

## **SOBRE LA ENSEÑANZA DEL MÉTODO DE RITZ: INFLUENCIA DE LA ELECCIÓN DE LAS FUNCIONES COORDENADAS EN LA RESPUESTA MECÁNICA DE PLACAS LAMINADAS**

**Mario W. E. Toledo<sup>a</sup>; Liz G. Nallim<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente Salta, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5.150 4400 Salta, Argentina. mwtoledo@unsa.edu.ar*

<sup>b</sup>*INIQUI-CONICET, Argentina, [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar)*

**Keywords:** Método de Ritz; placa laminada; condiciones de contorno.

**Resumen.** La obtención de una solución analítica, aún cuando ésta sea aproximada, para el estudio del comportamiento estático y dinámico de placas laminadas presenta una serie de dificultades. Una alternativa ampliamente utilizada se basa en el empleo del Método de Ritz con distinto tipo de funciones de aproximación. Una de las principales ventajas de este método radica en que las funciones coordenadas elegidas deben satisfacer solamente las condiciones de contorno geométricas o esenciales. Por tal motivo, el Método de Ritz se torna especialmente atractivo cuando las condiciones de contorno naturales son difíciles de satisfacer. Las placas laminadas equiángulares (simétricas o no simétricas) presentan una serie de acoplamientos mecánicos, que se traducen en rigideces adicionales incluidas en las ecuaciones diferenciales y en las condiciones de contorno, que llevan a que no exista solución exacta. Una opción para obtener soluciones analíticas aproximadas en estos casos, es recurrir al empleo del Método de Ritz con funciones vigas independientes en cada dirección como funciones coordenadas (solución en forma de variables separables). Sin embargo, se torna clave la elección de estas funciones viga, ya que se puede demostrar que el uso de funciones trigonométricas o hiperbólicas, que conducen a la solución exacta en el caso de placas isótropas, puede llevar a soluciones oscilantes en el caso de placas anisótropas. Por esta razón, en este trabajo se presenta el análisis de problemas de flexión y vibración de placas laminadas a través del empleo del método de Ritz, utilizando como funciones admisibles polinomios ortogonales y funciones vigas trigonométricas e hiperbólicas. Las soluciones obtenidas para la deflexión, momentos, cortantes y frecuencias de vibración, para diferentes condiciones de contorno, se comparan con los resultados obtenidos con el Método de los Elementos Finitos, con énfasis en la convergencia y la manera en que, para los diferentes métodos, se tienden a satisfacer las condiciones de contorno naturales. Los resultados obtenidos son especialmente interesantes para la enseñanza del Método Variacional de Ritz, así como la influencia que tiene en la respuesta las funciones coordenadas elegidas, considerando además que el algoritmo obtenido puede programarse fácilmente, siendo evidente en la solución la influencia de los acoplamientos mecánicos que se producen en las placas laminadas.

## 1 INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos más sensibles y, a la vez, más conceptuales en la aplicación del Método de Ritz es la elección de las funciones coordenadas que permiten constituir las funciones de aproximación. El método de Ritz se encuentra, en general, dentro de la currícula de la asignatura Mecánica de los Sólidos en carreras de postgrados en estructuras. La comprensión de este tema así como la aplicación y la resolución de problemas es esencial para avanzar en el método de los elementos finitos. Para la enseñanza del método de Ritz es necesario que los alumnos posean conocimientos previos de cálculo variacional y teoría de la elasticidad.

Las dificultades propias en el proceso de aprendizaje de los Métodos Variacionales tienen diferentes orígenes, muchos de éstos están relacionados con los conocimientos previos sobre la físico-mecánica del problema a resolver y en menor proporción con los procedimientos a aplicar. Sin embargo, la aplicación de una técnica o procedimiento, en este caso del Método de Ritz, implica no sólo un aprendizaje receptivo y memorístico, sino que es necesario avanzar hacia un aprendizaje significativo. Esto es relevante en la formación de alumnos de posgrado que deberán luego afrontar los desafíos inherentes a la realización de una tesis, en donde deberán resolver situaciones de manera crítica, mostrando tanto un entendimiento conceptual como un conocimiento procedimental.

Por las razones expuestas en este trabajo se presentan resultados de la aplicación del Método de Ritz en la determinación de la respuesta estática y dinámica de placas laminadas simétricas, haciendo énfasis en el comportamiento de diferentes funciones coordenadas en relación a las condiciones de contorno. Se plantea una estrategia didáctica que consiste en hacer explícita la aplicación de los conocimientos teóricos a situaciones problemáticas, para conseguir una mejor integración de los conocimientos declarativos y procedimentales. En este trabajo se plantea como situación problemática el análisis de comportamiento mecánico de placas laminadas, empleando el Método de Ritz. Para la mejor comprensión de este método y, en particular, la influencia de la elección de las funciones coordenadas se propone emplear distintos tipos de funciones coordenadas, estudiar la convergencia de respuestas globales y locales, y comparar los resultados con los que se obtienen de la aplicación de un software comercial de elementos finitos. Lo expresado se puede enmarcar en las siguientes estrategias didácticas generales (Campanario et al., 1998):

- a) Planteo de la *situación problemática* para generar el interés en el alumno y proporcionar una concepción preliminar de la tarea (Sección 2 de este artículo).
- b) Mediante trabajo en grupo los alumnos *estudian cualitativamente* la situación problemática planteada. Con el apoyo bibliográfico y de los conceptos teóricos impartidos en clase los alumnos empiezan a delimitar el problema y a explicitar las ideas (Secciones 2 y 3 de este artículo).
- c) El problema planteado se resuelve para las propiedades materiales seleccionadas, empleando diferentes orientaciones de la fibra de refuerzo, condiciones de contorno y funciones coordenadas en el Método de Ritz (Sección 4 de este artículo).
- d) Finalmente se propone una discusión colectiva de las conclusiones obtenidas y se plantean situaciones similares en las que se pueden aplicar las mismas (Sección 5 y 6 de este artículo).

Es importante destacar, que mediante la situación problemática planteada en este trabajo, es posible observar cómo la elección de las funciones coordenadas influye en la respuesta numérica y mecánica condicionando la convergencia. Paralelamente, queda claro al alumno la diferencia entre las condiciones de contorno geométricas y naturales, no sólo a nivel de definición matemática sino a nivel mecánico. Finalmente, se pretende que el alumno resuelva

el problema aplicando un software comercial de elementos finitos (con el que esté familiarizado) a efectos de comparar los modelos, el nivel de convergencia, y comprenda la diferencia entre la discretización del dominio y el aumento de funciones coordenadas en el método variacional de Ritz.

## 2 PLANTEO GENERAL DEL PROBLEMA E HIPÓTESIS

La obtención de soluciones analíticas para el análisis estático y dinámico de placas anisótropas, homogéneas o laminadas, se complica por la presencia de acoplamientos entre los efectos flexionales y torsionales. Si se trabaja con la Teoría Clásica de Placas Laminadas (CLPT) (Reddy, 1997) y se emplean índices repetidos para denotar sumatoria, para una placa anisótropa de espesor  $h$  (Figura 1), se pueden expresar las relaciones constitutivas a nivel seccional como:

$$M_i = D_{ij} \kappa_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (1)$$

donde  $M_i$  y  $\kappa_j$  denotan los momentos y las curvaturas respectivamente.

Las rigideces  $D_{ij}$  de una placa anisótropa están dadas por:

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz \quad (2)$$

donde  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  representan las rigideces reducidas para el estado plano de tensiones de la  $k$ -ésima lámina, cuyos ejes principales de ortotropía se encuentran rotados un ángulo  $\beta_k$  respecto de los ejes coordenados  $x-y$  (paralelos a los lados de la placa) (Reddy, 1997):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11} m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) n^2 m^2 + Q_{22} n^4, \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{12} (n^4 + m^4), \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{11} n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) n^2 m^2 + Q_{22} m^4, \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) n m^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) n^3 m, \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) n^3 m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) n m^3, \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{66} (n^4 + m^4), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $m = \cos \beta_k$  y  $n = \sin \beta_k$ .

Es importante notar que cuando los ejes principales de ortotropía coinciden con los ejes cartesianos  $x-y$  las rigideces  $\bar{Q}_{16}^{(k)} = 0$  y  $\bar{Q}_{26}^{(k)} = 0$ , lo que lleva a que sea nulo el acoplamiento flexo-torsional en las expresiones de los momentos (Ec. (1)). A este tipo de placas se las denomina *especialmente ortótropas*. Por los mismos motivos, en los laminados cruzados (*cross-ply*) son nulos los acoplamientos flexo-torsionales.

Por otra parte, la Ec. (1) es aplicable a placas laminadas con secuencia de apilamiento simétrica respecto al plano medio. En el caso de laminados no simétricos se producen

acoplamientos adicionales entre las deformaciones en el plano y las deformaciones flexo-torsionales.

