

VIBRACIONES TRANSVERSALES DE PLACAS SUPERELÍPTICAS CON FUERZAS EN SU PLANO Y MASAS ADOSADAS

Santiago Maiz^a, Carlos A. Rossit^{a,b} and Diana V. Bambill^{a,b}

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), Bahía Blanca, Argentina.*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Bahía Blanca, Argentina.*

smaiz@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar

Keywords: Vibración de placas, Placas elípticas, Fuerzas en el plano, Masas adosadas.

Abstract. Los trabajos que estudian la vibración transversal de placas elípticas no son numerosos en la literatura científica. Más contados aún son los casos en que además se considera la acción de fuerzas en el plano medio de la placa o de una masa adosada a su superficie.

En el presente trabajo se evalúa la influencia de ambas perturbaciones actuando simultáneamente sobre el comportamiento dinámico de una placa delgada superelíptica.

Se determinan frecuencias naturales de vibración transversal de diversas configuraciones de placas superelípticas sometidas a fuerzas de distinta magnitud en su plano y con la presencia de una masa de magnitud variable adosada en una posición arbitraria

En el modelo planteado, se define el contorno de la placa con una función superelíptica lo que permite analizar en un proceso unificado desde placas elípticas, pasando por la circular, hasta placas rectangulares.

El problema es analizado mediante el método de Ritz, aproximando las amplitudes de desplazamiento transversal con expresiones polinómicas en las coordenadas cartesianas. Los resultados obtenidos mediante el enfoque propuesto, son comparados satisfactoriamente con casos particulares del modelo en análisis disponibles en la literatura técnico-científica.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones de placas tuvo sus comienzos en los albores del siglo XIX a través de los trabajos experimentales de Chladny y los teóricos de Sophie Germaine con las correcciones de Lagrange.

A lo largo de estas últimas dos centurias el tema se ha ido enriqueciendo con las contribuciones de numerosos investigadores de distintos países de la Tierra. Ello es debido a la importancia y variedad de las aplicaciones que el tema tiene en diversos campos de la ingeniería: desde las clásicas en ingeniería civil hasta la modelización de lentes de telescopios o plaquetas de circuitos impresos.

En algunas situaciones tecnológicas, es menester recurrir a placas de diferentes formas en su contorno. En ese aspecto, adquiere trascendencia el estudio de placas superelípticas.

Es sabido (Maiz et al, 2009, 2010, 2012) que el concepto de placa superelíptica permite un tratamiento unificado para un amplio rango de placas considerando desde placas circulares a cuadradas, y desde elípticas a rectangulares.

A pesar de lo extendido del estudio de vibraciones de placas, no son numerosos los trabajos sobre placas superelípticas e incluso elípticas en la literatura. Más contados aún son los casos en que además se considera la acción de fuerzas en el plano medio de la placa o de una masa adosada a su superficie

Entre los trabajos sobre placas elípticas merecen consignarse las contribuciones de Sato (1972, 1973, 1976 y 2002) quien investigó profundamente las vibraciones transversales de placas elípticas macizas con distintas condiciones de borde.

También, entre los trabajos pioneros debe mencionarse el de DeCapua y Sun (1972) que estudiaron las frecuencias de placas ortótropas superelípticas utilizando polinomios como funciones aproximantes en el método de Ritz

En lo que hace al estudio de la vibración transversal de una placa superelíptica con la presencia de fuerzas en el plano, numerosos investigadores han estudiado el tema, pero por su actualidad se consigna el reciente trabajo de Hasheminejad (2013).

La presencia de masas adosadas sobre placas elípticas fue estudiada por Nallim y Grossi (2008) y por Maiz et al. (2009a, 2009b).

En el presente trabajo se estudia el efecto que la presencia simultánea de una masa adosada y fuerzas en el plano tienen sobre la vibración transversal de una placa superelíptica. En el caso de la masa adosada, además de su efecto traslacional se tendrá en cuenta la influencia de su inercia rotatoria al vibrar la placa.

