

EL CURSO “FLUIDODINÁMICA COMPUTACIONAL” EN LAS CARRERAS DE GRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

Ricardo A. Prado

*Área Mecánica de los Fluidos, Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional del Comahue, calle Buenos Aires N°1400, Q8300BCX Neuquén, Argentina,
ricardo.prado@fain.uncoma.edu.ar*

Palabras Clave: Fluidodinámica Computacional, Diferencias Finitas, Volúmenes Finitos, Verificación y Validación.

Resumen. Este trabajo provee información sobre el curso Fluidodinámica Computacional, destinado a la capacitación de estudiantes avanzados de ingeniería en las técnicas numéricas de las diferencias finitas y de los volúmenes finitos para la resolución de problemas en mecánica de fluidos y transferencia de calor, desarrollando los fundamentos de ambas técnicas y resaltando el carácter numérico de las soluciones. Se pone de relieve tanto la necesidad del análisis de los errores asociados a la utilización de estas técnicas así como el análisis de la estabilidad de los esquemas numéricos adoptados, haciendo también hincapié en el requerimiento de verificar y/o validar los resultados computacionales obtenidos. El presente curso, con el mismo desarrollo teórico pero con mayor carga de trabajos computacionales, es también ofrecido a estudiantes de posgrado.

1 INTRODUCCION

El curso “Fluidodinámica Computacional” es un curso optativo propuesto desde el área Mecánica de los Fluidos del Departamento de Mecánica Aplicada para las carreras Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Petróleo e Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo), basado en la resolución numérica de problemas fluidodinámicos simples o de mediana complejidad y orientado a estudiantes avanzados con conocimientos básicos de mecánica de los fluidos (o materias equivalentes), tal como se indica en la [Figura 1](#).

El objetivo del curso es la formación conceptual del alumno en aspectos formales de la formulación de modelos discretos en problemas de la mecánica de los fluidos, empleando diferencias finitas y volúmenes finitos. Se pretende asimismo realizar el análisis físico de los problemas a resolver, a fin de identificar los aspectos numéricos de los resultados y diferenciarlos de los inherentes al comportamiento físico de la solución. En aquellos casos que presentan soluciones exactas, se compararán los resultados numéricos con los obtenidos analíticamente.

La materia está estructurada en cinco áreas temáticas: 1. Conceptos básicos del método de las diferencias finitas, 2. Generación de mallas, 3. Resolución numérica de problemas fluidodinámicos, 4. El método de los volúmenes finitos y 5. Verificación y validación.

El curso se desarrolla durante un cuatrimestre (15 semanas), con una carga semanal de 6 horas cátedra, pero con una importante componente de tareas computacionales por parte del alumnado, el cual debe manejar un lenguaje de programación o utilitarios (*Scilab*, *Matlab* u otros), en los cuales fuera entrenado por los cursos previos de Métodos Computacionales en Ingeniería I y II, dictados en la Facultad. Dada la no disociación entre teoría y práctica, el curso está a cargo de un único docente responsable de todas las actividades de cátedra.

Este curso se ofrece asimismo para estudiantes de posgrado. En este caso, si bien el programa del curso se desarrolla de manera coincidente e indistinta con el cursado de los estudiantes de grado, la aprobación de la materia conlleva una mayor carga de trabajos prácticos computacionales, problemas que a su vez presentan una mayor complejidad, tanto física como numérica.

2 PROGRAMA DEL CURSO

Los temas desarrollados en la materia se detallan en el Programa Analítico del curso, el cual es mostrado en la [Figura 2](#). El ordenamiento de los mismos responde al grado de dificultad de las metodologías numéricas como así también al de las propias ecuaciones diferenciales. Partiendo de las ecuaciones tipo: ecuación del calor (parabólica), ecuación de onda (hiperbólica) y ecuaciones de Laplace o de Poisson (elípticas), pasando por la ecuación de Burgers y las ecuaciones de la capa límite de Prandtl, se arriba finalmente a las ecuaciones de Navier-Stokes. Para todas estas ecuaciones, se plantean las discretizaciones tanto en diferencias finitas (DF) como en volúmenes finitos (VF), resaltando siempre las características numéricas, y por ende aproximadas, de estas soluciones.

Por otra parte, como toda ecuación de gobierno es resuelta en un dominio, con la aplicación de condiciones auxiliares (de contorno e iniciales), es también relevante la discretización de dicho dominio, dado que el mallado debería asimismo reflejar las características físicas de la solución. Consecuentemente, la generación de grillas es otro aspecto importante del curso, destinando una unidad al desarrollo de sus fundamentos y a la obtención de mallas estructuradas.

 UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE Facultad de Ingeniería	Programa de:		
	Fluidodinámica Computacional Código: SIU 838		
Según Ordenanzas N°:	DEPARTAMENTO: Mecánica Aplicada		
Como MATERIA OBLIGATORIA para las carreras de:	ÁREA: Mecánica de los Fluidos		
Año:	ORIENTACIÓN: Mecánica de los Fluidos		
Año:	REGIMEN: Cuatrimestral (15 semanas)		
Según Ordenanzas N°:	CARGA HORARIA TOTAL: 90 horas		
Como MATERIA OPTATIVA para las carreras de:	CARGA HORARIA SEMANAL: 6 horas		
Ingeniería Mecánica (I.M.) Año: 4°, 5°	VIGENCIA: 2014		
Ingeniería Química (I.Q.) Año: 4°, 5°			
Ingeniería en Petróleo (I.P.) Año: 4°, 5°			
Fundamentación:			
Proponer un curso optativo basado en la resolución numérica de problemas fluidodinámicos, orientado a estudiantes de Ingeniería con conocimientos básicos de mecánica de los fluidos (o materias equivalentes).			
Objetivos:			
El objetivo es la formación conceptual del alumno en aspectos formales de la formulación de modelos discretos en problemas de la mecánica de los fluidos, empleando diferencias finitas y volúmenes finitos. Se pretende asimismo presentar el análisis físico de los problemas a resolver, a fin de diferenciar los aspectos numéricos de los inherentes al comportamiento físico de la solución. En aquellos casos que presentan soluciones exactas, se compararán los resultados numéricos con los obtenidos analíticamente.			
Contenidos Mínimos según Plan de Estudios:			
CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS. GENERACIÓN DE MALLAS. EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS FLUIDODINÁMICOS.			
ASIGNATURAS CORRELATIVAS PRECEDENTES			
CURSADAS		APROBADAS	
Cod: 5407	Mecánica de los Fluidos (I.M.)	Cod:	-----
Cod: 5442	Mecánica de los Fluidos (I.P.)	Cod:	-----
Cod: 5505	Métodos Computac. en Ing. II	Cod:	-----
CONDICIONES DE EVALUACION Y ACREDITACIÓN			
a. Aprobación de una evaluación teórico-práctica, una vez completada la segunda unidad del curso. Esta evaluación admite un único recuperatorio.			
b. Presentación los trabajos computacionales del curso, los cuales deberán presentar la discusión de los problemas fluidodinámicos y numéricos.			
c. Desarrollo de un trabajo especial de características integradoras.			
La nota final de aprobación de la materia es el promedio resultante de los puntajes obtenidos en cada etapa.			
PROFESOR RESPONSABLE:			
Ricardo A. Prado		(0299) 449-0338 email: ricardo.prado@fain.uncoma.edu.ar	

Figure 1: Programa del curso, primera página.

<p>Programa Analítico:</p> <p>UNIDAD N°1: CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS</p> <ul style="list-style-type: none"> - Fundamentación. Ventajas y desventajas de los métodos numéricos. Problemas típicos en CFD. - Clasificación matemática y física de las ecuaciones diferenciales parciales. Clasificación de las condiciones auxiliares. - Clasificación de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. - Formulación en diferencias finitas. - Métodos para obtener expresiones en diferencias finitas: <ul style="list-style-type: none"> - Series de Taylor. - Ajuste por polinomios. - Errores de truncamiento. - Representación de una EDP mediante diferencias finitas. <ul style="list-style-type: none"> - Esquemas explícitos. Esquemas implícitos y semi-implícitos. Crank-Nicolson. - Algoritmo de Thomas para matrices tridiagonales. - Estabilidad, consistencia y convergencia de una formulación numérica. - Errores de redondeo y discretización. - Estabilidad de un esquema en diferencias finitas: <ul style="list-style-type: none"> - Análisis de Fourier (o de von Neumann). - Método de la estabilidad matricial. Teoremas del círculo. - Análisis de estabilidad para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. - Ecuación modificada. Difusión y dispersión numéricas. <ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de Burgers estacionaria y no estacionaria. Números de Péclet y Reynolds de malla. - Esquemas Upwind, FTCS, de Leonard. <p>UNIDAD N°2: GENERACIÓN DE MALLAS</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dominios físicos y dominios computacionales. - Transformaciones generales. - Mallas generadas por métodos algebraicos. - Mallas generadas por métodos elípticos: Ecuaciones de Laplace y Poisson. - Métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas: <ul style="list-style-type: none"> Métodos directos y métodos iterativos. Operadores de sobre-relajación. Análisis de convergencia. - Nociones de aceleración multigrilla y de refinamiento adaptativo. Extrapolación de Richardson. <p>UNIDAD N°3: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS FLUIDODINÁMICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> - Problemas tipo involucrando ecuaciones de tipo elíptico, parabólico e hiperbólico. - Ejemplos fluidodinámicos estacionarios: <ul style="list-style-type: none"> - Flujo en capas límites. - Flujo estacionario laminar en tuberías de un fluido no-newtoniano (ley de la potencia). - Flujo estacionario laminar en conductos de sección rectangular de un fluido newtoniano. - Flujo de Euler en canales bidimensionales con presencia de obstáculos. - Flujo en medios porosos saturados. Ley de Darcy. - Ejemplos de flujo no estacionario: <ul style="list-style-type: none"> - Segundo problemas de Stokes. - Establecimiento de la corriente bidimensional de Couette. - Establecimiento de la corriente de Poiseuille en canales 2D y tuberías. - Flujo laminar tubular en presencia de trenes de ondas de presión (Golpe de ariete). - Ecuaciones de Navier-Stokes: Resolución de problemas 2D de flujos viscosos incompresibles <ul style="list-style-type: none"> - En variables función de corriente - vorticidad. <ul style="list-style-type: none"> - Flujo que ingresa a un canal bidimensional. - En variables primitivas. <ul style="list-style-type: none"> - Método de Chorin (de compresibilidad artificial) - Con ecuación de Poisson para la distribución de presiones - Simple (Patankar y Spalding) – Simpler (Patankar). - Comparación con resultados analíticos y/o experimentales. <p>UNIDAD N°4: EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conceptos básicos del método. Formulación integral conservativa de las ecuaciones de gobierno. - Aproximación de las integrales de superficie y de volumen. - Aproximación de los flujos convectivos y difusivos. - Interpolaciones: exponencial, lineal, upwind, híbrido, QUICK (Leonard). - Implementación de las condiciones de contorno. - Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias, 2D: Mallas desfasadas. Acoplamiento presión-velocidad. Algoritmo SIMPLE. Algoritmo SIMPLER. Otros algoritmos. Problemas no estacionarios. Coeficiente de ponderación: explícito, implícito y C-N. <p>UNIDAD N°5: VERIFICACION Y VALIDACION</p> <ul style="list-style-type: none"> - Verificación y validación. - <i>Papers</i> referidos simulaciones de <i>benchmarks</i> mediante códigos comerciales. - ASME <i>Journal of Fluids Engineering Editorial Policy</i>.- ASME V&V 20-2009. - AIAA-G-077-1998(2002).
--

Figure 2: Programa analítico del curso.

