

## MODELOS DE ORDEN REDUCIDO PARA EL PROBLEMA TÉRMICO DE SOLDADURA

**Alejandro Cosimo<sup>a</sup>, Alberto Cardona<sup>a</sup> y Sergio Idelsohn<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Güemes 3450, S3000GLN Santa Fe, Argentina*

<sup>b</sup>*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) Barcelona, España*

**Palabras Clave:** Modelos de Orden Reducido, Problema de soldadura, Fuente Concentrada, Descomposición Ortogonal Propia, POD

**Resumen.** La simulación de un proceso de soldadura se caracteriza por su alta complejidad. A pesar del esfuerzo que se realiza para reducir el costo computacional asociado, el problema sigue siendo inabordable desde la perspectiva de aplicaciones de tiempo real. Es en este contexto, donde los Modelos de Orden Reducido (ROM), con especial énfasis los basados en la Descomposición Ortogonal Propia (POD), representan una solución elegante y alentadora. En este trabajo se estudian ROMs basados en POD para resolver el problema no lineal térmico en donde las propiedades termofísicas dependen de la temperatura. Se pone especial énfasis en las dificultades planteadas por los altos gradientes presentes en la solución y por el carácter móvil de la fuente de energía altamente concentrada. Se discuten detalles de la formulación y de la implementación de los ROMs, presentando ejemplos de aplicación para estudiar la performance de los mismos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un problema de soldadura es esencialmente un proceso donde la fuerza impulsora es la energía térmica. De aquí que la correcta descripción de la fuente de calor que representa la entrada de energía al medio sea importante. Generalmente, la fuente se describe en términos de la fuente de Goldak (Goldak et al., 1984) en donde la distribución de la densidad de potencia se modela por medio de una doble elipsoide. Luego, este problema se caracteriza por cambios rápidos en los campos intervinientes, como así también rápidas variaciones de las propiedades materiales. Otra dificultad es el carácter concentrado de la fuente que impone restricciones en el tamaño de malla y el paso de tiempo a utilizar.

La simulación de un proceso de soldadura se caracteriza por su alta complejidad ya que debe ser descrito como un proceso Térmico-Metalúrgico-Mecánico (TMM) (Ronda y Oliver, 2000). Para reducir esta complejidad se aplican algunas simplificaciones, como por ejemplo describir el problema por medio de un modelo termo-mecánico desacoplado (Anca et al., 2011). A pesar del esfuerzo que se realiza para reducir el costo computacional asociado, el problema sigue siendo inabordable desde la perspectiva de aplicaciones de tiempo real.

Es en este contexto, donde los Modelos de Orden Reducido (ROM), con especial énfasis los basados en la Descomposición Ortogonal Propia (POD), representan una solución elegante y alentadora. Es por esto, que en este trabajo se investiga el diseño de ROMs para el problema de transferencia de calor no lineal, donde el cambio de fase líquido-sólido debe ser modelado (Cosimo et al., 2012), pero, como se mostrará, las principales complicaciones en las construcciones de ROMs surgen del carácter móvil y concentrado de la fuente. Es por esto que se deja el cambio de fase para ser estudiado en un trabajo futuro.

Últimamente el uso de representaciones separadas para construir ROMs ha atraído la atención de la comunidad ingenieril. Básicamente hay dos maneras de construir representaciones separadas (Nouy, 2010). Por un lado, se tienen las técnicas de reducción *a posteriori*, donde se requiere el conocimiento de una solución a un problema de entrenamiento. La técnica *a posteriori* más prominente se basa en el método de Descomposición Ortogonal Propia (POD) (Kunisch y Volkwein, 2002; Bergmann et al., 2009). Por otro lado, se tienen las técnicas de reducción *a priori*, donde no se requiere conocimiento alguno de una solución a un problema de entrenamiento. En este contexto, el método con mayor difusión es el basado en la Descomposición Propia Generalizada (PGD) propuesto por Ladevèze (Néron y Ladevèze, 2010; Chinesta et al., 2010). En este trabajo se adopta el esquema *a posteriori* basado en POD.

En ambos enfoques, para tratar de forma exitosa con la alta dimensionalidad del problema, se supone que es posible describir la solución en términos de un número reducido de funciones en la representación separada. En este sentido se puede hablar de la *hipótesis de la representación separada*. Una consecuencia de esta idea es hacer la suposición de que la solución del problema es *k-compresible* en alguna base, donde *k* es muy pequeño. Cuando se dice que la solución es *k-compresible*, se quiere significar que la solución tiene a lo sumo *k* entradas no nulas cuando se expresa en términos de aquella base *mágica* (Berinde y Indyk, 2008; Eldar y Kutyniok, 2012).

Es conocido, aunque no tan mencionado en las publicaciones que representan el estado del arte, que discontinuidades móviles o frentes móviles caracterizados por altos gradientes, son soluciones que no poseen la compresibilidad encontrada en otros problemas. Esta situación puede ser observada en la solución oscilatoria obtenida en uno de los ejemplos mostrados por Carlberg et al. (2012) y en los problemas estudiados por Brenner et al. (2010). De estas observaciones se puede decir que la hipótesis de la representación separada falla, haciendo necesario utilizar un alto número de funciones o enriquecer de alguna manera para obtener una solución sin os-

cilaciones. Para estar en los órdenes de aplicaciones de tiempo real, el número de funciones usadas en la representación separada debe ser pequeño. Por otro lado, el uso de funciones de enriquecimiento no parece ser una solución de aplicabilidad general.