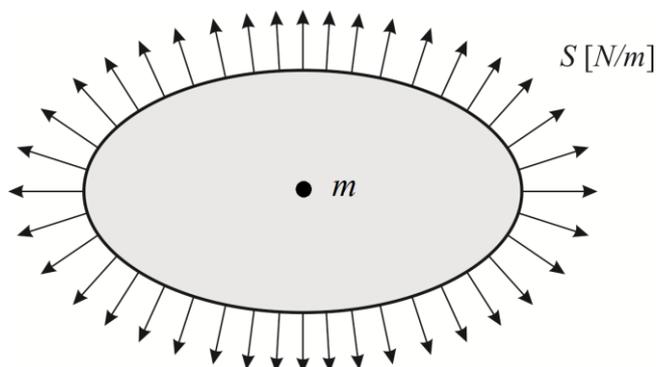


Figura 1: Placa superelíptica con esfuerzos uniformes en el plano y una masa m adosada

2 EL MÉTODO DE RITZ

El funcional de energía que gobierna el problema de la placa vibrante de la [Figura 1](#) es:

$$J(W) = \iint_A D \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + S \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \rho h \iint_A W^2 dx dy + \left[m W^2 + J_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + J_y \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}_{(x_m, y_m)}$$

donde A es el dominio de la placa, ν es el coeficiente de Poisson, ρ es la densidad del material de la placa, h su espesor uniforme, S es la carga en el plano medio de la placa y normal a su borde expresada en N/m como se observa en la [Figura 1](#), m es la masa concentrada adosada a la placa en la posición x_m, y_m , con inercia rotatoria J_x y J_y con respecto al plano medio de la placa en los ejes x e y respectivamente.

La expresión $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ corresponde a la rigidez flexional de la placa; con E módulo de Young y ν coeficiente de Poisson.

Cuando la placa ejecuta uno de sus modos normales de vibración, el desplazamiento de la superficie media de la placa $w(x, y, t)$ puede ser representado mediante el producto:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t}; \quad (2)$$

donde W es una función continua que representa la amplitud de la deformación de la superficie media y ω es la frecuencia circular natural.

Se obtendrá una solución aproximada del problema mediante el método de Ritz. Para ello es necesario utilizar como aproximación para la amplitud W , alguna expresión que satisfaga al menos las condiciones esenciales de borde. En este caso la expresión para W será definida como una sumatoria con coeficientes indeterminados C_i .

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{i=1}^R C_i f_i(x, y); \quad (3)$$

en la que f representa funciones continuas:

$$f_i(x, y) = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{2\alpha} + \left(\frac{y}{b} \right)^{2\alpha} - 1 \right]^n \phi_i(x, y). \quad (4)$$

La expresión en el corchete define el contorno de la placa, el parámetro n depende de la vinculación de la placa y los ϕ_i 's son monomios elegidos de un set de monomios de la forma:

$$x^{q-p} y^p. \quad (5)$$

Entonces, la solución aproximada (3) deviene en:

$$W_a(x, y) = \sum_{i=1}^R C_i f_i(x, y) = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{2\alpha} + \left(\frac{y}{b} \right)^{2\alpha} - 1 \right]^n \sum_{q=0}^s \sum_{p=0}^q C_i x^{q-p} y^p ; \quad (6)$$

$$\text{con } \left(i = \frac{q(q+1)}{2} + (p+1); R = \frac{(s+1)(s+2)}{2} \right).$$

La ecuación (6) satisface las condiciones de borde de placas libres cuando $n=0$, simplemente apoyadas cuando $n=1$ y empotradas cuando $n=2$.

Es conveniente normalizar las coordenadas:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad (7)$$

con lo cual:

$$W_a(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^s \sum_{p=0}^q \bar{C}_i \left[\xi^{2\alpha} + \eta^{2\alpha} - 1 \right]^n \xi^{q-p} \eta^p ; \quad (8)$$

donde $\bar{C}_i = C_i a^{q-p} b^p$.

De acuerdo con el método de Ritz, luego de introducir la expresión aproximada $W_a(\xi, \eta)$, Ec. (8) en la Ec. (1), la integración de $J(W_a)$ conduce a una función cuadrática homogénea en los desconocidos coeficientes de desplazamiento \bar{C}_i . La minimización de dicha función lleva a un sistema de ecuaciones homogéneas de primer orden en los \bar{C}_i :

$$\frac{\partial J(W_a)}{\partial \bar{C}_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, R ; \quad (9)$$