La existencia de los términos de acoplamiento flexo-torsionales, representados por los términos que acompañan a  $D_{16}$  y  $D_{26}$ , hacen imposible el uso de los enfoques clásicos de Navier o de Levy. Así, otras técnicas tales como los métodos de Ritz o el Método de los Elementos Finitos resultan apropiadas para resolver problemas de flexión de placas anisótropas. El métodos de Ritz es especialmente atractivo para su empleo en el dictado de clases ya que permite obtener soluciones analíticas (aunque sean aproximadas), de manera simple, para distintas condiciones de contorno y, simultáneamente, pueden ser empleadas para verificar resultados obtenidos con métodos numéricos más sofisticados.

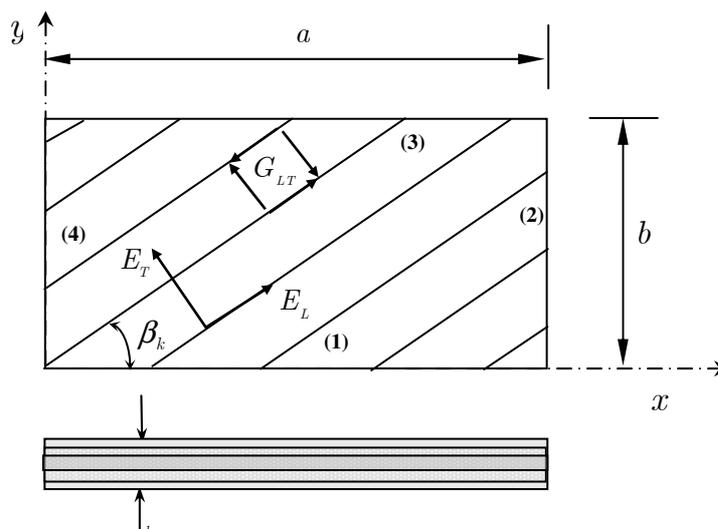


Figura 1: Placa anisótropa ( $L, T$ : Ejes principales de ortotropía)

## 2.1 Método de Ritz

El enfoque variacional de Ritz se basa en la formulación energética del problema, dada para los casos estático y dinámico, respectivamente por (Whitney, 1972):

$$\Pi_e = U + V, \quad (4)$$

$$\Pi_d = U - T_{max}, \quad (5)$$

donde  $U$  es la energía de deformación,  $V$  es la energía potencial de las cargas exterior uniformemente distribuida y  $T_{max}$  es la energía cinética máxima (caso de vibración libre) de la placa de densidad  $\rho$ . Las expresiones correspondientes están dadas por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (6)$$

$$V = - \int_0^b \int_0^a q w dx dy, \quad (7)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^b \int_0^a \rho w^2 dx dy. \quad (8)$$

La deflexión  $w$  es aproximada en forma de variables separables mediante funciones viga, a través de la siguiente expresión:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (9)$$

donde  $X_i(x)$  e  $Y_j(y)$  son funciones linealmente independientes en cada dirección que satisfacen las condiciones de contorno esenciales en  $x = 0, a$  e  $y = 0, b$ . Substituyendo la deflexión dada por la Ec. (9) en las Ecs. (4) y (5) y minimizando con respecto a cada  $c_{ij}$  se obtiene un sistema de  $M \times N$  ecuaciones lineales simultáneas (o un problema de autovalores para el caso dinámico) para la determinación de las incógnitas  $c_{ij}$ .

En este trabajo se toman dos tipos de funciones coordenadas, por un lado se trabaja con funciones modales de vigas, constituidas por funciones trigonométricas e hiperbólicas (Young, 1949); por otra parte se trabaja con polinomios ortogonales característicos generados con el proceso de Gram-Schmidt (Bhat, 1985; Nallim et. al., 2003 y 2005).

## 2.2 Estudio del comportamiento de distintas funciones coordenadas en el análisis de placas anisótropas

Para una ecuación diferencial de orden  $2m$ , las condiciones de contorno que contienen la función  $w$  y derivadas de  $w$  de orden hasta  $m - 1$  se denominan estables o geométricas y aquellas que contienen derivadas de orden superior a  $m - 1$  se llaman inestables o naturales (Necas, 1967). Cuando se emplea el método de Ritz se escoge una secuencia de funciones  $w_i$  que constituye una base en el espacio  $V$ , donde sólo las condiciones de contorno estables homogéneas están incluidas, de esta manera no es necesario que las funciones  $w_i$  satisfagan las condiciones de contorno naturales (Mikhlin, 1964; Rektorys, 1980).

El hecho que las funciones coordenadas seleccionadas no necesiten satisfacer las condiciones de contorno naturales, es una característica muy importante del método de Ritz, especialmente cuando se trata de problemas para los cuales tal satisfacción es difícil de lograr, tal es el caso, por ejemplo, de placas anisótropas (Nallim, 2003). Wang (1969) demostró que la solución exacta para problemas de flexión de placas anisótropas con condiciones de borde simplemente apoyada no puede ser representada por una solución en términos de variables separables, ya que esta solución no conduce a un conjunto completo de funciones sobre el dominio de la placa. Por esta razón, Ashton (1970) propuso utilizar como funciones coordenadas doble series de senos en el método de Ritz. En el caso de una placa anisótropa general, las series dobles de senos satisfacen la condición de desplazamiento nulo en el borde pero no la condición de momento nulo. Se puede demostrar (Nallim and Grossi, 2003) que mientras las deflexiones convergen lentamente, el momento flector oscila con el incremento de términos de la serie. La convergencia mejora sensiblemente para una placa especialmente ortótropa (es decir con ejes de ortotropía paralelos a los lados de la placa) en la cual los términos de acoplamiento flexo-torsional son nulos. Por lo tanto, es fácil observar que las rigideces de acoplamiento  $D_{16}$  y  $D_{26}$ , que multiplican a las derivadas cruzadas de la deflexión transversal (curvatura torsional  $\kappa_6$ ), tienen un efecto importante sobre la convergencia de la solución.

Para una placa empotrada la solución en el enfoque de Ritz puede ser aproximada usando funciones de formas modales características para una viga empotrada (Ashton, 1970). A diferencia del caso de bordes simplemente apoyados, los bordes empotrados involucran sólo condiciones geométricas. Hay pocas referencias bibliográficas en lo que hace a problemas con condiciones de borde mixtas (empotrado - simplemente apoyado, empotrado - libre, simplemente apoyado - libre, etc.), pero en general se puede observar que las soluciones obtenidas en estos casos, cuando se emplean funciones vigas características son oscilantes (Gawandi et al., 2008). Por esta razón, surge la pregunta respecto a cómo se comporta la solución cuando se utilizan funciones coordenadas polinómicas o cuando se emplea el Método de los Elementos Finitos (MEF) que es una forma especial del Método de Ritz. En particular, para programas de elementos finitos estándar, en los que se emplean elementos de deformación constante (SAP, 2010), no se satisfacen las condiciones de contorno naturales.

### 3 CONDICIONES DE CONTORNO

Consideremos la placa rectangular anisótropa que se muestra en la Figura 1, de la que se toma, a modo de ejemplo, el lado (2) definido por  $x = a$  y diferentes condiciones de contorno.

- En el caso de una placa empotrada en el lado  $x = a$ , las condiciones de borde son todas geométricas y están dadas por:

$$w(a, y) = 0, \quad (10.a)$$

$$\frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = 0. \quad (10.b)$$

En este caso los términos de la Ec. (9) correspondientes a la función viga equivalente satisfacen exactamente las condiciones de contorno dadas por las Ecs. (10).

- En el caso que la placa se encuentre simplemente apoyada en el borde  $x = a$  las condiciones de contorno están dadas por:

$$w(a, y) = 0, \quad (11.a)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x \partial y} = 0. \quad (11.b)$$

Cuando la placa es isótropa o especialmente ortótropa (o sea, los ejes de ortotropía son paralelos a los lados de la placa) (Whitney, 1987), los términos de la Ec. (9), que satisfacen  $w(a, y) = 0$  y  $\partial^2 w(a, y) / \partial x^2 = 0$ , verifican también la Ec. (11.a) y la condición de contorno natural dada por la Ec. (11.b), debido a que esta última condición se reduce a  $D_{11} \partial^2 w(a, y) / \partial x^2 = 0$  por ser  $X_i(a) = 0$  y  $D_{16} = 0$ . Sin embargo, cuando se trata de placas anisótropas o laminados equiangulares los términos de la Ec. (9) no pueden satisfacer la condición inestable dada por la Ec. (11.b).

- Finalmente, si el borde  $x = a$  se encuentra libre las dos condiciones de contorno son inestables, y están dadas por:

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x \partial y} = 0, \quad (12.a)$$

$$\begin{aligned}
 -Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = & D_{11} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x^3} + D_{12} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial y^2 \partial x} + 2D_{16} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + 2 \left( D_{16} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x^2 \partial y} + D_{26} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial y^3} + 2D_{66} \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x \partial y^2} \right).
 \end{aligned} \tag{12.b}$$

Las funciones viga no pueden satisfacer las condiciones inestables dadas por las Ecs. (12), ni siquiera si se trata de placas isótropas u ortótropas.