Para estudiar esta cuestión en detalle, el trabajo se enfoca en el desarrollo de ROMs para la solución eficiente de problemas no lineales de conducción de calor, en presencia de una fuente altamente concentrada y móvil. La no linealidad proveniente del cambio de fase será considerada en un trabajo futuro.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema a estudiar, es un problema no lineal de conducción de calor en donde las propiedades termofísicas dependen de la temperatura. Se considera la situación donde una fuente altamente concentrada está presente y cuya trayectoria depende del tiempo. La ecuación que gobierna a este problema está dada por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T = Q(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (t_0, \infty) \quad (1)$$

donde  $T$  es el campo temperatura,  $\rho$  es la densidad,  $c$  es la capacidad calorífica,  $\mathbf{k}$  es la conductividad térmica,  $Q$  es la fuente externa por unidad de volumen y  $\Omega$  es el dominio físico. El campo temperatura debe satisfacer las siguientes condiciones iniciales

$$T = T_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t = t_0 \quad (2)$$

donde  $T_0(\mathbf{x})$  es la temperatura inicial dada. Adicionalmente, el siguiente conjunto de condiciones deben ser verificadas en porciones disjuntas  $\Gamma_d, \Gamma_q, \Gamma_c$  del borde:

$$T = T_d \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_d \times (t_0, \infty) \quad (3)$$

$$-(k \nabla T) \cdot \mathbf{n} = q_w \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_q \times (t_0, \infty) \quad (4)$$

$$-(k \nabla T) \cdot \mathbf{n} = h_f(T - T_f) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_c \times (t_0, \infty) \quad (5)$$

donde  $\Gamma_d \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c = \partial\Omega$ , y donde  $T_d$  es la temperatura impuesta en el borde  $\Gamma_d$ ,  $q_w$  es el flujo externo en el borde  $\Gamma_q$ ,  $h_f$  es el coeficiente pelicular de transferencia de calor,  $T_f$  es la temperatura externa del fluido en la porción del borde  $\Gamma_c$  y  $\mathbf{n}$  la normal saliente de la porción del borde en consideración.

### 2.1. Fuente de calor de Goldak

La entrada de energía al medio es modelada en términos de la fuente de Goldak (Goldak et al., 1984), dada por

$$Q(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}), t) = \frac{6\sqrt{3}Q_s}{\pi\sqrt{\pi}bc} \begin{cases} \frac{f_f}{a_f} \exp\left(-3\frac{\xi^2}{a_f^2} - 3\frac{\eta^2}{b^2} - 3\frac{\gamma^2}{c^2}\right) & \text{si } \xi > 0 \\ \frac{f_r}{a_r} \exp\left(-3\frac{\xi^2}{a_r^2} - 3\frac{\eta^2}{b^2} - 3\frac{\gamma^2}{c^2}\right) & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

donde  $a_f$  y  $a_r$  son parámetros de longitud asociados a los ejes delanteros y traseros de los semi-elipsoides,  $b$  y  $c$  son los otros ejes de los semi-elipsoides,  $f_f$  y  $f_r$  son la porción de calor distribuido en los semi-elipsoides delantero y trasero tal que  $f_f + f_r = 2$ ,  $t$  es el tiempo y  $Q_s$  es el calor de entrada total en W. El sistema coordenado local se encuentra coincidente con la fuente de calor, como se puede observar en la figura 1.

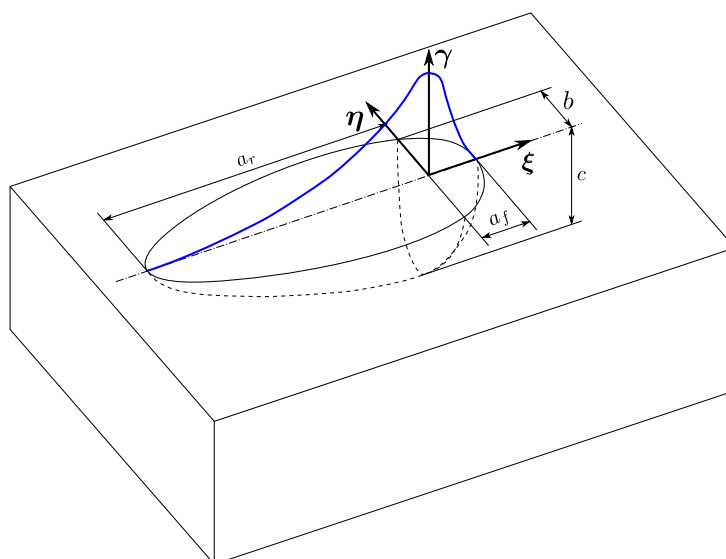


Figura 1: Fuente de Calor de Goldak.

La fuente de Goldak dada por la ecuación (6) es lo suficientemente general para considerar una gran variedad de problemas. A fin de entender las complicaciones que surgen en el diseño de ROMs en la presencia de fuentes móviles altamente concentradas, se comienza el estudio de problemas unidimensionales donde la fuente se simplifica a

$$Q(x, t) = q_s e^{\left(\frac{-x+vt+\tau}{\sigma}\right)^2}, \quad (7)$$

donde  $x$  denota la coordenada espacial,  $t$  denota el tiempo,  $v$  es la velocidad de la fuente,  $\tau$  es una variable auxiliar para posicionar la fuente en el tiempo inicial,  $\sigma$  controla cuan concentrada es la fuente y  $q_s$  es una constante para especificar la cantidad de energía suplida al medio. En este caso  $q_s$  se mide en  $\frac{W}{m^3}$ .