El sistema de ecuaciones obtenido puede ser escrito en la forma:

$$[\mathbf{K} + N\mathbf{H} - \Omega^2\mathbf{L}] \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0}; \quad (10)$$

donde $N = Sab/D$, es el valor adimensional de la carga en el plano, $\Omega = \omega ab\sqrt{\rho h/D}$ son los coeficientes de frecuencia naturales de vibración del sistema y \mathbf{K} , \mathbf{H} y \mathbf{L} son matrices simétricas cuyos elementos vienen dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \iint_{\bar{A}} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\xi\xi} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \varphi_{i,\eta\eta} \varphi_{j,\eta\eta} + v(\varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\eta\eta} + \varphi_{j,\xi\xi} \varphi_{i,\eta\eta}) + 2(1-v) \varphi_{i,\xi\eta} \varphi_{j,\xi\eta} \right] d\xi d\eta; \\ h_{ij} &= \iint_{\bar{A}} (\varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} + \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta}) d\xi d\eta; \\ l_{ij} &= \iint_{\bar{A}} \varphi_i \varphi_j d\xi d\eta + MR \varphi_i(\xi_m, \eta_m) \varphi_j(\xi_m, \eta_m) + MRr^2 \left[\varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} + \frac{a^2}{b^2} \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} \right]_{(\xi_m, \eta_m)} ; \end{aligned} \quad (11)$$

en las cuales \bar{A} es el dominio normalizado, i, j son enteros (1, 2, ..., R) y $\varphi_i(\xi, \eta) = \left[\xi^{2\alpha} + \eta^{2\alpha} - 1 \right]^n \xi^{q-p} \eta^p$.

$M = m/m_p$ es la relación entre la masa concentrada m y la masa total de la placa superelíptica: $m_p = \rho abh A_N$; r es el radio de giro, $J_x = J_y = m a^2 r^2$ y A_N es el área del dominio normalizado, en particular es $A_N = \pi$ para $\alpha=1$ y es $A_N=4$ para $\alpha \rightarrow \infty$.

Los coeficientes de frecuencia natural Ω son obtenidos estableciendo la nulidad del determinante de la Ec. (10), definiendo con anterioridad el valor N de la carga en el plano. La condición de no trivialidad conduce a una ecuación trascendente en Ω .

En tanto que el coeficiente de carga crítica N_{cr} se determina haciendo nulo el coeficiente de frecuencias Ω y procediendo de manera similar a lo antedicho, quedando el problema de carga crítica de la siguiente forma:

$$[\mathbf{K} + N_{cr} \mathbf{H}] \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han realizado pruebas de convergencia y comparaciones con trabajos anteriores llegando a una predicción óptima de los coeficientes de frecuencias y de carga crítica de compresión con $R=136$.

La [Tabla 1](#) muestra los coeficientes de carga crítica de compresión N_{cr} , pandeo, para diferentes placas superelípticas empotradas en su contorno, con $\nu=0,30$.

Geometría	α	a/b			Obs.
		1	1,5	2	
Superelíptica	1	14,682	16,856	20,868	
	2	13,175	15,361	19,484	
	5	13,076	15,250	19,362	
Rectangular		13,087	15,253	19,362	Timoshenko et al., 1961

Tabla 1: Coeficientes de carga crítica de compresión $|N_{cr}| = \left| S \frac{a b}{D} \right|$ en el plano para diferentes geometrías

Los valores presentes en la [Tabla 1](#), para la placa rectangular, fueron calculados por Timoshenko y Gere ([Timoshenko et al., 1961](#)).

Debido a la cantidad y variabilidad de parámetros involucrados en la descripción del comportamiento del modelo propuesto, se presentan algunos casos representativos que son considerados para demostrar la conveniencia del procedimiento.

A continuación se muestran los coeficientes adimensionales de frecuencia natural para los primeros cinco modos en función de distintas cargas N en el plano de la placa y para la masa m concentrada aplicada en el centro de la placa. Se adopta el parámetro $\lambda = S a b / D / |N_{cr}|$ para relacionar la carga S en el plano con el valor de la carga crítica.

En la [Tabla 2](#), se muestra los coeficientes adimensionales para la placa circular, se consideraron 4 valores para la masa concentrada, $M = 0; 0,5; 1; 2$. Cuando no hay carga en el plano los valores obtenidos son los clásicos de la bibliografía para la placa circular empotrada

vibrante.