El presente programa guarda cierta semejanza con el *outline* del curso de posgrado dictado por el Dr. William Usab Jr., denominado AAE 512 *Computational Aerodynamics*, en *School of Aeronautics and Astronautics* de *Purdue University*, EE.UU, que otorgaba créditos para mis estudios de nivel maestría. En dicho curso era utilizado como texto de cabecera -y para la totalidad de los temas abarcados por la materia- el libro de [Anderson et al. \(1984\)](#), siendo éste también la principal referencia de las dos primeras unidades temáticas del curso aquí presentado.

Dado que el presente curso fue planificado para ser inicialmente dirigido a estudiantes de grado, se concibió con la idea de aplicar estas metodologías numéricas a problemas más sencillos que los incluidos en el curso AAE 512. Esto presenta una importante conveniencia adicional, que es la posibilidad de contar, en algunos casos, con soluciones analíticas contra las cuales contrastar los resultados numéricos. Esta comparación pone en evidencia la presencia de los errores asociados con la aplicación de técnicas numéricas y da lugar al posterior análisis de los procedimientos que tenderían a minimizar dichos errores.

Además, en el presente curso se hace mayor hincapié en los aspectos básicos de estas técnicas numéricas, mediante una descripción y un análisis más detallados, temas que fueron considerados con menor detenimiento en el curso AAE 512.

Por otra parte, y a semejanza del curso AAE 512, se requiere que el estudiante desarrolle sus propios programas de cómputo. Se pretende con este proceder que el estudiante sea consciente de las acciones que se llevan a cabo durante la ejecución de un programa de cómputo y no se convierta en un simple usuario de códigos computacionales cerrados, ignorante de los procesos computacionales que se realizan y de los errores involucrados, cualquiera sea la técnica numérica utilizada.

2.1 Unidad N°1

En esta unidad, luego de presentar las cuestiones generales que hacen a la resolución numérica genérica de problemas de mecánica de los fluidos y transferencia de calor en ingeniería y a la clasificación matemática (y a su correlato físico) de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y de los sistemas de EDP de gobierno, se desarrollan las bases del método de las diferencias finitas, dada la simplicidad de la técnica y la posibilidad de fundamentar teóricamente temas tales como el error de truncamiento, la consistencia y la estabilidad de un esquema, la difusividad y la dispersión numéricas y la ecuación modificada. La principal referencia bibliográfica de esta unidad lo constituye el libro de [Anderson et al. \(1984\)](#).

En los trabajos prácticos y computacionales asociados a esta unidad se clasifican tanto las EDP como los sistemas de EDP, se obtienen las expresiones en DF de términos individuales y de los órdenes de sus correspondientes errores de truncamiento, tanto en mallas equiespaciadas como de brazos desiguales. Semejante procedimiento se sigue posteriormente con las EDPs, utilizando diferentes esquemas de discretización e incorporando los conceptos de formulaciones explícitas, parcialmente implícitas o completamente implícitas. Adicionalmente, en el caso de ecuaciones parabólicas y elípticas, se analizan las cuestiones de estabilidad de distintas formulaciones numéricas. En el caso de la ecuación estacionaria de Burgers, se considera la influencia de los números de Péclet del problema y de la malla. Finalmente, se analizan los aspectos con los factores de amplificación y de subdifusión o de sobredifusión, encontrando la expresión (al menos de los términos principales) de la ecuación modificada. En aquellos casos que las ecuaciones diferenciales admitan soluciones analíticas, los resultados numéricos deberán ser comparados con los analíticos.

2.2 Unidad N°2

En esta unidad se desarrollan los fundamentos de las transformaciones, tanto algebraicas como generales, que tienen por finalidad transformar el dominio general de una EDP en uno regular, donde los esquemas en DF puedan ser fácilmente definidos, y donde las características físicas de la solución a la ecuación de gobierno resulten mejor representadas por la grilla utilizada. Desde luego, la transformación de dominio transforma asimismo a la ecuación de gobierno primitiva, incorporándole términos adicionales y apareciendo los métricos de la transformación, así como también sus derivadas, dependiendo del orden de derivación de la EDP original.

Los casos de transformaciones generales dan pie al desarrollo de transformaciones mediante ecuaciones elípticas de Laplace o de Poisson, en este último caso por la incorporación de funciones de forma para el control de los nodos en el dominio físico propuestas por Middlecoff y Thomas ([Anderson et al., 1984](#)), generándose así mallas elípticas (tipos C, H u O) que son resueltas mediante diversos procesos iterativos y haciendo uso de factores de sobre-relajación. Asimismo, se dan nociones de refinamiento adaptativo y de aceleración multigrilla.

En los trabajos prácticos y computacionales asociados a esta unidad se solicita realizar transformaciones de las ecuaciones de gobierno, tanto las de primer orden como las de segundo, mediante transformaciones definidas por funciones algebraicas que más se ajusten a las características del dominio físico y de transformaciones curvilíneas ortogonales cilíndricas y esféricas. En esta unidad se hace diferencia entre la resolución de mallas elípticas por parte de alumnos de grado y estudiantes de posgrado: para los últimos, el nivel de complejidad del mallado es mayor que el requerido a los alumnos de grado y, consecuentemente, los requerimientos de programación también son mayores.