## 2.2. Discretización por Elementos Finitos

En esta sección se describe brevemente la discretización del problema por medio del Método de los Elementos Finitos (FEM). El campo temperatura se describe como

$$T(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{N}^T \mathbf{T}_n, \quad (8)$$

donde  $\mathbf{N}$  denota la bases de elementos finitos y  $\mathbf{T}_n$  denota los grados de libertad de FEM. Se utilizan funciones de forma lineales en este trabajo. Luego, utilizando una proyección Bubnov-Galerkin, el problema no lineal térmico en su forma discreta está dado por

$$\Pi = \frac{\mathbf{C}(T)}{\Delta t} \mathbf{T}_n - \frac{\mathbf{C}(T)}{\Delta t} \mathbf{T}_{n-1} + \mathbf{K}(T) \mathbf{T}_n + \mathbf{F}(T) - \mathbf{Q} = 0, \quad (9)$$

donde  $T$  denota el campo de temperatura,  $\mathbf{C}(T)$  es la matriz de capacidad (en este estudio se trabaja con la matriz de masa diagonalizada),  $\mathbf{K}(T)$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{F}(T)$  es el término proveniente de las condiciones de borde impuestas sobre los flujos y  $\mathbf{Q}$  es la fuente de calor. Para resolver este problema se utiliza un esquema de Newton-Raphson estándar.

### 3. FORMULACIÓN DEL MODELO DE ORDEN REDUCIDO

Para describir el campo temperatura  $T(\mathbf{x}, t)$ , se utiliza la representación separada espacio-temporal de orden  $M$  dada por

$$T(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{j=1}^M S_j(\mathbf{x}) R_j(t) + T_b(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

donde  $T_b$  denota la función representando las condiciones de borde esenciales no homogéneas.

Un enfoque para encontrar una base (funciones  $S_j(\mathbf{x})$  en la ecuación (10)) que sea capaz de capturar la dinámica del problema en un número pequeño de componentes, es analizando la respuesta del sistema que viene dada por la solución a un problema de entrenamiento. Luego, para construir esta base se procede como en un Análisis de Componentes Principales (PCA) (Jolliffe, 2002). Esto es, primero se construye un conjunto de *snapshots* o instancias temporales de la distribución espacial de la solución (Sirovich, 1987), y luego se lleva a cabo el PCA haciendo uso de POD, o mejor conocido en el contexto de Álgebra Lineal como Descomposición en Valores Singulares (SVD) (Strang, 1993).

Si los snapshots se representan por la matriz  $\mathbf{A}$ , de la SVD se tiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (11)$$

donde las columnas  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{U}$  son los vectores singulares izquierdos de  $\mathbf{A}$ , las columnas  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{V}$  son los vectores singulares derechos de  $\mathbf{A}$  y las entradas diagonales  $\sigma$  de  $\mathbf{\Sigma}$  son los valores singulares de  $\mathbf{A}$ .

Para el caso en estudio, los vectores singulares izquierdos conforman la base buscada. Además, asumiendo que estos vectores capturan la dinámica del problema en los primeros  $k$  vectores, decimos que la respuesta es *k-compressible* y la representación separada dada por la ecuación (10) puede escribirse como

$$T(\mathbf{x}_i, t) \simeq \left[ \sum_{j=1}^k \mathbf{u}_j R_j(t) \right]_i + T_b. \quad (12)$$

Quedan determinar los coeficientes  $R_j(t)$ . Cabe mencionar que los vectores  $\mathbf{u}_j$  también se denominan modos POD de la aproximación, que una vez determinados, se los utiliza para proyectar la ecuación (9) haciendo uso de una proyección Bubnov-Galerkin.

Expresando el campo de temperatura en términos de los modos POD se tendrá

$$T(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{N}^T \mathbf{X} \mathbf{a}_n = \mathbf{N}^T \mathbf{T}_n, \quad (13)$$

donde  $\mathbf{X}$  denota la matriz de cambio de base cuyas columnas son los primeros  $k$  modos POD y  $\mathbf{a}_n$  son los grados de libertad POD generalizados. Notar, que en este caso en lugar de disponer de  $N$  grados de libertad (dofs), como lo es en el caso del modelo de alta fidelidad, ahora disponemos de  $k$  dofs con  $k \ll N$ .

El problema no lineal (9) puede ser reescrito como

$$\Pi = \mathbf{G}_p(T) + \mathbf{G}_k(T) + \mathbf{F}(T) - \mathbf{Q} = 0, \quad (14)$$

donde

$$\mathbf{G}_p(T) = \frac{\mathbf{C}(T)}{\Delta t} \mathbf{T}_n - \frac{\mathbf{C}(T)}{\Delta t} \mathbf{T}_{n-1} \quad \text{y} \quad (15)$$

$$\mathbf{G}_k(T) = \mathbf{K}(T) \mathbf{T}_n \quad (16)$$

son las contribuciones no lineales del problema. Debido a que estos términos necesitan ser ensamblados en cada iteración del esquema de Newton-Raphson, poco se puede ganar en términos de cantidad de operaciones (Carlberg et al., 2012; Baiges et al., 2013). Para evitar esta dificultad, los términos no lineales  $G_k$  y  $G_p$  son calculados haciendo uso de la reconstrucción de datos gappy (Everson y Sirovich, 1995), que lleva a obtener un modelo hiper reducido. En lo que sigue este proceso se expone para el término  $G_p$ .