#### 4 PROPIEDADES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS DE LAS PLACAS A ANALIZAR

Este trabajo está restringido a placas delgadas, por lo que las propiedades efectivas de los laminados se obtienen a partir de las propiedades de cada lámina empleando la teoría clásica de placas laminadas (Whitney, 1972; Reddy, 1997). En los casos analizados se utilizó las siguientes propiedades mecánicas para una lámina expresada en los ejes de ortotropía:

$$\frac{E_L}{E_T} = 25; \frac{G_{LT}}{E_T} = 0,25; \nu_{LT} = 0,25 \tag{13}$$

donde  $E_L$ ,  $E_T$  son los módulos de elasticidad paralelo y transversal a la dirección de la fibra (ver Figura 1) respectivamente;  $\nu_{LT}$  la Relación de Poisson; y  $G_{LT}$  es el módulo de corte en el plano  $LT$ .

Se desprecian las deformaciones por corte tanto en el método de Ritz como en el enfoque de elementos finitos. Para el análisis estático las placas se someten a una carga uniformemente distribuida, mientras que para el análisis dinámico se considera vibración transversal libre.

A los efectos de lograr los objetivos planteados se analizaron placas constituidas por una única lámina con dos orientaciones de fibra diferente y dos tipos de laminados simétricos. Para estos casos se adoptaron diferentes condiciones de contorno que abarcan condiciones inestables, estables y combinaciones de ambas. En la Tabla 1 se resumen los tipos de placas analizadas. En cada caso, se determinaron las deflexiones, los momentos resultantes calculados a lo largo de la línea central de la placa en las direcciones  $x$  e  $y$ , los esfuerzos de corte y momentos torsores calculados a lo largo de la línea central de la placa en la coordenada  $x$ .

Tanto las deflexiones  $w$ , los momentos  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ , el Corte  $Q_x$  y la frecuencia natural de vibración  $\omega$  han sido normalizados empleando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 w &= Rq \left( \frac{b^4}{D_{LL}} \right), \\
 M_x &= K_x q b^2, \\
 M_y &= K_y q a^2, \\
 Q_x &= T_x q b, \\
 M_{xy} &= K_{xy} q a b, \\
 \omega &= \frac{\Omega}{b^2} \sqrt{\frac{D_{LL}}{\rho h}},
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $D_{LL} = \frac{E_L h^3}{12(1 - \nu_{LT}^2 E_T / E_L)}$  es la rigidez de referencia.

Placas	Lámina			Laminados	
	0°	45°		0°/90°/0°	-45°/45°/-45°
Restricciones de borde	 Simplemente apoyado	 Empotrado	 Empotrado-libre empotrado-simpl. apoyado	 Simplemente apoyado	 Empotrado-libre empotrado-simpl. apoyado

Tabla 1: Láminas y laminados analizados

## 5 OBTENCIÓN DE RESULTADOS Y ANÁLISIS CRÍTICO

### 5.1 Estudio de convergencia

En esta sección se presentan los resultados correspondientes a estudios de convergencia realizados en placas constituidas por una única lámina con dos configuraciones: 0° y 45°, y dos tipos de condiciones de contorno: bordes simplemente apoyados en todo el contorno y empotrados en todo el contorno. De esta manera es posible abarcar condiciones de contorno estables e inestables (placas simplemente apoyadas) y sólo condiciones estables (placas empotradas). Paralelamente es posible observar la influencia que tiene el acoplamiento flexo-torsional en las placas con distinto tipo de apoyo, ya que en la placa orientada a 0° los coeficientes de acoplamiento son nulos. Los resultados de la convergencia se presentan para los casos de deflexión estática y momento flector, ambos evaluados en el centro de las placas, asimismo se muestra la convergencia para el valor de la frecuencia fundamental. En cada gráfico de convergencia se presentan tres curvas: dos de ellas corresponden a la aplicación del método de Ritz, con polinomios ortogonales y con funciones modales viga como funciones coordenadas, la tercera curva corresponde a la aplicación del método de los elementos finitos. En las Figuras 2, 3 y 4 se presentan los resultados correspondientes a placas simplemente apoyadas en todo su contorno. Se aprecia que los resultados correspondientes a las denominadas respuestas globales de la estructura (deflexión y frecuencia) tienden a estabilizarse cuando se aumenta el número de términos en el método de Ritz o la discretización del dominio en el MEF. Sin embargo, es notorio el comportamiento oscilante que se aprecia en la Fig. 3b que corresponde a una lámina a 45°, cuando se utiliza el método de Ritz con funciones trigonométricas. Esto se debe a que en el campo de desplazamiento dado por la Ec. (9) las funciones vigas coordenadas son:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \text{sen}(i\pi x / a) \text{sen}(j\pi y / b) \quad (15)$$

Cada término de la serie dada en la Ec. (15) está restringido a satisfacer las condiciones de contorno inestables en el caso de placas isótropas u ortótropas. Sin embargo, no satisfacen la condición de contorno inestable dada por la Ec. (11.b) en el caso de placas anisótropas. El hecho de satisfacer una parte de la condición inestable dada por la Ec. (11.b) hace que estas funciones de aproximación soberrigidicen el sistema, obteniéndose una solución oscilante en el caso que las respuestas involucren a derivadas de los desplazamientos (por ejemplo momento flector). También es importante observar que la convergencia en la lámina a 0° es mucho más uniforme y homogénea para las tres curvas (Figs. 2a, 3a, 4a).

Las Figs. 5, 6 y 7 presentan los resultados correspondientes a placas empotradas en todo su contorno. Se aprecia que los resultados son convergentes para todos los casos, siendo mayor la velocidad de convergencia en el caso de la lámina a  $0^\circ$ . De todas maneras es importante destacar que la velocidad de convergencia es mayor que en el caso de las placas simplemente apoyadas (Figs. 2 a 4), ya que en este caso todas las condiciones de contorno son estables.

Finalmente, es importante destacar que el comportamiento de las respuestas cuando se emplean polinomios ortogonales como funciones coordenadas es similar al obtenido con la aplicación del método de los elementos finitos.

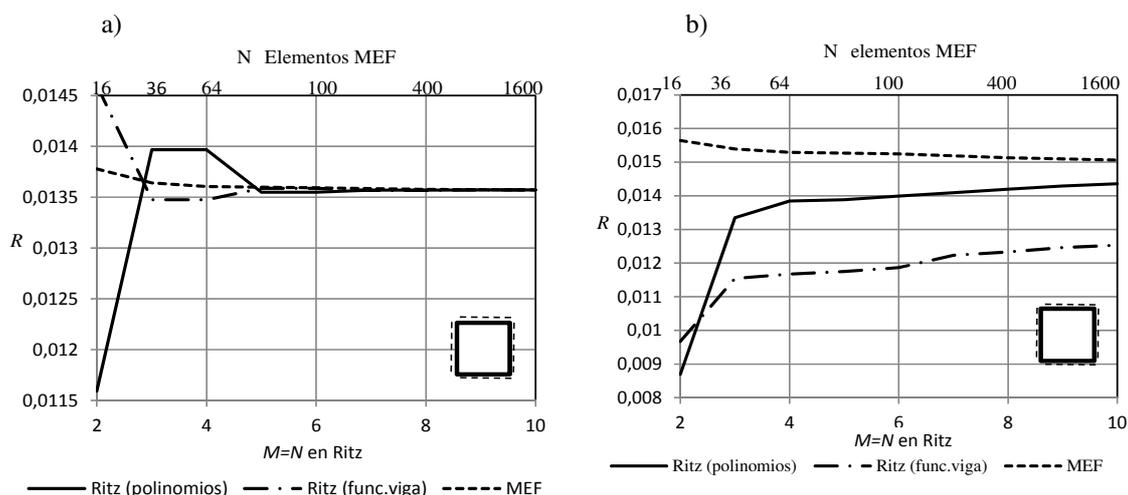


Figura 2: Convergencia de deflexión  $w$  en el centro de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

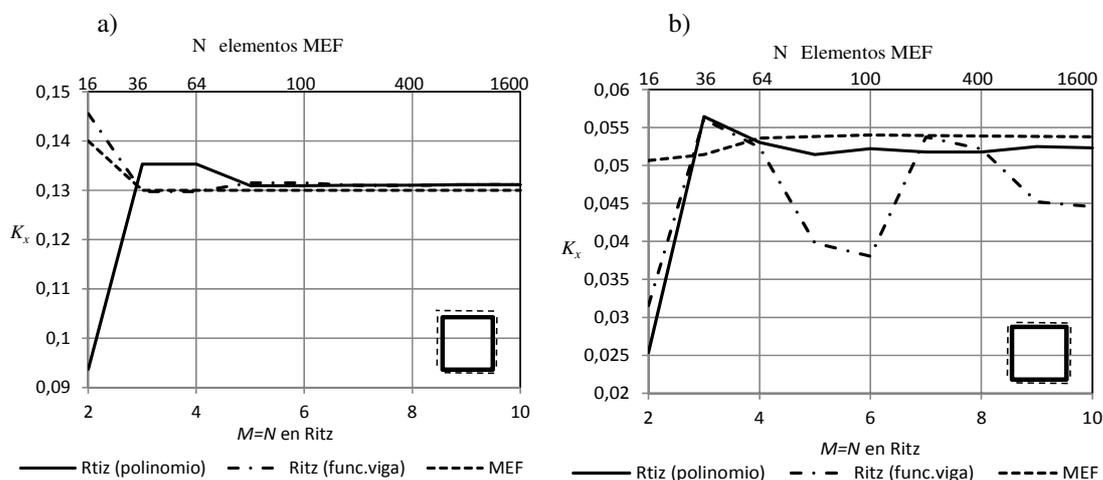


Figura 3: Convergencia de momento  $M_x$  en el centro de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