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	7,2750	10,216	12,440	14,296	17,376
Ω_2	14,2449	18,114	21,260	23,975	26,396	30,633
Ω_3	27,976	31,624	34,876	37,837	40,572	45,527
Ω_4	33,024	36,554	39,771	42,743	45,517	50,598
Ω_5	44,129	47,709	51,029	54,138	57,070	62,506
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	0	3,6054	5,0410	6,1146	7,0021	8,4591
Ω_2	14,2449	18,114	21,260	23,975	26,396	30,633
Ω_3	21,006	23,143	25,081	26,865	28,525	31,553
Ω_4	27,976	31,624	34,876	37,837	40,572	45,527
Ω_5	44,129	47,709	51,029	54,138	57,070	62,506
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,7109	3,7772	4,5696	5,2219	6,2889
Ω_2	14,2449	18,114	21,260	23,975	26,396	30,568
Ω_3	20,106	22,235	24,162	25,931	27,575	30,633
Ω_4	27,976	31,624	34,876	37,837	40,572	45,527
Ω_5	44,129	47,709	51,029	54,138	57,070	62,506
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	1,9821	2,7552	3,3271	3,7972	4,5642
Ω_2	14,245	18,114	21,260	23,975	26,396	30,062
Ω_3	19,605	21,743	23,671	25,439	27,079	30,633
Ω_4	27,976	31,624	34,876	37,837	40,572	45,528
Ω_5	44,129	47,709	51,029	54,138	57,070	62,506

Tabla 2: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa circular con masa en el centro

Puede observarse en las tablas el efecto rigidizante de la carga N de tracción, casos $N/N_{cr} = -1/2, -1, -2$; y el efecto contrario si la carga es de compresión $N/N_{cr} = 1, 1/2$; pues todas las frecuencias disminuyen.

La presencia de la masa centrada en la placa circular tal como es de esperarse no altera los coeficientes de frecuencia que corresponden a las formas modales que tienen al centro de la placa como un punto de sus líneas nodales.

La [Tabla 3](#), contiene los coeficientes de una placa superelíptica, $\alpha=2$, de relación $a/b=1$, los coeficientes disminuyen al colocar una masa M que varía entre 1 y 2 veces el valor de la masa de la placa, excepto en los casos en la forma modal correspondiente contiene el punto centro de la placa como un punto de alguna de sus líneas nodales, en cuyo caso los coeficientes de frecuencia no resultan alterados. Esta misma circunstancia puede observarse en los coeficientes de frecuencia de las tablas siguientes ([Tablas 4 a 11](#)).

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	6,1039	9,093	11,269	13,058	15,997
Ω_2	12,4007	15,512	18,671	21,343	23,696	27,773
Ω_3	21,945	24,905	28,173	31,082	33,728	38,449
Ω_4	26,849	29,728	32,978	35,922	38,631	43,520
Ω_5	28,132	30,948	34,163	37,098	39,812	44,733
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	0	2,9762	4,4178	5,4576	6,3057	7,6871
Ω_2	12,4005	15,511	18,671	21,343	23,696	27,772
Ω_3	18,394	20,129	22,103	23,899	25,556	28,552
Ω_4	21,945	24,905	28,173	31,082	33,728	38,449
Ω_5	26,850	29,728	32,979	35,922	38,631	43,520
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,2340	3,3042	4,0711	4,6943	5,7060
Ω_2	12,4005	15,511	18,671	21,342	23,695	27,704
Ω_3	17,660	19,386	21,345	23,123	24,761	27,781
Ω_4	21,945	24,905	28,173	31,082	33,728	38,449
Ω_5	26,850	29,728	32,979	35,922	38,631	43,520
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	1,632	2,408	2,961	3,410	4,138
Ω_2	12,400	15,511	18,671	21,342	23,695	27,287
Ω_3	17,252	18,982	20,940	22,715	24,347	27,775
Ω_4	21,945	24,905	28,173	31,082	33,728	38,449
Ω_5	26,850	29,728	32,979	35,922	38,631	43,520