Primero se calculan un conjunto de snapshots correspondientes a  $G_p$ . Este conjunto se conforma de la contribución  $G_p$  al residuo convergido en cada iteración del esquema de Newton-Raphson. Luego, se aplica la SVD a estos snapshots para obtener un conjunto de “modos gappy” denotados por  $\Psi$ . Haciendo uso de esta información, se llega a la aproximación de  $G_p$  manteniendo sólo los primeros  $n_s$  modos gappy, esto es

$$G_p \simeq \Psi b, \quad (17)$$

donde las columnas de  $\Psi$  son los primeros  $n_s$  modos gappy y  $b$  son los parámetros a determinar. Asumiendo que sólo conocemos  $n_s$  valores de  $G_p$ , denotados por  $\widehat{G}_p$ , situación que se representa multiplicando la ecuación (17) por la matriz de muestreo  $R$  de dimensión  $n_s \times N$ , se tiene

$$\widehat{G}_p = R G_p \simeq R \Psi b, \quad (18)$$

de lo cual se concluye que

$$b = (R\Psi)^{-1} \widehat{G}_p. \quad (19)$$

En lo que sigue para denotar el muestreo de un vector arbitrario  $v$  se utilizará el operador  $\widehat{\cdot}$ . Haciendo uso del resultado anterior en la ecuación (17), se llega a

$$G_p \simeq \Psi \widehat{\Psi}^{-1} \widehat{G}_p. \quad (20)$$

Esto es, con sólo conocer  $n_s$  componentes de  $G_p$  se puede reconstruir una aproximación del mismo. Existen muchas técnicas dedicadas a encontrar los  $n_s$  puntos donde evaluar la función  $G_p$ . En este trabajo se hace uso del Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) (Chaturantabut y Sorensen, 2009).

De manera similar, se obtiene la siguiente expresión para el término  $G_k$

$$G_k \simeq \Phi \widehat{\Phi}^{-1} \widehat{G}_k. \quad (21)$$

Haciendo uso de todo este desarrollo y descartando el término  $F$  en aras de la simplicidad, se tiene en la ecuación (14)

$$\Pi = \Psi \widehat{\Psi}^{-1} \widehat{G}_p + \Phi \widehat{\Phi}^{-1} \widehat{G}_k - Q = 0. \quad (22)$$

Para derivar el modelo hiper-reducido se proyecta la ecuación (22) haciendo uso de los modos POD  $X$ , obteniéndose el siguiente residuo proyectado

$$\Pi^p = X^T \Pi = X^T \Psi \widehat{\Psi}^{-1} \widehat{G}_p(a) + X^T \Phi \widehat{\Phi}^{-1} \widehat{G}_k(a) - X^T Q = 0, \quad (23)$$

Reescribiendo esta ecuación como

$$\Pi^p = A_p \widehat{G}_p + A_k \widehat{G}_k - X^T Q = 0, \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Psi} \widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1} \quad \text{y} \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Phi} \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}, \quad (26)$$

se observa que iteración a iteración sólo se debe conocer los valores de los términos intervinientes en  $n_s$  posiciones, calculándose los términos  $\mathbf{A}_p$  y  $\mathbf{A}_k$  sólo al inicio de la simulación reduciéndose la complejidad computacional.

Luego, la matriz tangente correspondiente a la ecuación (36) está dada por

$$\frac{\partial \Pi^p}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}_p \frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}_p}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{X} + \mathbf{A}_k \frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}_k}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{X}. \quad (27)$$

### 3.1. Benchmarks tests

En esta sección consideramos tres benchmark tests para evaluar el ROM presentado en la sección anterior. En estos benchmarks, el problema de base a ser resuelto es el calentamiento de una barra finita por medio de la fuente móvil dada por la ecuación (7). Para evaluar la performance de los ROMs se estudiará el error relativo  $\epsilon$  de la aproximación dada por

$$\epsilon = \frac{\|T_R - T_H\|_F}{\|T_H\|_F}, \quad (28)$$

donde  $T_R$  es la solución obtenida con el ROM,  $T_H$  es la solución de alta fidelidad para el mismo problema resuelto por el ROM y  $\|\cdot\|_F$  es la norma de Frobenius. En estos casos el error relativo se calcula con respecto al problema utilizado en la etapa de entrenamiento.

El intervalo temporal de los benchmarks es  $t \in [0, 50]$  donde  $t$  se mide en segundos. La longitud de la barra es de 650mm. El intervalo temporal se discretiza en 200 pasos de tiempo y el dominio espacial es discretizado con 300 elementos equiespaciados. Para el primer y el segundo ejemplo las propiedades termofísicas están dadas por

- Densidad  $\rho = 4430 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,
- Capacidad calorífica  $c(T) = [0,1792T + 495,2023] \frac{\text{J}}{\text{Kkg}}$ ,
- Conductividad  $k(T) = [0,0525T + 70] \frac{\text{W}}{\text{Km}}$ .