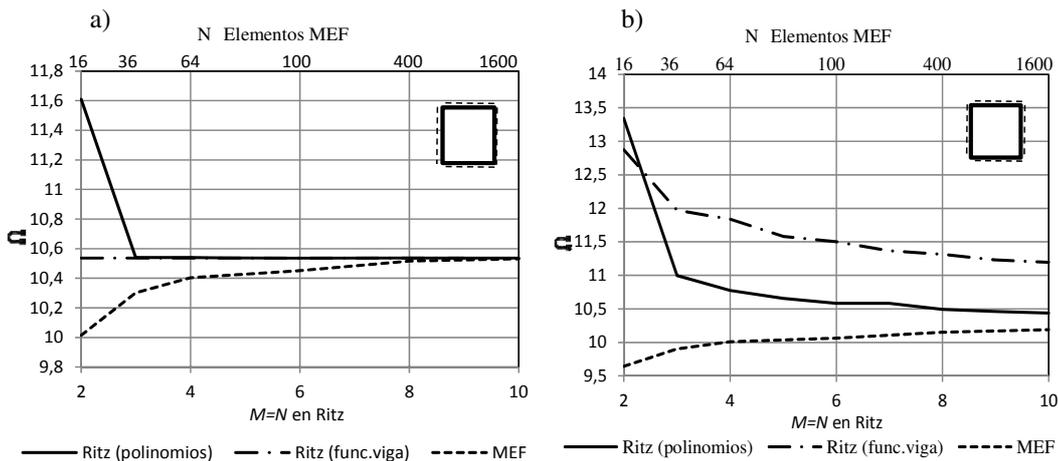


Figura 4: Convergencia de coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega$  a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

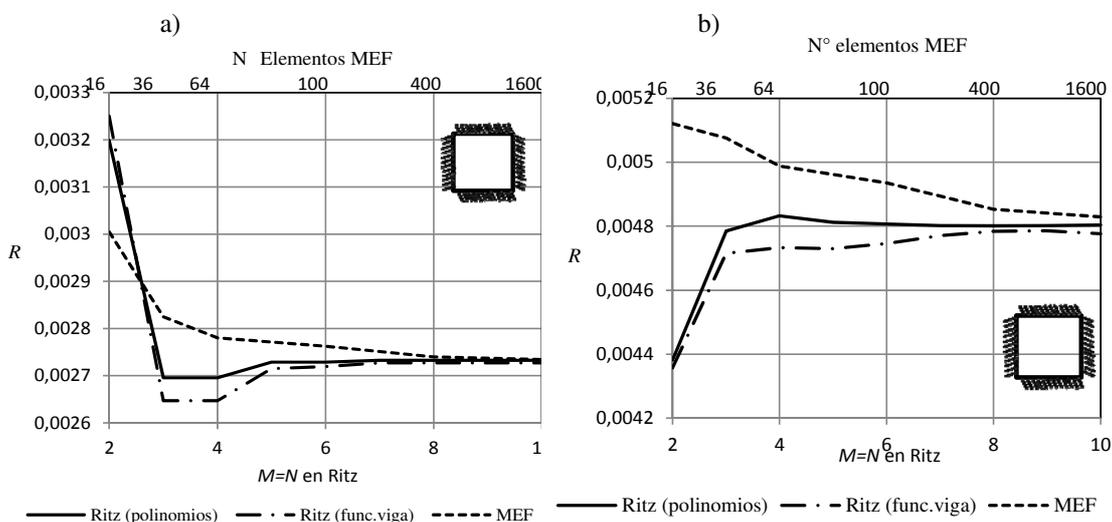


Figura 5: Convergencia de deflexión  $w$  en el centro de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

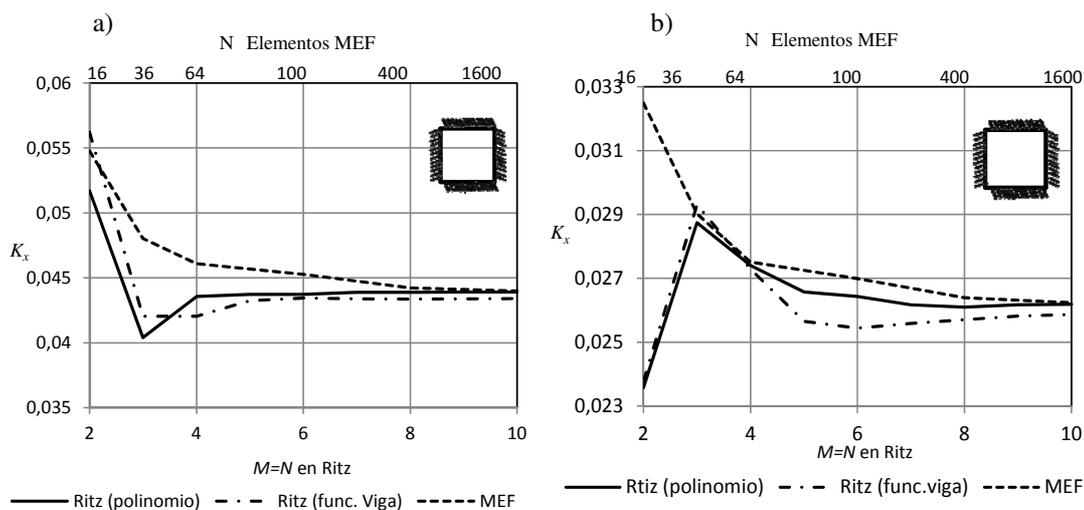


Figura 6: Convergencia de momento  $M_x$  en el centro de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

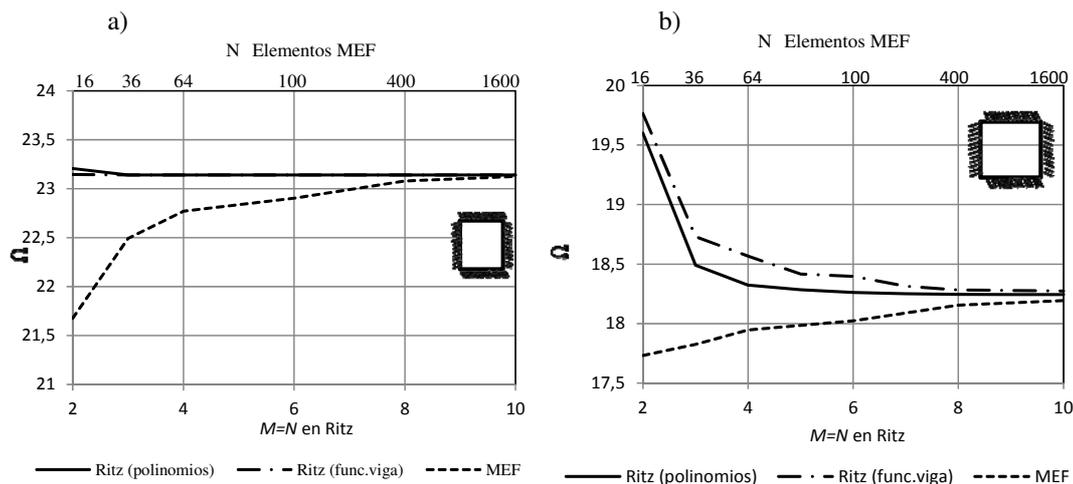


Figura 7: Convergencia de coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega$ : a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

## 5.2 Análisis de resultados

En esta sección se presentan las curvas de deflexión, momentos, corte y momentos torsores a lo largo de la línea central de las placas descritas en la Tabla 1. En las Figs. 8 a 14 se muestran los casos de placas constituidas por una única lámina a  $0^\circ$  y  $45^\circ$ . Las Figs. 8 a 11 corresponden a placas simplemente apoyadas en todo su contorno, mientras que las Figs. 12 a 14 corresponden a placas empotradas en todo su contorno.

Las Figs. 15 a 23 corresponden al análisis de placas laminadas con dos esquemas de laminación: laminados cruzados ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) y laminados equiangulares ( $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$ ). Las Figs. 15 a 19 corresponden a laminados simplemente apoyados en todo su contorno y las Figs. 20 a 23 a laminados empotrado-libre en la dirección  $x$  y empotrado-simplemente apoyado en la dirección  $y$ .