Tabla 3: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelástica $\alpha = 2$ de relación $a/b=1$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	6,4093	8,990	10,938	12,561	15,253
Ω_2	12,1336	15,564	18,333	20,712	22,829	26,526
Ω_3	20,922	24,203	27,069	29,644	32,001	36,230
Ω_4	26,793	29,992	32,866	35,497	37,937	42,374
Ω_5	27,118	30,238	33,065	35,666	38,086	42,500
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	0	3,0678	4,2935	5,2130	5,9753	7,2317
Ω_2	12,1332	15,563	18,332	20,711	22,828	26,523
Ω_3	18,0463	19,998	21,762	23,382	24,886	27,628
Ω_4	20,922	24,203	27,069	29,644	32,001	36,230
Ω_5	26,795	29,994	32,869	35,501	37,941	42,379
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,2966	3,2050	3,8829	4,4432	5,3642
Ω_2	12,1331	15,563	18,332	20,711	22,827	26,516
Ω_3	17,3719	19,312	21,061	22,664	24,151	26,863
Ω_4	20,922	24,203	27,069	29,644	32,001	36,230
Ω_5	26,795	29,994	32,869	35,501	37,941	42,379
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	1,6753	2,3331	2,8222	3,2261	3,8891
Ω_2	12,133	15,563	18,331	20,711	22,826	26,422
Ω_3	16,997	18,939	20,686	22,285	23,767	26,545
Ω_4	20,922	24,203	27,069	29,644	32,001	36,230
Ω_5	26,795	29,994	32,869	35,501	37,941	42,379

Tabla 4: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelástica $\alpha = 5$ de relación $a/b=1$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	8,1395	11,420	13,898	15,965	19,396
Ω_2	10,454	15,354	18,981	21,986	24,603	29,095
Ω_3	19,924	24,121	27,658	30,768	33,573	38,537
Ω_4	21,407	25,836	29,593	32,908	35,904	41,219
Ω_5	30,161	34,329	38,023	41,372	44,457	50,028
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	0	3,9386	5,4936	6,6542	7,6131	9,1883
Ω_2	10,454	15,354	18,981	21,986	24,603	29,095
Ω_3	17,331	20,683	23,454	25,858	28,006	31,770
Ω_4	19,924	24,121	27,658	30,768	33,573	38,537
Ω_5	30,161	34,329	38,023	41,372	44,457	49,917
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,9493	4,0982	4,9507	5,6525	6,8020
Ω_2	10,454	15,354	18,981	21,986	24,603	29,095
Ω_3	16,856	20,161	22,889	25,253	27,364	31,064
Ω_4	19,924	24,121	27,658	30,768	33,573	38,537
Ω_5	30,161	34,329	38,023	41,372	44,457	49,518
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	2,1508	2,9813	3,5953	4,0999	4,9248
Ω_2	10,454	15,354	18,981	21,986	24,603	29,095
Ω_3	16,579	19,870	22,581	24,929	27,024	30,697
Ω_4	19,924	24,121	27,658	30,768	33,573	38,537
Ω_5	30,161	34,329	38,023	41,372	44,339	49,321

Tabla 5: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa elíptica de relación $a/b=1,5$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	7,3041	10,244	12,464	14,316	17,387
Ω_2	7,9884	12,687	16,014	18,727	21,071	25,068
Ω_3	17,988	22,003	25,182	27,982	30,510	34,985
Ω_4	18,239	22,111	25,561	28,582	31,300	36,100
Ω_5	24,010	27,841	31,184	34,185	36,929	41,852
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	00	3,5055	4,8842	5,9140	6,7662	8,1694
Ω_2	7,9883	12,687	16,014	18,727	21,071	25,068
Ω_3	14,163	17,320	19,901	22,127	24,108	27,565
Ω_4	18,239	22,003	25,182	27,982	30,510	34,985
Ω_5	24,010	27,841	31,184	34,185	36,929	41,852
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,6209	3,6376	4,3931	5,0166	6,0408
Ω_2	7,9883	12,687	16,014	18,727	21,071	25,068
Ω_3	13,768	16,901	19,453	21,650	23,602	27,008
Ω_4	18,239	22,003	25,182	27,982	30,510	34,985
Ω_5	24,010	27,841	31,184	34,185	36,929	41,852
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	1,9095	2,6437	3,1876	3,6358	4,3711
Ω_2	7,9883	12,687	16,014	18,727	21,071	25,068
Ω_3	13,540	16,669	19,211	21,396	23,336	26,719
Ω_4	18,239	22,003	25,182	27,982	30,510	34,985
Ω_5	24,010	27,841	31,184	34,185	36,929	41,852