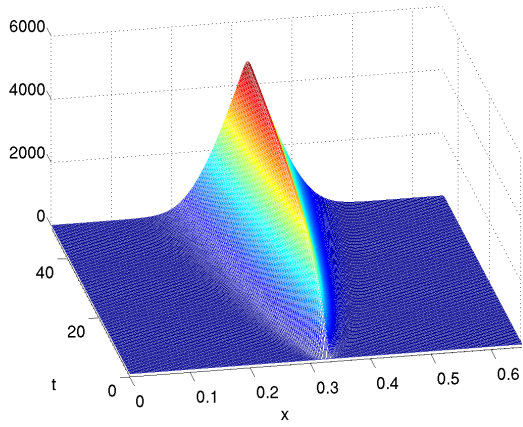
En el primer ejemplo se considera una fuente fija en el espacio, donde los parámetros definiendo la fuente de calor están dados por:  $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\tau = 325\text{mm}$ ,  $\sigma = 5\text{mm}$  y  $q_s = 4,0189 \frac{\text{W}}{\text{mm}^3}$ .

En la figura 2a puede observarse la solución obtenida para el modelo de alta fidelidad. La aproximación que se logra utilizando el ROM presentado con anterioridad, se muestra en la figura 2b donde se utilizaron 8 modos de proyección y 8 puntos gappy arrojando un error igual a  $3.4246e-04$ .

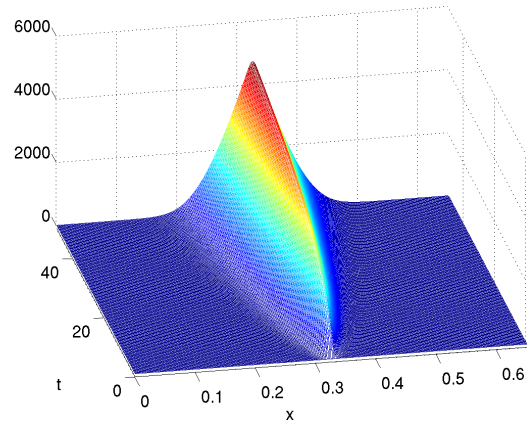
En el segundo ejemplo se considera una fuente de calor móvil cuya trayectoria mantiene el mismo sentido y está presente durante todo el intervalo de tiempo. Los parámetros que describen la fuente están dados por:  $v = 5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ,  $\tau = 150\text{mm}$ ,  $\sigma = 5\text{mm}$  y  $q_s = 4,0189 \frac{\text{W}}{\text{mm}^3}$ .

En la figura 3a se puede observar la solución obtenida con el modelo de alta fidelidad. La aproximación que se logra utilizando el ROM se muestra en la figura 3b donde se utilizaron 46 modos de proyección y 46 puntos gappy, obteniéndose un error igual a  $9.3166e-04$ .



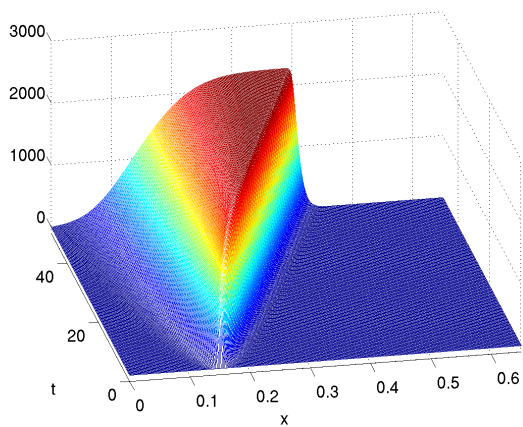


(a) Solución de alta fidelidad.

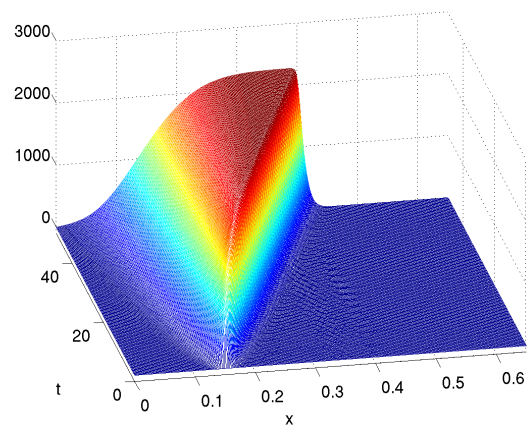


(b) Aproximación obtenida utilizando 8 modos de proyección y 8 puntos Gappy.

Figura 2: Resultados obtenidos para el ejemplo 1.



(a) Solución de alta fidelidad.



(b) Aproximación obtenida utilizando 46 modos de proyección y 46 puntos Gappy.

Figura 3: Resultados obtenidos para el ejemplo 2.