2.3 Unidad N°3

En esta unidad se plantean problemas de la mecánica de fluidos a resolver mediante la aplicación de la técnica de las diferencias finitas. Comenzando por problemas simples, que pueden simplificarse a los problemas tipo calor, onda o Poisson, se analizan luego los problemas de convección-difusión no estacionarios (modelados mediante una ecuación tipo Burgers).

En los trabajos prácticos y computacionales asociados a esta unidad se resuelven desde problemas simples, dado que tienen solución analítica contra la cual contrastar los resultados numéricos, como son el segundo problema de Stokes, el flujo laminar en una tubería de sección rectangular en presencia de un gradiente de presiones constante, el establecimiento de la corriente tubular de Hagen-Poiseuille, flujo laminar en un canal bidimensional en presencia de un gradiente de presiones alternativo y el flujo laminar en una tubería de un fluido no-newtoniano modelado por la ley de la potencia. Se combinan así problemas en dominios cartesianos y cilíndricos, bajo condiciones tanto estacionarias como transitorias.

Los problemas de mayor complejidad están destinados solamente a los estudiantes de posgrado: problemas de capa límite bidimensional (donde la solución mediante DF puede ser contrastada por las soluciones semejantes de Falkner-Skan) y flujo laminar gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, escritas tanto en variables primitivas como en las variables función de corriente y vorticidad. En estos últimos casos, los resultados numéricos son contrastados con los presentados por *benchmarks*, como por ejemplo, para el caso del problema resuelto por [AbdulNour y Potter \(1990\)](#).

2.4 Unidad N°4

En esta unidad se desarrolla la formulación del método de los volúmenes finitos a partir de las ecuaciones de gobierno escritas en forma conservativa, la representación de los flujos difusivos (mediante DF) y convectivos, y las diversas interpolaciones para la modelización de estos últimos. Para la resolución de las ecuaciones bidimensionales y estacionarias de Navier-Stokes bajo condiciones de incompresibilidad, se aplican los algoritmos SIMPLE y SIMPLER. La referencia bibliográfica fundamental de esta unidad es el libro de [Versteeg y Malalasekera \(1995\)](#).

En la resolución de los trabajos computacionales se retoma el ordenamiento de complejidad creciente, aplicando esta técnica a las ecuaciones tipo calor y tipo onda y a problemas fluidodinámicos modelados por la ecuación tipo de Burgers. Debido a la mayor complejidad computacional asociada con la aplicación de los algoritmos iterativos SIMPLE o SIMPLER sobre mallas desfasadas, la resolución numérica del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para un problema de un flujo estacionario, bidimensional incompresible y viscoso (por ejemplo, el flujo laminar en un canal bidimensional que presenta un escalón) se solicita únicamente para los estudiantes de posgrado.

2.5 Unidad N°5

Si bien se toma la precaución, desde el inicio del curso, de resaltar que las soluciones computacionales son resultados numéricos que adolecen de todos los errores definidos en la primera Unidad del curso, en esta unidad se hace particular hincapié en la necesidad de verificar y validar los resultados numéricos obtenidos, a través de la lectura de *papers* específicos del tema ([Oberkampf y Trucano, 2002](#); [Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2002](#)) y del conocimiento de la existencia de normativas de [AIAA \(1998\)](#) -de donde provienen la [Figura 3](#) y la [Figura 4](#)- y de [ASME \(2009\)](#).

La [Figura 3](#) representa el procedimiento de verificación, mediante el cual se determina si la implementación de un modelo numérico representa con precisión tanto la descripción conceptual desarrollada para el modelo como la solución del mismo. Mediante la verificación se identifican, cuantifican y se reducen los errores en el modelo computacional y en su solución numérica, por ejemplo, mediante la comparación de la solución numérica obtenida con varios tipos de soluciones de alta precisión, como ser mediante soluciones analíticas o *benchmarks* ([Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2002](#)).

La [Figura 4](#) representa el procedimiento de validación, mediante el cual se evalúa la precisión de la simulación computacional mediante la comparación con resultados experimentales del denominado *mundo real*. La validación involucra la identificación y la cuantificación de las incertidumbres y de los errores tanto de los modelos conceptual como del numérico, cuantificando asimismo los errores numéricos de la solución computacional y estimando las incertidumbres experimentales, para luego comparar los resultados computacionales con los experimentales, ya que se asume que las mediciones experimentales resultan un reflejo más confiable de la realidad ([Oberkampf, Trucano y Hirsch, 2002](#)).

Adicionalmente, dada la gran cantidad de códigos comerciales ahora en uso por los profesionales y en los trabajos finales de carrera de grado (programas generales como el *Fluent* y semejantes, o específicos, como lo constituyen los códigos para el análisis de reservorios de hidrocarburos), es importante mostrar que la utilización de los mismos no constituye -como suele considerarse por partes los usuarios- un 100% de seguridad de alcanzar una exactitud del 100% en los resultados, tal como lo muestran los trabajos publicados por [Freitas \(1995\)](#) e [Iaccarino \(2001\)](#), *papers* que son analizados en clase.