Tabla 6: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelíptica $\alpha = 2$ de relación $a/b=1,5$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	7,2225	10,125	12,316	14,141	17,169
Ω_2	7,6578	12,345	15,634	18,307	20,613	24,537
Ω_3	17,429	21,522	24,805	27,569	30,063	34,479
Ω_4	17,940	21,663	24,934	27,917	30,596	35,321
Ω_5	22,874	26,666	29,958	32,905	35,594	40,407
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	00	3,4103	4,7533	5,7581	6,5910	7,9653
Ω_2	7,6575	12,345	15,634	18,307	20,612	24,536
Ω_3	13,708	16,859	19,431	21,647	23,618	27,059
Ω_4	17,940	21,663	24,805	27,569	30,063	34,479
Ω_5	22,874	26,666	29,958	32,905	35,594	40,407
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,5447	3,5341	4,2710	4,8804	5,8841
Ω_2	7,6575	12,345	15,633	18,306	20,612	24,536
Ω_3	13,343	16,475	19,020	21,209	23,154	26,545
Ω_4	17,940	21,663	24,805	27,569	30,063	34,479
Ω_5	22,874	26,666	29,958	32,905	35,594	40,407
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	1,8519	2,5661	3,0966	3,5347	4,2556
Ω_2	7,6575	12,345	15,633	18,306	20,612	24,536
Ω_3	13,134	16,263	18,799	20,977	22,910	26,279
Ω_4	17,940	21,663	24,805	27,569	30,063	34,479
Ω_5	22,874	26,666	29,958	32,905	35,594	40,407

Tabla 7: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelíptica $\alpha = 5$ de relación $a/b=1,5$ con masa en el centro.

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	9,7730	13,689	16,644	19,107	23,193
Ω_2	8,8406	15,356	19,749	23,277	26,303	31,431
Ω_3	17,569	23,383	27,988	31,908	35,375	41,402
Ω_4	25,505	30,604	34,929	38,746	42,197	48,317
Ω_5	28,236	33,768	38,497	42,691	46,495	53,261
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	00	4,5072	6,2669	7,5790	8,6640	10,450
Ω_2	8,8406	15,356	19,749	23,277	26,303	31,431
Ω_3	14,754	19,542	23,254	26,368	29,094	33,781
Ω_4	25,505	30,604	34,929	38,746	42,197	48,317
Ω_5	28,236	33,768	38,497	42,691	46,495	53,261
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	3,3510	4,6415	5,5993	6,3893	7,6869
Ω_2	8,8406	15,356	19,749	23,277	26,303	31,431
Ω_3	14,459	19,225	22,903	25,985	28,679	33,308
Ω_4	25,505	30,604	34,929	38,746	42,197	48,317
Ω_5	28,236	33,768	38,497	42,691	46,495	53,261
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	2,4334	3,3626	4,0504	4,6170	5,5466
Ω_2	8,8406	15,356	19,749	23,277	26,303	31,431
Ω_3	14,289	19,050	22,715	25,781	28,461	33,063
Ω_4	25,505	30,604	34,929	38,746	42,197	48,317
Ω_5	28,236	33,768	38,497	42,691	46,495	53,144

Tabla 8: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa elíptica de relación $a/b=2$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	8,8801	12,442	15,131	17,374	21,094
Ω_2	5,4064	12,267	16,397	19,629	22,367	26,966
Ω_3	12,875	18,757	23,158	26,818	30,013	35,507
Ω_4	22,717	28,129	32,454	35,971	39,153	44,799
Ω_5	23,787	28,472	32,639	36,581	40,124	46,374
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	00	4,1003	5,6808	6,8617	7,8408	9,4581
Ω_2	5,4064	12,267	16,397	19,629	22,367	26,966
Ω_3	10,469	15,401	19,005	21,959	24,512	28,858
Ω_4	22,717	28,129	32,454	35,971	39,153	44,799
Ω_5	23,787	28,472	32,639	36,581	40,124	46,373
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	3,0433	4,1990	5,0596	5,7720	6,9473
Ω_2	5,4064	12,267	16,397	19,629	22,367	26,966
Ω_3	10,235	15,171	18,755	21,686	24,216	28,518
Ω_4	22,717	28,129	32,454	35,971	39,153	44,799
Ω_5	23,787	28,472	32,639	36,581	40,124	46,373
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	2,2077	3,0384	3,6560	4,1668	5,0090
Ω_2	5,4064	12,267	16,397	19,629	22,367	26,966
Ω_3	10,100	15,047	18,623	21,544	24,063	28,345
Ω_4	22,717	28,129	32,454	35,971	39,153	44,799
Ω_5	23,787	28,472	32,639	36,581	40,123	46,373