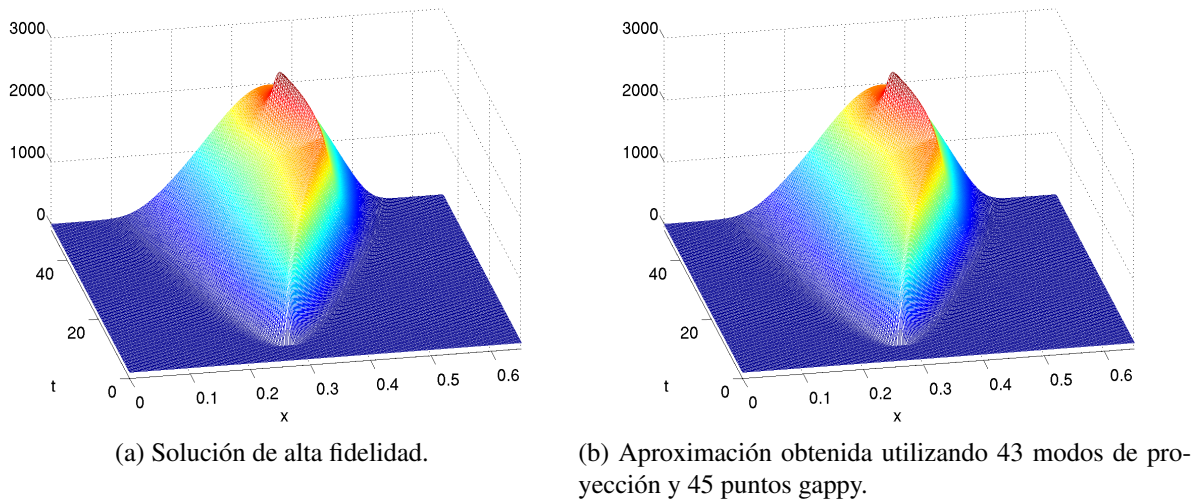


Figura 4: Resultados obtenidos para el ejemplo 3.

En el tercer ejemplo la conductividad se cambia a  $k(T) = [0,25T + 70] \frac{W}{K_m}$ , y la trayectoria de la fuente móvil cambia de sentido. Los parámetros de la fuente están dados por:  $\tau = 250\text{mm}$ ,  $\sigma = 5\text{mm}$ , con la velocidad función del tiempo

$$v \left[ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0s \leq t < 30s \\ 5 & \text{si } 5s \leq t < 30s \\ -5 & \text{si } 30s \leq t \leq 40s \\ 0 & \text{si } 40s < t \leq 50s \end{cases} \quad (29)$$

y  $q_s$  está dado por

$$q_s \left[ \frac{\text{W}}{\text{mm}^3} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0s \leq t < 30s \\ 4,0189 & \text{si } 5s \leq t \leq 40s \\ 0 & \text{si } 40s < t \leq 50s \end{cases} \quad (30)$$

En la figura 4a se puede observar la solución obtenida con el modelo de alta fidelidad. La aproximación que se logra utilizando el ROM se muestra en la figura 3b donde se utilizaron 43 modos de proyección y 45 puntos gappy, obteniéndose un error igual a  $3.0018e-04$ .

**Conclusiones parciales** De estos ejemplos se puede concluir que mientras la fuente no se mueva se pueden obtener buenos resultados en términos de la cantidad de modos de proyección y de puntos gappy necesarios para obtener una buena aproximación. En el caso en donde la fuente es móvil, los resultados no son tan alentadores, ya que el número de modos y puntos de muestreo necesarios para alcanzar la precisión deseada es alto. Más aún, si se toma menor cantidad de modos de proyección y puntos gappy, se obtiene una solución totalmente contaminada de oscilaciones. En este sentido, se puede concluir que la *hipótesis de la representación separada* falla para estos casos.

#### 4. ENFOQUE ALTERNATIVO: MARCO DE REFERENCIA MÓVIL

De los resultados que se presentaron en la sección 3.1, se puede observar que la situación de una fuente concentrada fija en una posición dada, no representa un problema para el ROM pre-

sentado en la sección 3. Cuando el problema involucra una fuente móvil, la situación empeora y deben ser utilizados un número significativo de modos para asegurar algún grado de exactitud.

Una manera de solucionar este problema es utilizar un marco de referencia móvil con respecto a la pieza soldada. Este marco de referencia se adhiere a la fuente, emulando la situación de una fuente concentrada fija en un problema donde la misma esta móvil. Para el caso unidimensional, utilizando un marco de referencia móvil, el problema queda gobernado por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} k \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q(\xi). \quad (31)$$

en donde  $v$  es la velocidad de la fuente y  $\xi$  es la coordenada correspondiente al marco de referencia móvil.

La discretización FEM de esta ecuación es similar a la introducida en la sección 2.2. La diferencia es que en este caso las funciones de forma  $N_i$  son funciones de  $\xi$ . Además, el término adicional proveniente de la advección de la temperatura debe ser considerado en la formulación FEM. En pocas palabras y haciendo abuso de notación para mantener simple el escrito, se tiene

$$\Pi = \frac{C}{\Delta t} T_n - \frac{C}{\Delta t} T_{n-1} + C_c T_n + K T_n + F - Q = 0, \quad (32)$$

donde  $C_c$  es la matriz de advección asociada al término  $\rho c v \frac{\partial T}{\partial \xi}$ .

#### 4.1. Formulación del ROM

Como punto de partida se toma todo el desarrollo presentado en la sección 3. Es por esto, que el único término considerado en esta sección es el término de advección. Teniendo en cuenta que este término es no lineal debido a que la capacidad calorífica depende de la temperatura, se reescribe la ecuación (32) como

$$\Pi = G_c + G_p + G_k + F - Q = 0, \quad (33)$$

donde

$$G_c = C_c T_n, \quad (34)$$

es el término distintivo del enfoque de marco móvil. El método de hiper-reducción puede ser aplicado a este término de manera similar a como se hizo en la sección 3. Luego, se tiene la siguiente aproximación para  $G_c$

$$G_c \simeq \mathbf{r} \hat{\mathbf{Y}}^{-1} \hat{G}_c, \quad (35)$$

llegándose finalmente a

$$\Pi^p = A_c \hat{G}_c + A_p \hat{G}_p + A_k \hat{G}_k - \mathbf{X}^T Q = 0, \quad (36)$$