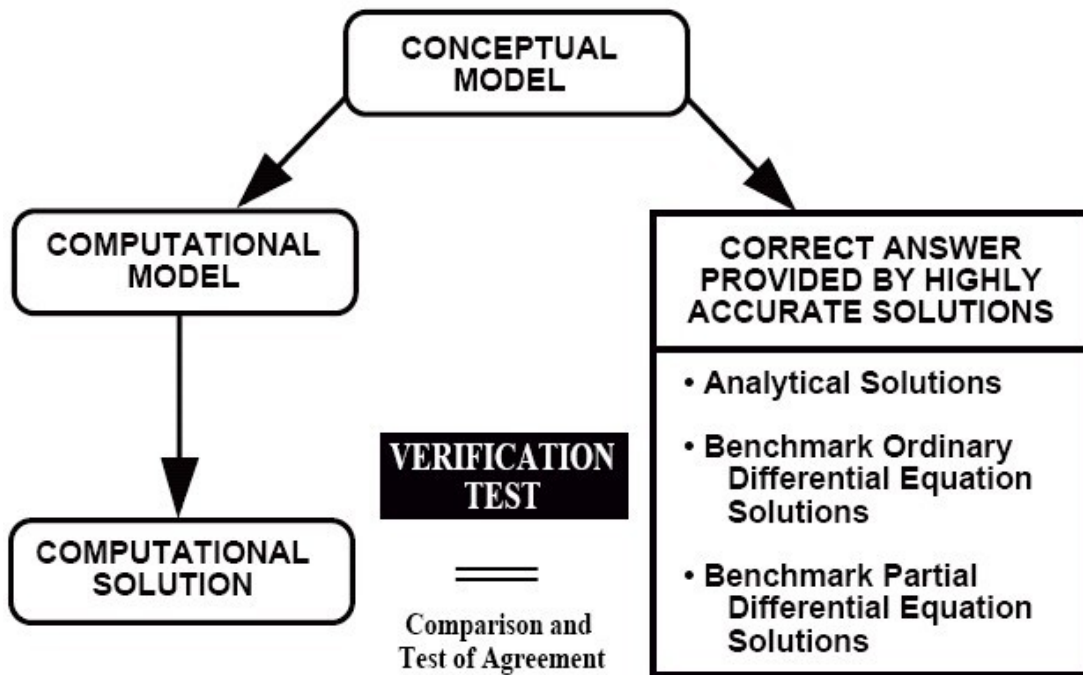


Figure 3: Procedimiento para verificación (AIAA, 1998)

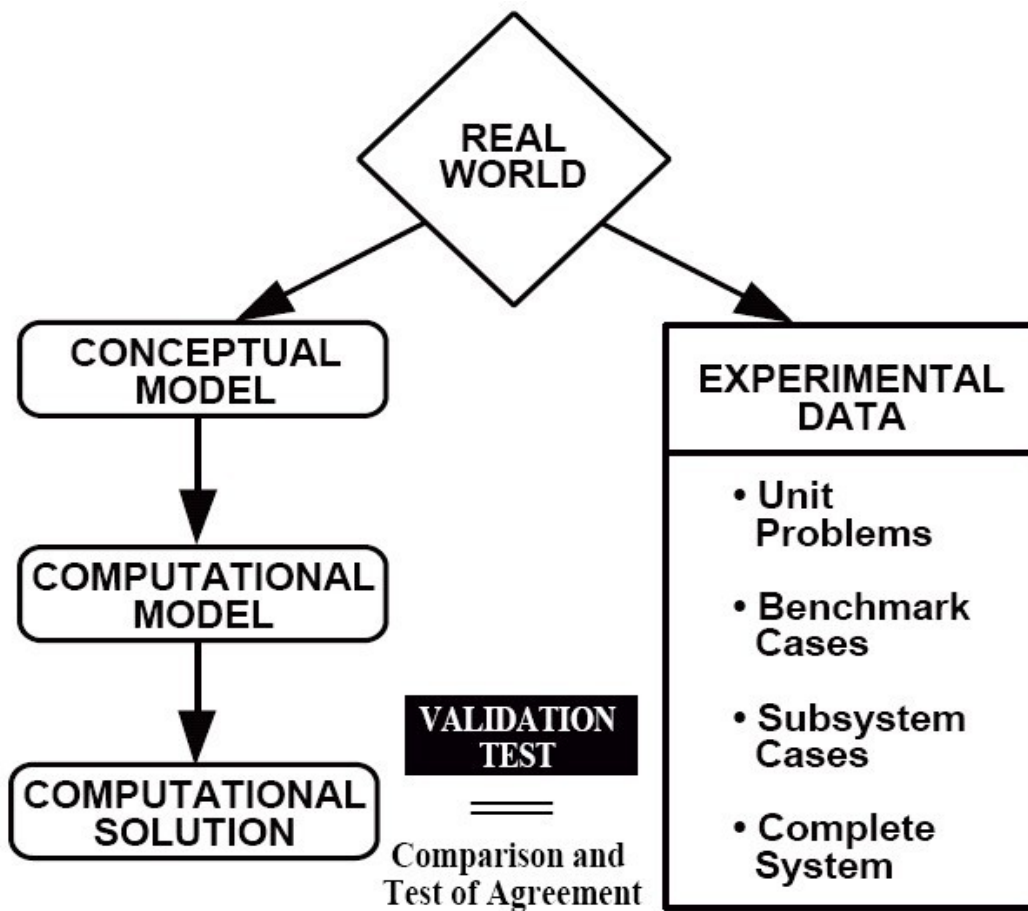


Figure 4: Procedimiento para validación (AIAA, 1998)

3 CONDICIONES DE CURSADO Y ACREDITACION

Dado que este curso trata sobre técnicas numéricas aplicadas a problemas de la física de fluidos, se requiere que los cursantes estén familiarizados con las ecuaciones que gobiernan el movimiento de fluidos. Este conocimiento debe abarcar tanto la descripción del movimiento de partículas mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, como el flujo de porciones macroscópicas de fluidos, haciendo uso de la metodología del volumen de control y el teorema de transporte de Reynolds.

Este requerimiento se complementa con el cursado previo de las materias de Métodos Computacionales en Ingeniería I y II. En la [Figura 5](#) y en la [Figura 6](#) se muestran, respectivamente, los contenidos mínimos requeridos para el dictado de las materias Métodos Computacionales en Ingeniería I y Métodos Computacionales en Ingeniería II, según los Planes de Estudio de las carreras Ingeniería Mecánica e Ingeniería en Petróleo de la Universidad Nacional del Comahue.