Tabla 9: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelíptica $\alpha = 2$ de relación $a/b=2$ con masa en el centro

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	8,7736	12,290	14,944	17,157	20,826
Ω_2	4,8474	11,828	15,917	19,100	21,790	26,298
Ω_3	12,099	18,021	22,391	26,006	29,153	34,551
Ω_4	21,791	27,197	31,675	35,485	38,631	44,211
Ω_5	23,425	28,065	32,006	35,577	39,076	45,237
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	00	3,9994	5,5412	6,6964	7,6565	9,2463
Ω_2	4,8472	11,828	15,917	19,099	21,789	26,297
Ω_3	9,7801	14,771	18,369	21,304	23,835	28,137
Ω_4	21,790	27,196	31,674	35,485	38,631	44,211
Ω_5	23,425	28,065	32,006	35,575	39,074	45,234
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	2,9635	4,0901	4,9320	5,6309	6,7872
Ω_2	4,8472	11,828	15,917	19,099	21,789	26,297
Ω_3	9,5634	14,564	18,144	21,059	23,569	27,832
Ω_4	21,790	27,196	31,673	35,485	38,631	44,211
Ω_5	23,425	28,065	32,006	35,575	39,074	45,234
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	2,1478	2,9574	3,5616	4,0629	4,8919
Ω_2	4,8472	11,828	15,917	19,099	21,789	26,297
Ω_3	9,4395	14,453	18,027	20,932	23,432	27,676
Ω_4	21,790	27,196	31,673	35,485	38,631	44,211
Ω_5	23,425	28,065	32,006	35,575	39,073	45,233

Tabla 10: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelíptica $\alpha = 5$ de relación $a/b=2$ con masa en el centro

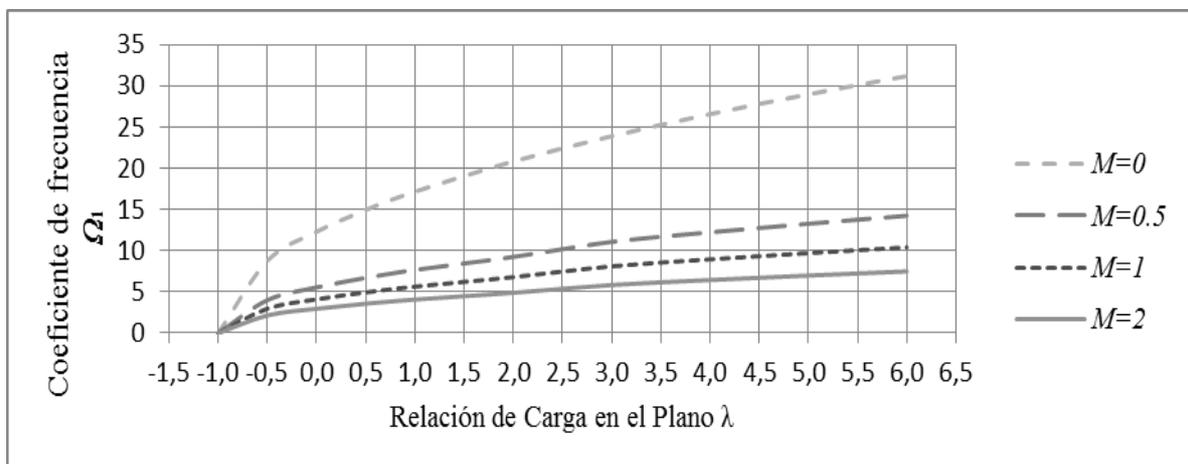


Figura 2: Variación de coeficiente de frecuencia fundamental en función del valor de la masa M y de la relación λ de carga, aplicada en el plano medio de la placa.

La **Figura 2** muestra cómo varían los coeficientes de frecuencia fundamental cuando la carga aplicada en la placa crece desde el valor crítico hasta dos veces ese valor en tracción y la masa centrada aumenta de 0 a 2 su magnitud. Este comportamiento es también observable en para las otras frecuencias y todas las relaciones de α y a/b presentadas en los ejemplos numéricos seleccionados.