En las Figs. 8 a 14 se presentan tres curvas: dos de ellas corresponden a la aplicación del método de Ritz, con polinomios ortogonales y con funciones modales viga como funciones coordenadas y la tercera curva corresponde a la aplicación del método de los elementos finitos. En las Figs. 15 a 23 sólo se presentan los resultados correspondientes al método de Ritz.

Se observa que en el caso de placas constituidas por una única lámina a  $0^\circ$  y en laminados cruzados ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), tanto la respuesta correspondiente a las deflexiones como las correspondientes a las derivadas de éstas (momentos y corte), presentan resultados concordantes para el método de Ritz (polinomios y funciones vigas) y para el método de los elementos finitos, ya que en estos casos el acoplamiento flexo-torsional es nulo, observándose esta conclusión independiente de las condiciones de contorno.

Si se analiza las placas simplemente apoyadas constituidas por una única lámina a  $45^\circ$ , se observa que las respuestas en deflexiones, momento flector, corte y momento torsor (Figs. 8b, 9b, 10b y 11b) difieren. Estas curvas resaltan las dificultades asociadas con el uso de las funciones vigas (Ec. (15)) como funciones de aproximación en el método de Ritz cuando las rigideces de acoplamiento ( $D_{16}$  y  $D_{26}$ ) son distintas de cero. No ocurre lo mismo cuando se usan polinomios ortogonales en el método de Ritz o el MEF, ya que en estos casos no se produce soberrigidización del sistema y ambas soluciones son prácticamente coincidentes. Las mismas observaciones realizadas son válidas para los laminados equiangulares mostrados en las Figs. 15b, 16b, 17b, 18b y 19b. Continuando con las placas simplemente apoyadas,

constituidas por una lámina a  $0^\circ$  o laminados cruzados ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) se nota claramente la coincidencia de las respuestas obtenidas mediante los tres procedimientos, lo cual está directamente relacionado con la ausencia de acoplamiento flexo-torsional (Figs. 8a, 9a, 10a, 11a, 15a, 16a, 17a, y 18a).

Para placas empotradas, a diferencia de las placas simplemente apoyadas (donde se requiere momento resultante nulo) no existen condiciones de contorno naturales a satisfacer. Como se muestra en las figuras 12, 13 y 14 la solución de Ritz utilizando funciones modales viga tiene un comportamiento mucho mejor que el correspondiente al caso simplemente apoyado. Tanto para láminas a  $0^\circ$  como a  $45^\circ$  las deflexiones, los momentos flectores y el corte son similares en las tres metodologías empleadas, mostrando los diagramas a lo largo de la línea central muy buena concordancia con el MEF.

Finalmente, en las Figs. 20 a 23 se presentan resultados para laminados considerando condiciones de contorno mixtas. Se observa que en el caso de laminados cruzados ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) las soluciones obtenidas son concordantes cuando se emplean en el método de Ritz polinomios ortogonales y funciones viga. Sin embargo, el análisis de los laminados equiángulos ( $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$ ) mostrados en las Figs. 20b, 21b, 22b y 23b muestran nuevamente el efecto de acoplamiento flexo-torsional y la discrepancia de la solución en el borde libre donde todas las condiciones de contorno son inestables y las rigideces de acoplamiento se encuentran contenidas en la condición de contorno natural (Ecs. (12)).

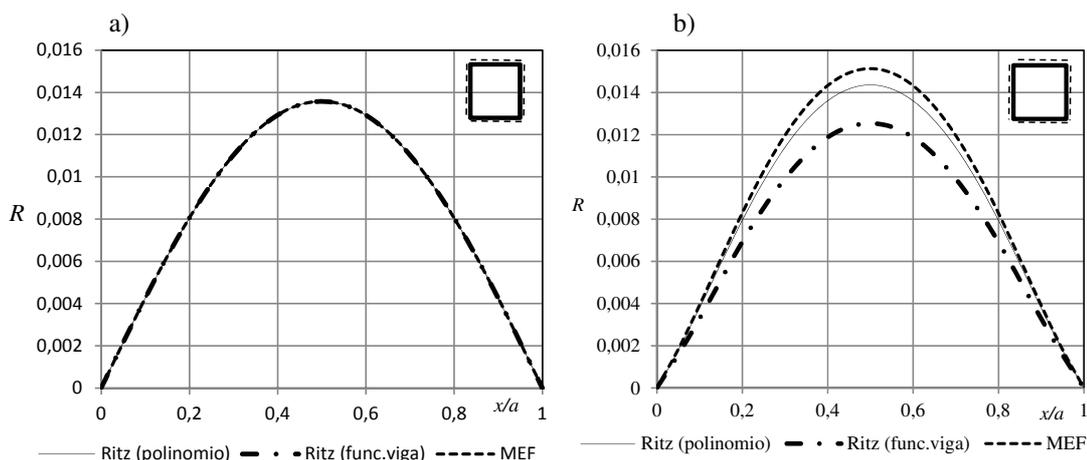


Figura 8: Deflexión  $w$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

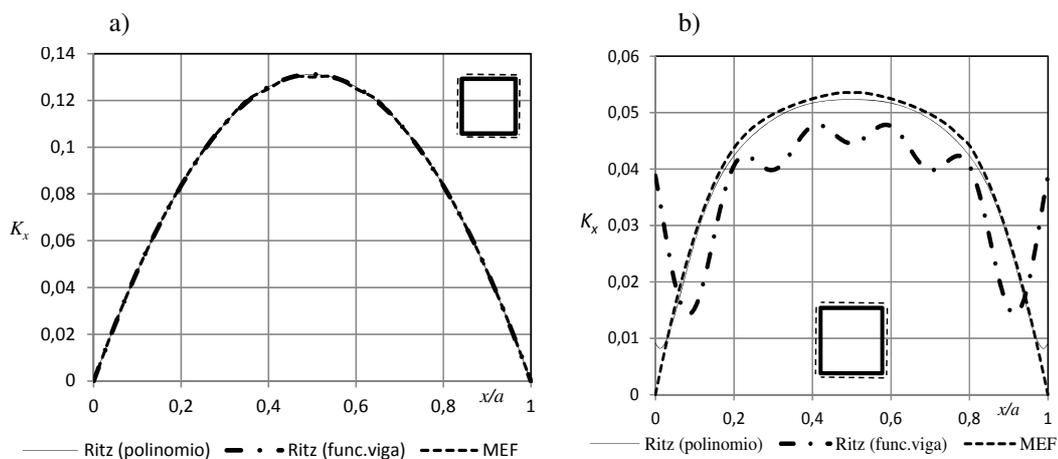


Figura 9: Momento  $M_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

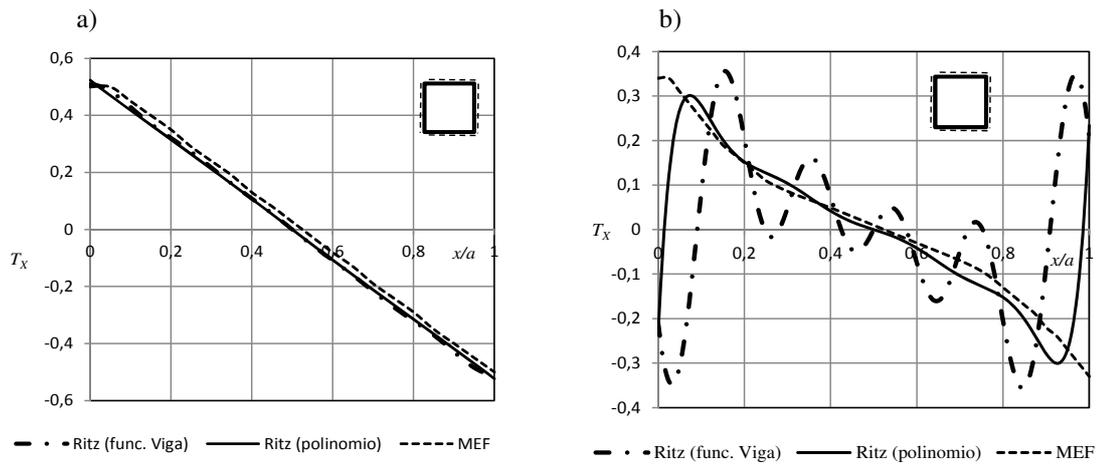


Figura 10: Corte  $Q_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina 0°; b) Lámina 45°