ASIGNATURA : MÉTODOS COMPUTACIONALES EN INGENIERÍA I			
CÓDIGO	CUATRIMESTRE	HS/SEM	CORRELATIVAS
5504	V	6	5106(C)
<ul style="list-style-type: none"> - Introducción a la informática. - Arquitectura de las computadoras. - Nociones de sistemas. - Sistemas operativos. - Introducción a la programación. - Análisis de sistemas. - Técnicas de programación. - Un estudio de un lenguaje de alto nivel. 			

Figure 5: Contenidos mínimos de Métodos Computacionales en Ingeniería I.

ASIGNATURA : MÉTODOS COMPUTACIONALES EN INGENIERÍA II			
CÓDIGO	CUATRIMESTRE	HS/SEM	CORRELATIVAS
5505	VI	6	5504(C)-5103(C)-5105-5101
<ul style="list-style-type: none"> - Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. - Resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales. - Derivación numérica. - Integración numérica. - Método de interpolación numérica. - Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. - Método de cálculos matriciales. - Método de los elementos finitos. 			

Figure 6: Contenidos mínimos de Métodos Computacionales en Ingeniería II.

Como puede observarse, la única técnica incluida explícitamente como contenido mínimo de la asignatura Métodos Computacionales en Ingeniería II corresponde al método de los elementos finitos. En cuanto a lenguajes de cómputo, tiempo atrás incluían *Fortran* en la asignatura Métodos Computacionales en Ingeniería I, mientras que actualmente han incorporado el *Scilab*. A pesar de esto, lamentablemente se ha encontrado que los estudiantes poseen un pobre nivel de programación dado que no se han acostumbrado a realizar sus propios códigos computacionales, y que asocian el manejo de una técnica numérica con la utilización de un software, como por ejemplo el *QuickField*, software que puede ser descargado libremente en su versión estudiantil desde <http://www.quickfield.com/>.

Para la aprobación del cursado el alumno debe aprobar un examen parcial referido a los trabajos prácticos con desarrollos conceptuales (análisis de errores, análisis de estabilidad, ecuación modificada, viscosidad numérica, transformación de dominio físico en computacional, transformación de las ecuaciones de gobierno y de sus condiciones auxiliares, etc.) y la entrega de trabajos prácticos computacionales con los correspondientes análisis numéricos y físicos de los resultados. Las calificaciones obtenidas en las actividades anteriores se promediarán con un trabajo especial de características integradoras.

Se entiende por trabajo especial la resolución completa de un problema (análisis de la EDP, generación de la malla, resolución computacional y análisis físico y numérico de los resultados obtenidos) cuyos alcances superen los de un simple trabajo práctico. Este trabajo es de carácter individual, pudiendo optarse por realizar la resolución de un problema propuesto por el propio estudiante pero que debe contar con la aprobación de dicha selección por parte del docente, o un problema propuesto desde la cátedra. En el caso de los estudiantes de posgrado, la elección del problema integrador que constituirá el trabajo especial generalmente está asociada al futuro tema de tesis.

Como fuera ya indicado, cuando el presente curso es tomado por graduados con la finalidad del reconocimiento de créditos para un posgrado, se incrementa la cantidad de trabajos computacionales a resolver (los cuales también presentan mayor complejidad que los correspondientes a resolver por parte de los estudiantes de grado), si bien todos los estudiantes comparten la totalidad de los temas teóricos.

El listado de los Trabajos Prácticos del curso se muestra en la [Figura 7](#). Los Trabajos Prácticos 1 a 5 -que requieren tanto de desarrollos teóricos como computacionales (de relativa simplicidad)- son evaluados mediante el examen parcial antes referido. Los trabajos computacionales propiamente dichos, son desarrollados en los Trabajos Prácticos 6 a 10, involucrando desde una mediana a una mayor dificultad y complejidad.

Los trabajos especiales también se diferencian, según su complejidad, entre los realizados por los estudiantes de grado y los de posgrado. Como ejemplos de trabajos para estudiantes de grado se pueden citar la determinación del flujo que ingresa a una tubería de sección circular, el flujo no estacionario en tuberías de sección no circular, el flujo de fluidos no newtonianos en tuberías, el flujo de Darcy en medios de permeabilidad variable y la resolución de una ecuación tipo Burgers para la difusión de un trazador no reactivo en un problema inyector-productor. En el caso de estudiantes graduados, se pueden citar la determinación de fuerzas hidrodinámicas generadas sobre presas con paramentos inclinados ante una acción sísmica, el cálculo de capas límites laminares, bidimensionales e incompresibles con presencia de gradientes de presión (en dominios discretizados mediante la utilización de mallas algebraicas), el flujo viscoso en un canal con un escalón, el flujo irrotacional sobre un contorno curvo (lo cual involucra la generación de mallas elípticas y la transformación de las ecuaciones de gobierno) y el flujo de geles en una fractura hidráulica con paredes porosas, entre otros problemas.

En la [Tabla 1](#) se muestra la cantidad de cursantes por año de dictado del presente curso en la Facultad de Ingeniería (FAIN) de la UNCo, discriminando dicho número en estudiantes de grado y vocacionales. En la UNCo, la figura de alumno vocacional involucra tanto al graduado interesado a modo particular en la asistencia y aprobación del curso, como el estudiante de posgrado interesado en la obtención de créditos, ya sea de ésta u otra Universidad, como parte de los requisitos para la obtención de un título de posgrado. Por ejemplo, tanto la Universidad Nacional de La Plata como la Universidad Nacional de Córdoba han otorgado créditos a estudiantes inscriptos en sus programas de posgrado que cumplieron los requisitos de aprobación del presente curso.

año	grado	vocacionales
1997	6	1
2000	9	-
2002	8	2
2004	3	-
2006	2	1
2008	5	-
2010	3	1
2011	6	2
2012	3	2

Tabla 1: Número de estudiantes cursantes de grado y vocacionales, en FAIN - UNCo.