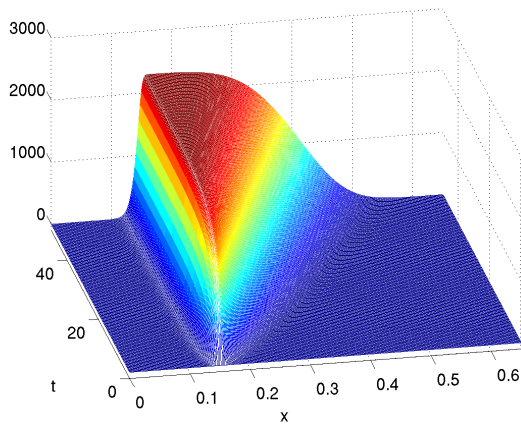
donde

$$A_c = \mathbf{X}^T \mathbf{r} \hat{\mathbf{Y}}^{-1}, \quad (37)$$

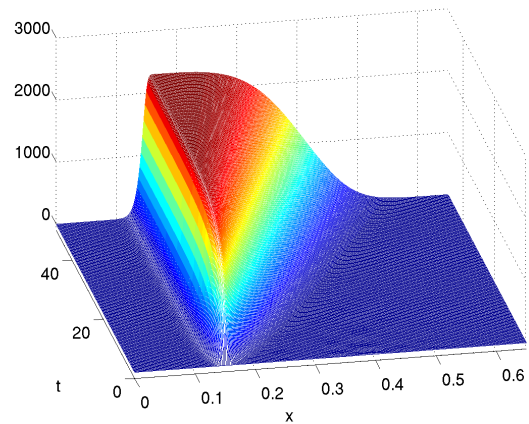
$$A_p = \mathbf{X}^T \mathbf{\Psi} \hat{\mathbf{\Psi}}^{-1} \text{ y} \quad (38)$$

$$A_k = \mathbf{X}^T \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{\Phi}}^{-1}. \quad (39)$$

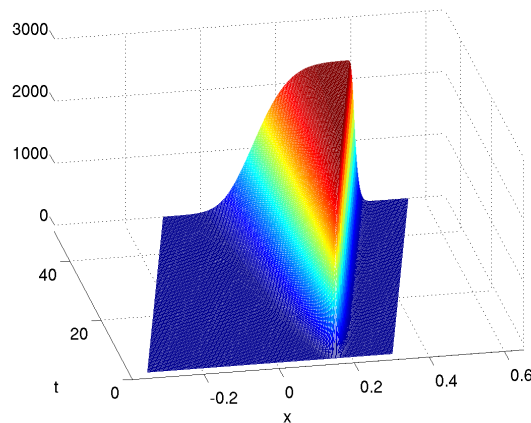
Notar que se utilizó algo del desarrollo presentado en la sección 3, utilizando las mismas letras para identificar los modos POD de proyección y los utilizados en el procedimiento gappy. Tener en cuenta que, en este caso, los modos son deducidos de snapshots tomados del modelo de alta fidelidad en donde el marco de referencia móvil es móvil con respecto a la pieza soldada.



(a) Solución de alta fidelidad.



(b) Aproximación obtenida utilizando 13 modos de proyección y 13 puntos Gappy.



(c) Solución ROM visualizada desde el marco de referencia fijo.

Figura 5: Resultados obtenidos para el ejemplo 2.

#### 4.1.1. Benchmarks tests

En esta sección los dos problemas presentados en la sección 3.1 donde la fuente es móvil, son tomados como benchmark tests para estudiar la performance del ROM presentado con anterioridad.

Los resultados obtenidos para el segundo ejemplo de la sección 3.1, pueden ser observados en las figuras 5a, 5b y 5c. En la figura 5a se muestra la solución obtenida con el modelo de alta fidelidad. La aproximación que se logra utilizando el ROM se muestra en la figura 5b donde se utilizaron 13 modos de proyección y 13 puntos gappy, obteniéndose un error igual a  $6.0124e-04$ .

Los resultados obtenidos para el segundo ejemplo de la sección 3.1, pueden ser observados en las figuras 6a y 6b. En la figura 6a se muestra la solución obtenida con el modelo de alta fidelidad. La aproximación que se logra utilizando el ROM se muestra en la figura 6b donde se utilizaron 19 modos de proyección y 20 puntos gappy, obteniéndose un error igual a  $7.3436e-04$ .