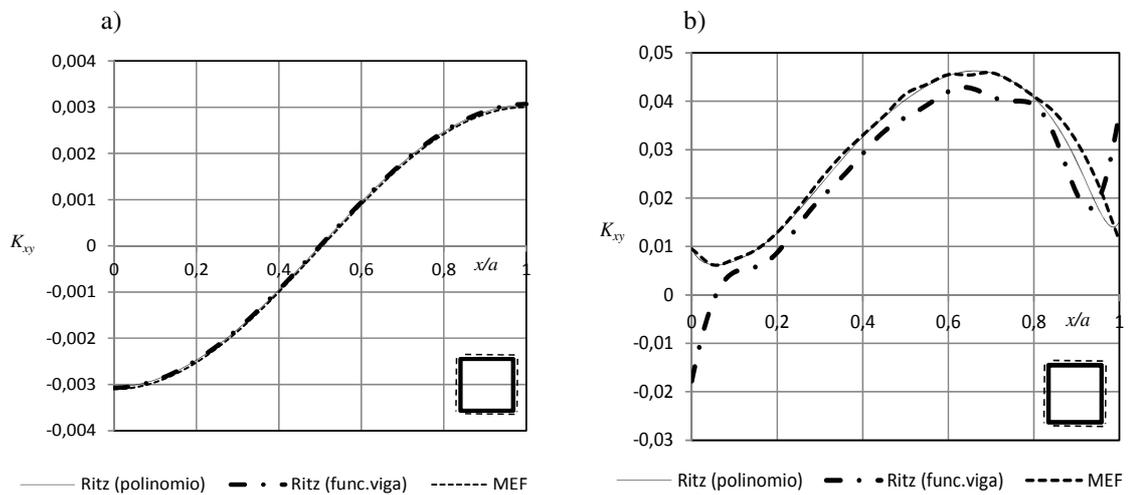


Figura 11: Momento torsor  $M_{xy}$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina 0°; b) Lámina 45°

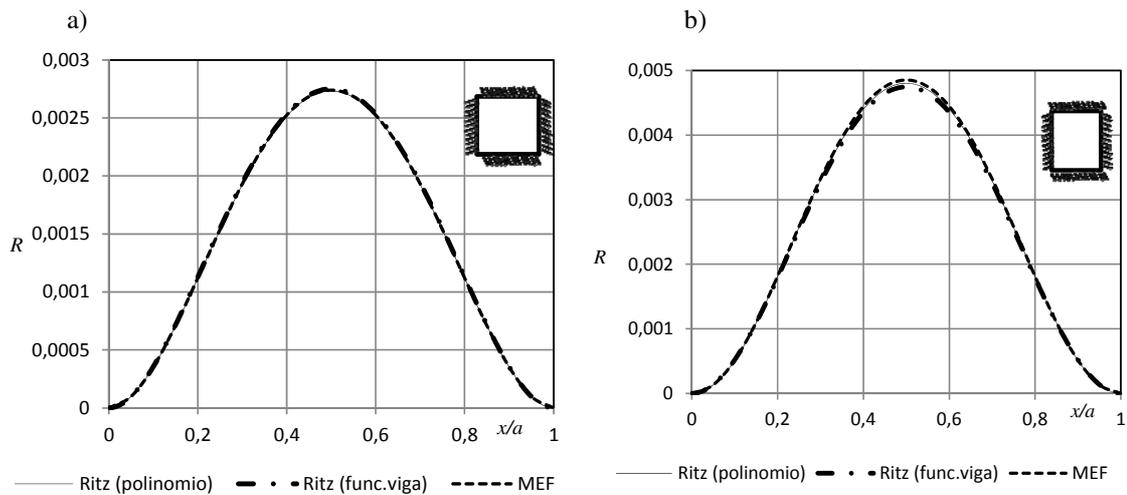


Figura 12: Deflexión  $w$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina 0°; b) Lámina 45°

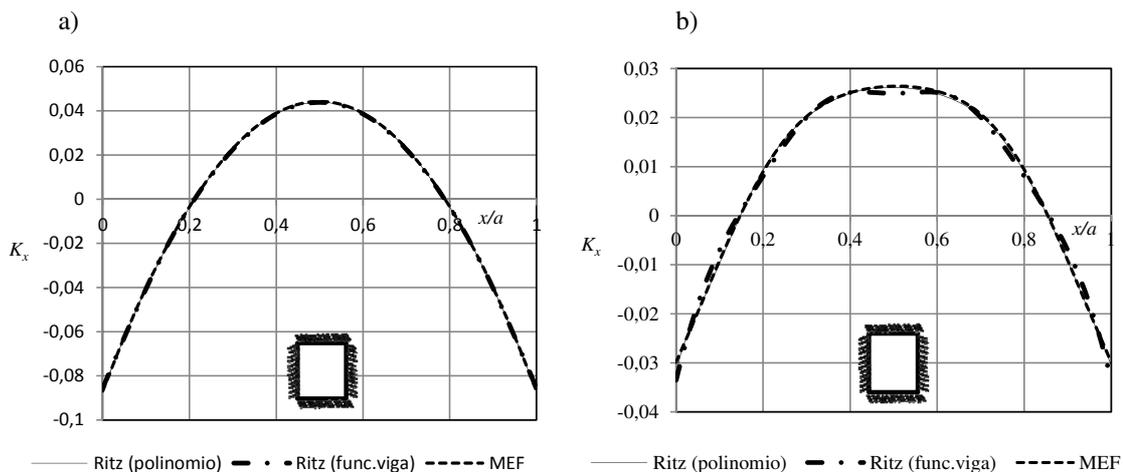


Figura 13: Momento  $M_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

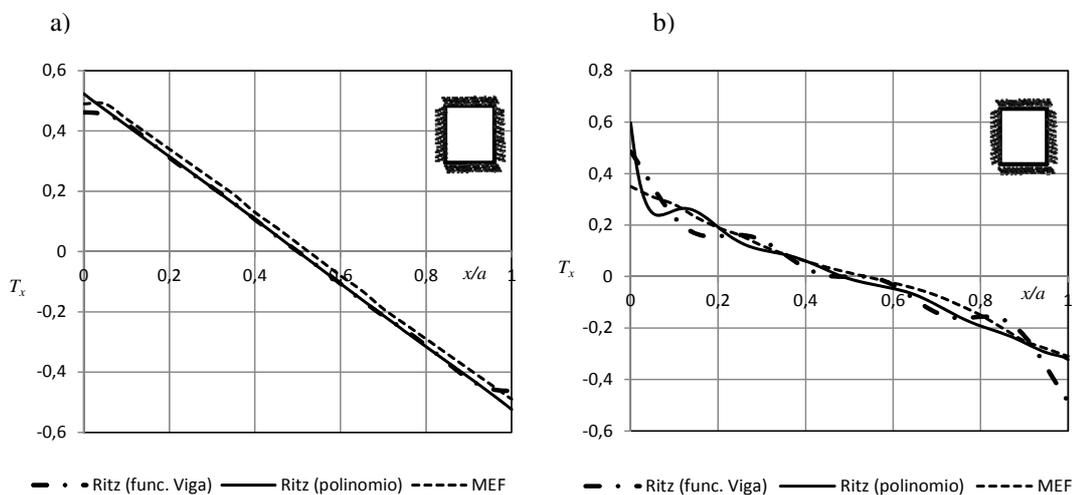


Figura 14: Corte  $Q_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Lámina  $0^\circ$ ; b) Lámina  $45^\circ$

