XXX, págs. 2907-2927, Asociación Argentina de Mecánica Computacional AMCA.
- Palmer Grant, *Physics for Game Programmers*, Apress, 2005
- Naunheimer Harald, Bertsche Bernd, Ryborz Joachim, Novak Wolfgang, *Automotive Transmissions*, Springer, 2011.