Parte del presente curso fue dictado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, entre el 3 y el 7 de agosto de 1998, con una duración de 30 horas. También fue dictado entre el 16 y el 20 de febrero de 2004 en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa (asentamiento General Pico) como curso de posgrado, según Resolución N° 129/03 de fecha 22 de diciembre de 2003.

Cabe aclarar que, siendo este un curso optativo, no se dicta cada año lectivo. En general, y dependiendo de la cantidad de estudiantes interesados, se intercala con otro curso opcional, denominado “Mecánica de los fluidos avanzada”. Es justamente en este curso donde se desarrollan varias soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes, expresiones que son utilizadas en el curso “Fluidodinámica Computacional” para contrastar resultados analíticos con los resultados numéricos del mismo problema.

4 BIBLIOGRAFIA DEL CURSO

En la [Figura 7](#) se indican tanto la bibliografía básica como la de consulta del presente curso, las cuales se encuentran disponibles en la cátedra y particularmente, como material impreso o en formato *.pdf*, tanto sean libros, normas, *papers* o apuntes de cátedra (solo estos últimos en castellano). Desde ya, el auge de la utilización de las técnicas numéricas ha dado origen a una gran cantidad de textos específicos de mecánica de fluidos computacional, tanto generales como especializados en una determinada área de la ingeniería, los cuales son aptos para ser utilizados por parte del alumnado como material bibliográfico del curso.

Adicionalmente, parte de este material está disponible vía *internet*, con lo cual se compensa la falta de bibliografía específica en la Biblioteca Central de la UNCo. Por ejemplo, el libro *Numerical Grid Generation* (Thompson *et al.*, 1997) está actualmente disponible *online* desde <http://www.erc.msstate.edu/publications/gridbook/>, siendo esta publicación una de las referencias básicas en el tema generación de mallas.

Es conocida la incontable cantidad de *papers* u otro tipo de publicaciones de acceso libre, legal y gratuitamente disponibles mediante la utilización de buscadores generales o específicos (como, por ejemplo, el *Google Scholar*, <http://scholar.google.com/>), a través de la Biblioteca Electrónica de Ciencia y Tecnología (<http://www.biblioteca.mincyt.gov.ar/>), o del *CIMEC Document Repository* (<http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/cimec-repo>). Por otra parte, desde la cátedra se intenta promover que los estudiantes realicen esta búsqueda bibliográfica como paso previo e ineludible al desarrollo de los trabajos especiales.

LISTADO DE TRABAJOS PRÁCTICOS	
T.P. Nº 1: Clasificación EDPs	T.P. Nº 6: Mallas algebraicas
T.P. Nº 2: Esquemas en diferencias finitas	T.P. Nº 7: Mallas elípticas
T.P. Nº 3: Análisis de estabilidad	T.P. Nº 8: Resolución de problemas en variables primitivas
T.P. Nº 4: Ecuación modificada	T.P. Nº 9: Resolución de problemas con función de corriente - vorticidad
T.P. Nº 5: Transformaciones de coordenadas	T.P. Nº 10: Volúmenes finitos

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
[1] Smith G.D.: <i>"Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods"</i> , Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Third Edition, Clarendon Press, Oxford University Press; 1987.
[2] Anderson D.A., Tannehill J.C & Pletcher R.H.: <i>"Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer"</i> , Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company; 1984.
[3] Fletcher C.A.J.: <i>"Computational Techniques for Fluid Dynamics"</i> , Springer Series in Computational Physics, Vol. I & II, Second Edition, Springer-Verlag; 1991.
[4] Thompson J.F., Warsi Z.U.A. & Mastin C.W.: <i>"Numerical Grid Generation – Foundations and Applications"</i> , North Holland – Elsevier Science Publishing Co., Inc.; 1985.
[5] Patankar S.V.: <i>"Numerical Heat Transfer and Fluid Flow"</i> , McGraw-Hill, New York; 1980.
[6] Versteeg H.K. & Malalasekera W.: <i>"An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method"</i> , Longman Group Limited; 1995.
[7] Hirsch C.: <i>"Numerical computation of internal and external flows"</i> , Vol. I & II, John Wiley & Sons, 1989.
[8] Peaceman D.W.: <i>"Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation"</i> , Developments in Petroleum Science 6, Elsevier, 1977.
[9] Freitas C. J.: "Perspective: Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes", <i>Journal of Fluids Engineering</i> , Transaction of the ASME, Vol. 117, pp.208-218, June 1995.
[10] Iaccarino G.: "Predictions of a Turbulent Separated Flow Using Commercial CFD Codes", <i>Journal of Fluids Engineering</i> , Transaction of the ASME, Vol. 123, pp.819-828, Dec. 2001.
[11] Oberkampf W.L., Trucano T.G. & Hirsch C.: <i>"Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics"</i> , Foundations for Verification and Validation in the 21 st Century Workshop, October 22-23, 2002.

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA
[12] Baysal O. (editor): <i>"Recent Advances and Applications in Computational Fluid Dynamics"</i> , FED-Vol.103, The American Society of Mechanical Engineers; 1990.
[13] Celik I. & Freitas C.J. (editores): <i>"Benchmark Test Cases for Computational Fluid Dynamics"</i> , FED-Vol.93, The American Society of Mechanical Engineers; 1990.
[14] Marini, Martino: <i>"An elliptic Technique to Generate Orthogonal Grids Along Boundaries"</i> , FED-Vol. 119, Fluid Machinery Forum, ASME; 1991.
[15] Bugada Castellfort, Gabriel: <i>Tesis Doctoral</i> , Universidad Politecnica de Catalunya, Capitulo 3.3: Técnicas de generación de mallas estructuradas.
[16] Shih T.I-P., Bailey R.T., Nguyen H.L. & Roelke R.J.: <i>"Algebraic Grid Generation for Complex Geometries"</i> , International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.13, pp.1-31; 1991.
[17] Jeng Y.N. & Kuo W.J.: <i>"Two-dimensional Elliptic Grid Solver Using Boundary Grid Control and Curvature Correction"</i> , <i>AIAA Journal</i> , Vol. 38, No. 2 pp. 217-223, February 2000.
[18] ASME V&V 20-2009 "Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer", The American Society of Mechanical Engineers; 2009.