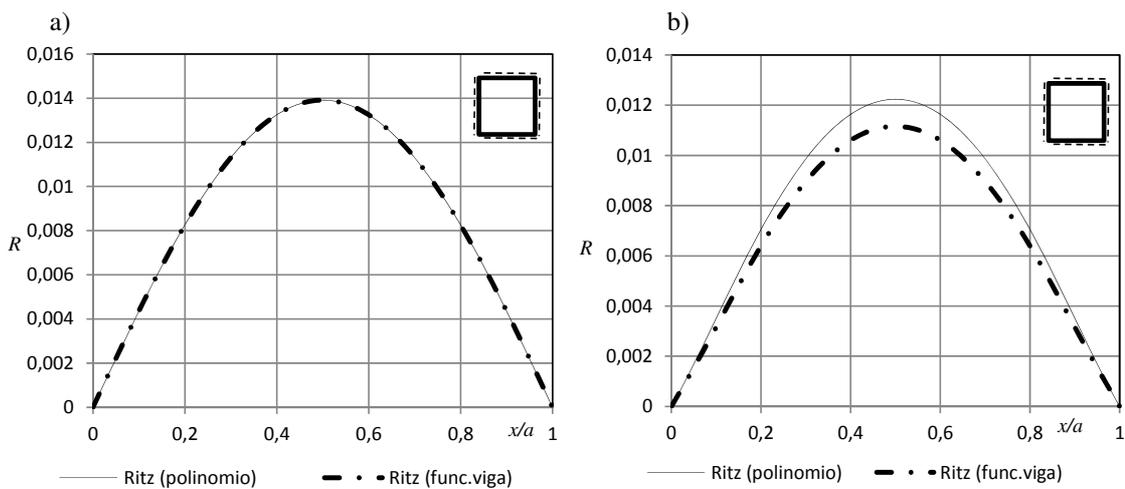


Figura 15: Deflexión  $w$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

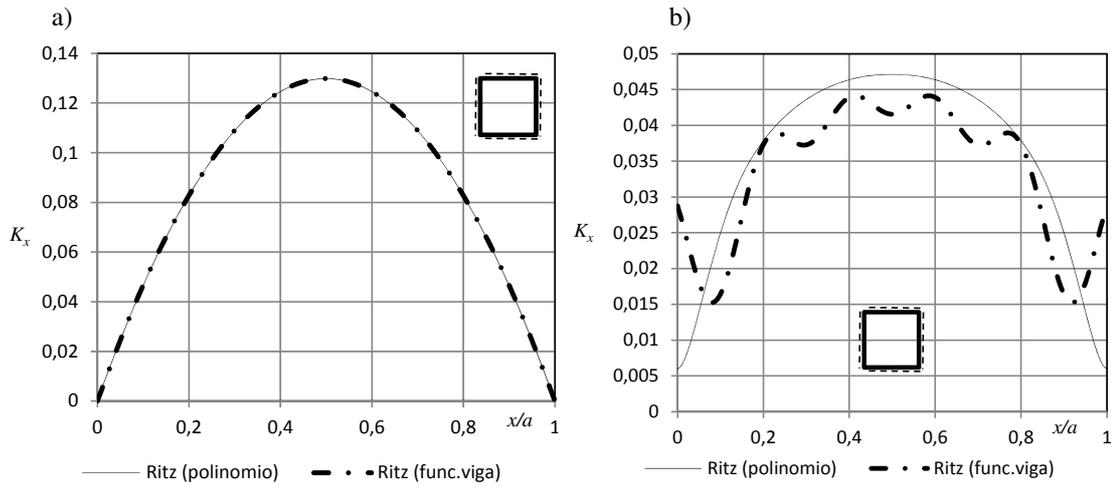


Figura 16: Momento  $M_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

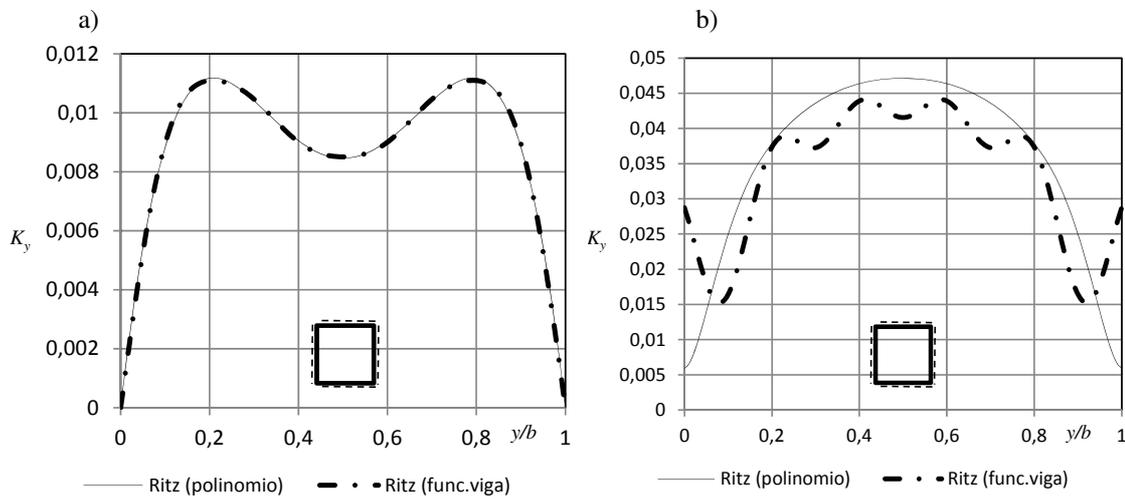


Figura 17: Momento  $M_y$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

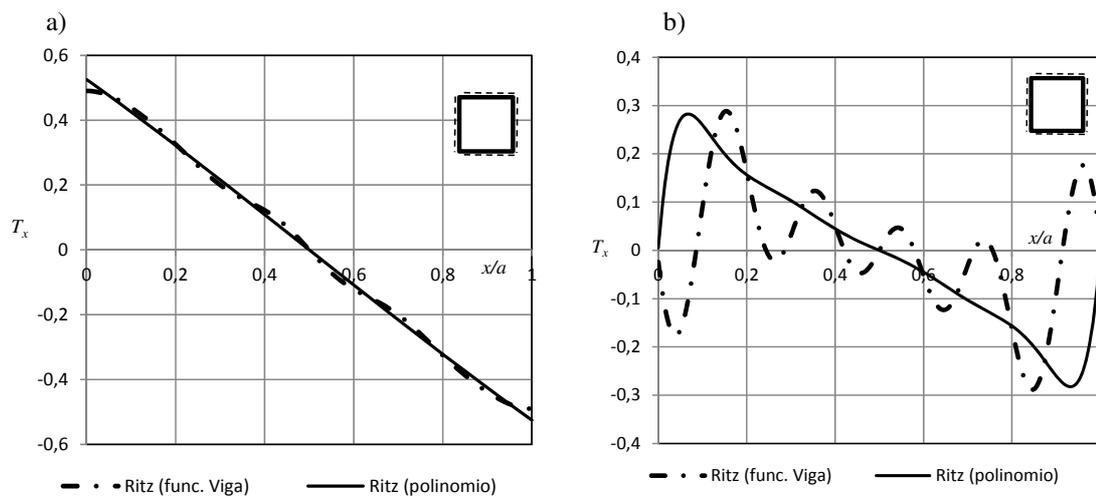


Figura 18: Corte  $Q_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

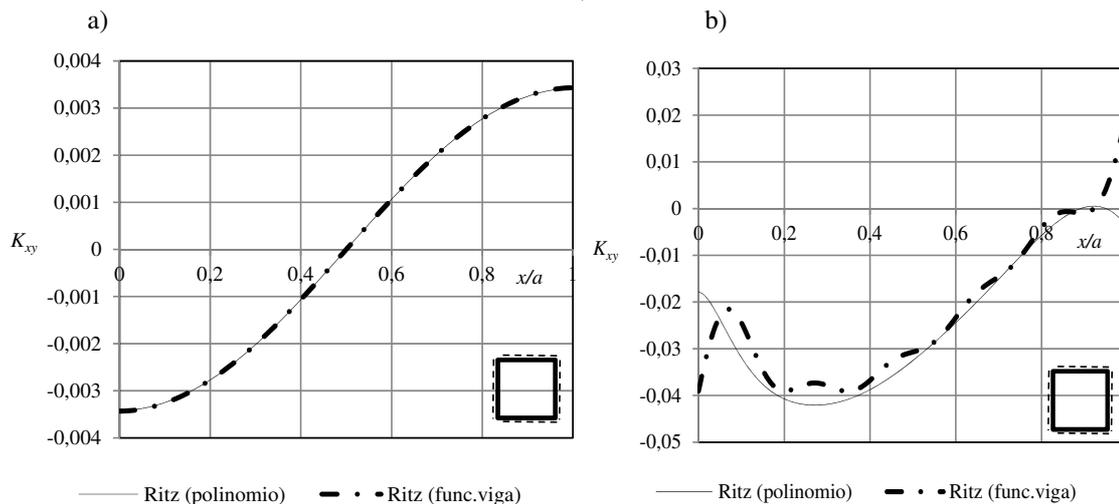


Figura 19: Momento torsor  $M_{xy}$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