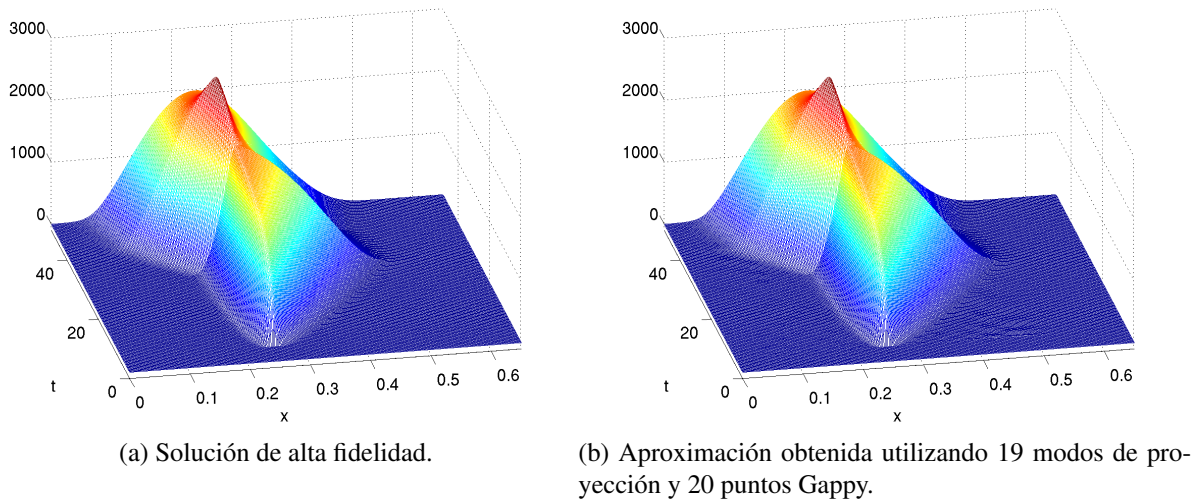


Figura 6: Resultados obtenidos para el ejemplo 3.

**Conclusiones parciales** En este caso se observaron buenos resultados, ya que la cantidad de modos de proyección y puntos gappy no es tan alta como en el caso de utilizar el marco de referencia fijo. En este sentido se puede concluir que la *hipótesis de la representación separada* es válida cuando la formulación es construida haciendo uso de un marco de referencia móvil que se mueve con la fuente.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron dos modelos reducidos para el problema de transferencia de calor no lineal sin cambio de fase. Se analizó la presencia de una fuente de calor móvil altamente concentrada, que se asimila a las presentes en problemas de soldadura.

En el primer modelo el marco de referencia está fijo con respecto a la pieza soldada, mientras que en el segundo modelo el marco de referencia se mueve con la fuente. Se mostró que cuando es utilizado un marco de referencia fijo, la fuente móvil introduce complicaciones que hacen necesario utilizar un gran número de modos de proyección y puntos gappy para alcanzar la precisión buscada y en este sentido se puede decir que la *hipótesis de la representación separada* no se cumple. Para remediar esta situación se propuso reformular el ROM a uno donde el marco de referencia es móvil. En este caso la *hipótesis de la representación separada* comienza a ser válida y son obtenidos buenos resultados.

Se tiene como trabajo futuro introducir el cambio de fase líquido-sólido y realizar pruebas multidimensionales. Otro trabajo a futuro que representa una complicación no menor, es el modelado de soldaduras con deposición de material.

## REFERENCIAS

- Anca A., Cardona A., Risso J., y Fachinotti V. Finite element modeling of welding processes. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2):688–707, 2011.
- Baiges J., Codina R., y Idelsohn S. Explicit reduced-order models for the stabilized finite element approximation of the incompressible navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(12):1219–1243, 2013. ISSN 1097-0363. doi:10.1002/flid.3777.

- Bergmann M., Bruneau C.H., y Iollo A. Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, 228(2):516 – 538, 2009. ISSN 0021-9991. doi:10.1016/j.jcp.2008.09.024.
- Berinde R. y Indyk P. *Sparse recovery using sparse random matrices*. 2008.
- Brenner T., Fontenot R., Cizmas P., O'Brien T., y Breault R. Augmented proper orthogonal decomposition for problems with moving discontinuities. *Powder Technology*, 203(1):78–85, 2010. Cited By (since 1996)1.
- Carlberg K., Farhat C., Cortial J., y Amsallem D. The GNAT method for nonlinear model reduction: effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows. *arXiv:1207.1349*, 2012.
- Chaturantabut S. y Sorensen D. Discrete empirical interpolation for nonlinear model reduction. En *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, páginas 4316–4321. 2009. ISSN 0191-2216. doi:10.1109/CDC.2009.5400045.
- Chinesta F., Ammar A., y Cueto E. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327–350, 2010. ISSN 1134-3060. doi:10.1007/s11831-010-9049-y.
- Cosimo A., Fachinotti V., y Cardona A. An enrichment scheme for solidification problems. *Computational Mechanics*, páginas 1–19, 2012. Cited By (since 1996) 0; Article in Press.
- Eldar Y. y Kutyniok G. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Compressed Sensing: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2012. ISBN 9781107005587.
- Everson R. y Sirovich L. Karhunen-loeve procedure for gappy data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12:1657–1664, 1995.
- Goldak J., Chakravarti A., y Bibby M. A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 15:299–305, 1984. ISSN 1073-5615.
- Jolliffe I. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2002. ISBN 9780387954424.
- Kunisch K. y Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2):492–515, 2002. doi:10.1137/S0036142900382612.
- Néron D. y Ladevèze P. Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):351–372, 2010.
- Nouy A. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23–24):1603 – 1626, 2010. ISSN 0045-7825. doi:10.1016/j.cma.2010.01.009.
- Ronda J. y Oliver G. Consistent thermo-mechano-metallurgical model of welded steel with unified approach to derivation of phase evolution laws and transformation-induced plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(2):361 – 418, 2000. ISSN 0045-7825. doi:10.1016/S0045-7825(99)00461-2.
- Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I - Coherent structures. II - Symmetries and transformations. III - Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45:561–571, 1987.
- Strang G. The fundamental theorem of linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, 100(9):pp. 848–855, 1993. ISSN 00029890.