Figure 7: Listado de los trabajos prácticos y de la bibliografía del curso.

5 COMENTARIOS ADICIONALES

Lamentablemente, se evidencia año a año que los estudiantes inician el presente curso sin tener un preciso reconocimiento de los errores involucrados en el proceso de cálculo de una solución numérica -a pesar de tener cursadas (y aún aprobadas) dos materias obligatorias como lo son Métodos Computacionales en Ingeniería I y II-. En adición, mayoritariamente consideran que el uso de programas computacionales, comerciales o no, (utilización generalmente llevada a cabo sin un análisis racional de las acciones que se están realizando) conduce a la obtención de resultados exactos, exactitud que es además resaltada informando esos resultados, mayoritariamente, con una decena de decimales.

Adicionalmente y sin capacidad alguna de fundamentar sus dichos, una mayoría de estudiantes también llegan a expresar la absoluta supremacía del método de los elementos finitos (EF) por sobre cualquier otra técnica (posiblemente por el hecho de conocer solamente dicha metodología de resolución numérica, como fuera comentado en referencia a los contenidos mínimos de la asignatura Métodos Computacionales en Ingeniería II). Por esta razón, en el transcurso del curso las técnicas DF, VF y EF se comparan en el ejemplo tipo de la ecuación de Burgers lineal estacionaria, unidimensional, para diferentes números de Péclet de grilla y para diferentes esquemas en las tres metodologías (pero finalmente en procesos equivalentes que conducen a los mismos sistemas de ecuaciones algebraicas), mostrando que estas técnicas pueden trabajar idénticamente bien, o idénticamente mal.

Otro aspecto que se considera preocupante es que una cantidad creciente de estudiantes, de todas las carreras de Ingeniería de esta Facultad, completan su graduación mediante la presentación de un Proyecto Integrador Profesional (PIP) en donde han utilizado programas tanto comerciales como libres, sin tener -a mi entender- un sólido conocimiento de lo que se está realizando desde el punto de vista de la modelación numérica y de todos los posibles errores que resultan involucrados en el proceso de resolución de un problema físico, confiando ciegamente en la infalibilidad de los resultados obtenidos. Por tratarse de una asignatura optativa, el curso aquí presentado no es requerido como condición previa a la realización de un PIP que involucra la aplicación de técnicas numéricas (mediante el uso de códigos computacionales) en problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor.

6 CONCLUSIONES

Se han presentado los lineamientos generales de un curso referido a la aplicación de las técnicas numéricas de las diferencias finitas y de los volúmenes finitos a problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor, dirigido a alumnos avanzados de las carreras Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Petróleo e Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. También puede ser cursado por alumnos vocacionales, ya graduados, presentando en este caso una mayor carga de trabajos computacionales. En el caso de los estudiantes de grado, este curso tiene la característica de ser optativo.

Si bien gracias a la aplicación de las técnicas computacionales se está en condiciones de resolver numéricamente una cantidad de problemas antes impensada, por lo anteriormente expuesto, se considera de relevancia no perder de vista el carácter aproximado de una solución numérica, resaltando asimismo la necesidad de corroborar los resultados obtenidos. Este curso está planteado entonces no para temer de aplicar técnicas numéricas, sino, por el contrario, para conocer los fundamentos de estas metodologías, reconocer sus alcances y sus falencias o limitaciones, y recordar siempre de trabajar con el entendimiento y la rigurosidad necesarios con el fin de demostrar que estas técnicas representan herramientas fundamentales en la vida profesional del ingeniero.

REFERENCIAS

- AbdulNour, B.S. and Potter, M.C., A Stable, Iterative Finite-Difference Procedure for the Navier-Stokes Equations, *Benchmark Test Cases for Computational Fluid Dynamics*, FED-Vol. 93, ASME, Celik I. & Freitas C.J. (eds.), 1990.
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- AIAA, Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations, American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-G-077-1998(2002), Reston, VA, 1998.
- ASME, Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer, The American Society of Mechanical Engineers, V&V 20-2009, 2009.
- Freitas, C. J., Perspective: Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes, *Journal of Fluids Engineering*, Transaction of the ASME, 117:208-218, June 1995.
- Iaccarino, G., Predictions of a Turbulent Separated Flow Using Commercial CFD Codes, *Journal of Fluids Engineering*, Transaction of the ASME, 123:819-828, December 2001.
- Oberkampf, W.L., and Trucano, T.G, *Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics*, SAND2002-0529, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, March 2002.
- Oberkampf, W.L., Trucano, T.G., and Hirsch, C., Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics, *Foundations for Verification and Validation in the 21st Century Workshop*, Johns Hopkins University-Applied Physics Laboratory, Laurel, Maryland, October 22-23 2002.
- Thompson J.E., Warsi Z.U.A., and Mastin C.W., *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*, previously published by Elsevier Science Publishing Co., Inc. in 1985. Copyright transferred to Joe F. Thompson in 1997, disponible *online* en <http://www.erc.msstate.edu/publications/gridbook/>
- Versteeg, H.K., and Malalasekera, W., *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*, Longman Group Limited, 1995.