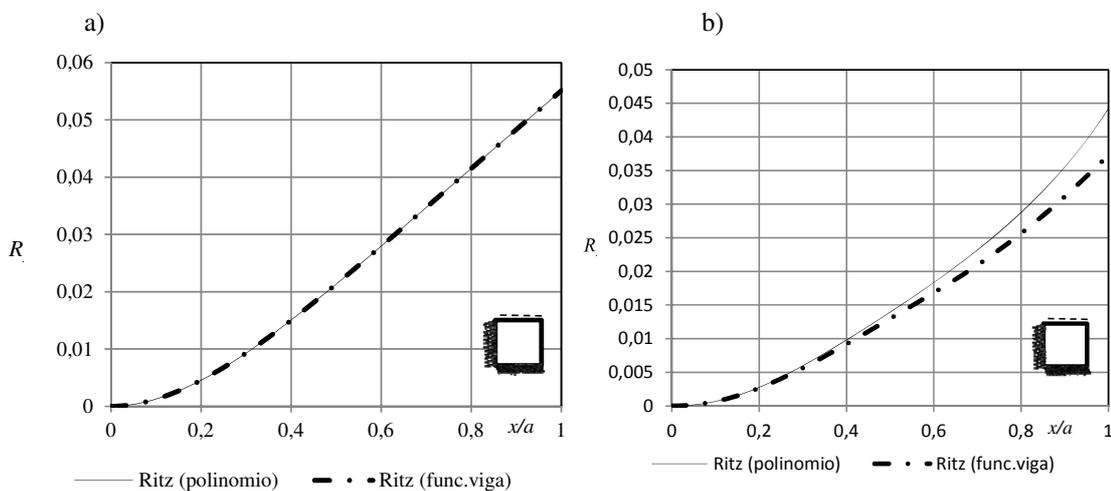


Figura 20: Deflexión  $w$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

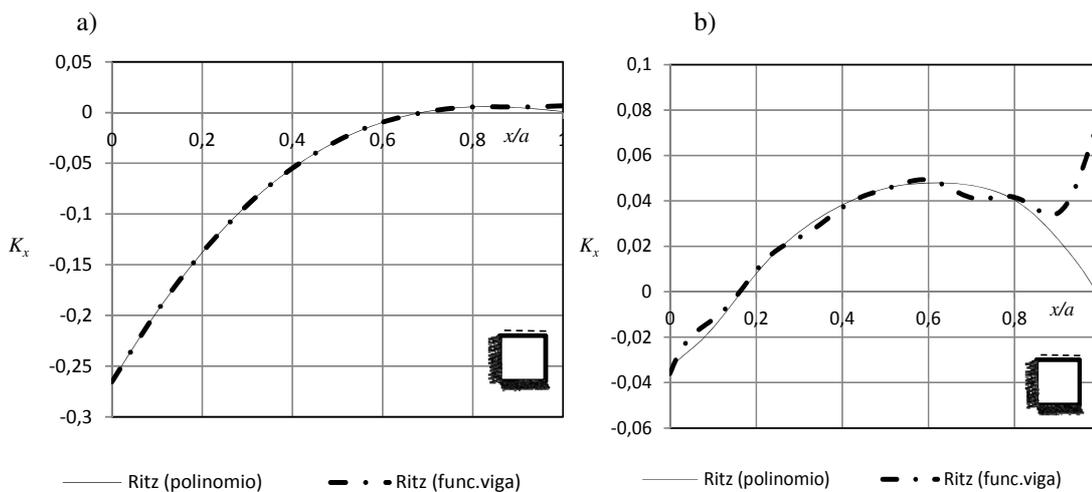


Figura 21: Momento  $M_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

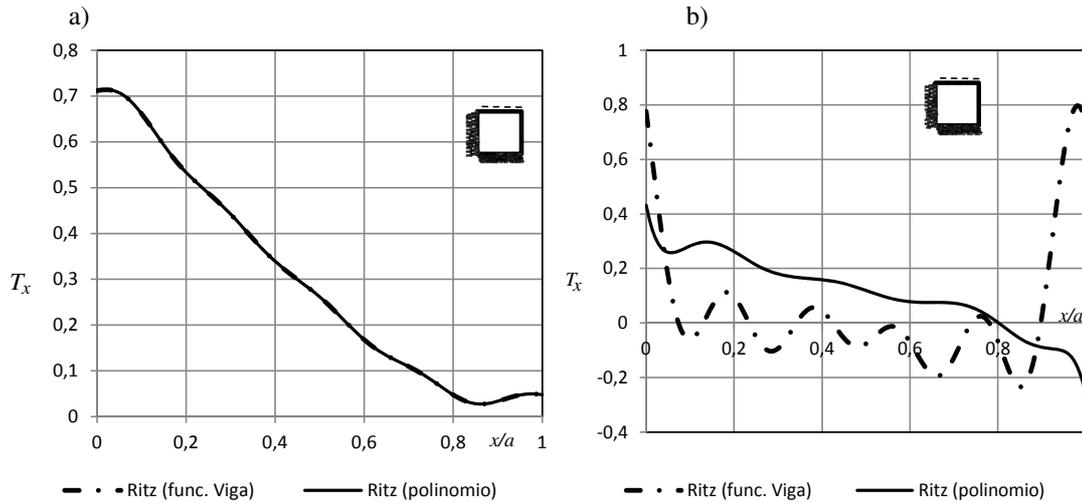


Figura 22: Corte  $Q_x$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

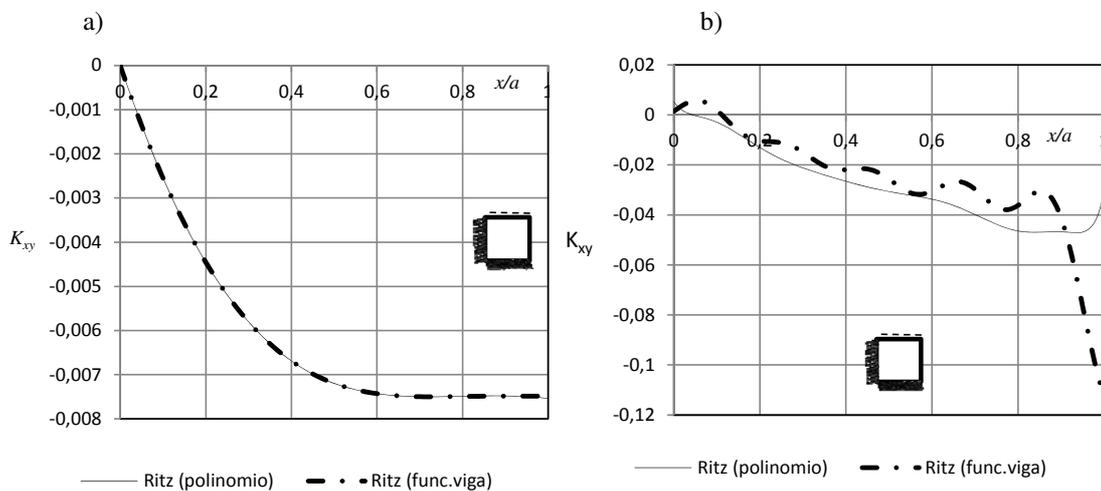


Figura 23: Momento torsor  $M_{xy}$  a lo largo de la línea central de la placa: a) Laminado  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ; b) Laminado  $-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ$

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan una serie de resultados que resultan de interés para la enseñanza del Método de Ritz. En particular, se pretende que el alumno comprenda la situación problemática planteada para el análisis de placas anisótropas y los inconvenientes inherentes al empleo de distintos tipos de funciones admisibles y su comparación con la aplicación del método de los elementos finitos. Se presentan estudios de convergencia y discusiones referidas a la influencia que tiene la elección de las funciones coordenadas en la aplicación del método de Ritz. A través de la obtención de las soluciones se espera que el alumno observe que el uso de funciones vigas trigonométricas hiperbólicas, que conducen a la solución exacta en el caso de tratarse de placas isótropas u ortótropas (para ciertas condiciones de contorno), produce una soberrigidización del sistema llevando a soluciones no convergentes en el caso de placas anisótropas. Asimismo, se espera que el alumno compruebe que no es el empleo del método de Ritz en sí mismo lo que produce oscilaciones en la solución, sino una elección inadecuada de las funciones coordenadas. A través de este

problema el alumno puede observar además la concordancia entre los resultados obtenidos con la aplicación del método de Ritz cuando se emplean polinomios en las funciones de aproximación y el método de los elementos finitos.

En este sentido, se considera que los resultados obtenidos son especialmente interesantes para la enseñanza de este método, así como la enseñanza de la mecánica de placas laminadas, ya que se observan la influencia en la respuesta a carga transversal de los acoplamientos flexo-torsionales que se producen, así como de las condiciones de contorno, distinguiendo desde un punto de vista físico las condiciones estables e inestables.

## REFERENCIAS

- Ashton JE. Anisotropic plate analysis-boundary conditions. *J Compos Mater*, 4:162-71, 1970.
- Bhat R.B. Plate deflection using orthogonal polynomials, *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 101:1301-1309, 1985.
- Campanario JM, Cueva J, Moya A, Otero JC. La metacognición y el aprendizaje de las ciencias, en Banet, E. y de Pro, A. (cords.) *Investigación e innovación en la enseñanza de las ciencias. Volumen I*, Ponencias presentadas en el V Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Ciencias, Murcia, 1998, 36-44. (<http://www2.uah.es/giac/ln1.pdf>).
- Gawandi, A., Whitney J.M., Brockman R.A. Natural boundary conditions in the bending of anisotropic laminated plates. *Composite Structures* 82: 201-208, 2008.
- Mikhlin S. *Variational Methods of Mathematical Physics*. Oxford: Pergamon. 1964.
- Nallim L. *Mecánica de Placas Anisótropas: Un enfoque variacional*. Tesis doctoral. UNSa, 2003.
- Nallim, L. G. and Grossi. R. O. On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates. *Journal of Sound and Vibration* 264: 1201–1207, 2003.
- Nallim L.G., Oller S. and Grossi R., Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1797-1822, 2005.
- Necas J. *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Prague: Academia. 1967.
- Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plate. Theory and Analysis*. CRC Press, Inc., 1997.
- Rektorys K. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. Dordrecht: D. Reidel Co. 1980.
- SAP2000, *User's Manual*, Computers and Structures, USA, 2010.
- Wang JT-S. On the solution of plates of composite materials. *J. Compos Mater.*, 3:590-2, 1969.
- Whitney JM. On the analysis of anisotropic rectangular plates. Report 7340, *Air Force Materials Laboratory*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1972.
- Whitney JM. Structural analysis of laminated anisotropic plates. *Technomic Publishing Company, Inc.*, pp. 135–36, 1987.
- Young D., Felgar R.P. Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam. Rept. 4913, *University of Texas Publication*, 1949.