	<i>compresión</i>		<i>sin carga</i>		<i>tracción</i>	
	$\lambda=-1$	-1/2	0	1/2	1	2
<i>M=0</i>						
Ω_1	0	8,7736	12,290	14,944	17,157	20,826
Ω_2	4,8474	11,828	15,917	19,100	21,790	26,298
Ω_3	12,099	18,021	22,391	26,006	29,153	34,551
Ω_4	21,791	27,197	31,675	35,485	38,631	44,211
Ω_5	23,425	28,065	32,006	35,577	39,076	45,237
<i>M=0,5</i>						
Ω_1	0	4,4506	6,0224	7,1858	8,1482	9,7389
Ω_2	3,8752	10,598	14,391	17,309	19,759	23,842
Ω_3	12,050	17,766	21,813	25,036	27,781	32,439
Ω_4	15,896	20,217	23,912	27,218	30,219	35,508
Ω_5	22,693	27,686	31,866	35,523	38,810	44,607
<i>M=1</i>						
Ω_1	0	3,3149	4,4553	5,2972	5,9932	7,1436
Ω_2	3,7273	10,533	14,319	17,227	19,668	23,734
Ω_3	12,038	17,703	21,671	24,828	27,531	32,140
Ω_4	15,388	19,833	23,633	27,015	30,061	35,393
Ω_5	22,684	27,684	31,865	35,523	38,810	44,605
<i>M=2</i>						
Ω_1	0	2,4085	3,2245	3,8262	4,3236	5,1459
Ω_2	3,6352	10,500	14,283	17,186	19,622	23,680
Ω_3	12,030	17,661	21,583	24,709	27,394	31,984
Ω_4	15,109	19,640	23,505	26,926	29,993	35,342
Ω_5	22,679	27,683	31,865	35,523	38,809	44,604

Tabla 11: Coeficientes adimensionales de frecuencia de la placa superelíptica $\alpha = 5$ de relación $a/b=2$ con la masa ubicada en $x=1/4a$ y $y=1/4b$

La última **Tabla, 11**, muestra el conjunto de coeficientes de frecuencia para una placa con una masa ubicada en: $\xi = 1/4$; $\eta = 1/4$. En este caso se observa poca influencia del incremento de la magnitud de la masa partir de la segunda frecuencia.

4 CONCLUSIONES

Se ha demostrado que el presente enfoque resulta ser una herramienta eficaz para estudiar el problema de vibración de placas superelípticas con una masa adosada y sometidas a la acción

de fuerzas en su plano medio. La precisión es pasible de ser mejorada incrementando el número de términos en la expresión aproximante de la deflexión de la placa.

El presente procedimiento puede ser adaptado para considerar diferentes condiciones de borde en la placa y ciertas complejidades adicionales como la presencia de orificios, ortotropía en el material entre otras.

AGRADECIMIENTOS

El presente realizado fue auspiciado por la Universidad Nacional del Sur y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

REFERENCES

- De Capua, N. J., Sun, B. C., Transverse vibration of a class of orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics—ASME*, 39: 613–615, 1972.
- Hasheminejad, S. M., Ghaheri A., Rezaei S., Semi-analytic solutions for the free in-plane vibrations of confocal annular elliptic plates with elastically restrained edges. *Journal of Sound and Vibration*, 331: 434-456, 2012.
- Maiz S., Bambill D. V., Rossit C. A., Rossi R. E., Vibraciones de placas delgadas superelípticas con masas adosadas. *Mecánica Computacional*, Vol. XXVIII: 573-586, 2009a.
- Maiz, S., Rossit, C.A., Bambill, D.V., Susca, A., Transverse vibrations of a clamped elliptical plate carrying a concentrated mass at an arbitrary position. *Journal of Sound and Vibration*, 320:1146-1163, 2009b.
- Mai, S., Bambill, D. V., Rossit, C. A., Rossi R. E., Free vibration of orthotropic thin superelliptical plates with concentrated masses. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIX, 1225-1241, 2010.
- Maiz S., Bambill D. V., Rossit C. A., Vibraciones de placas superelípticas con fuerzas en su plano. *Mecánica Computacional*, Vol. XXXI, 2485-2496, 2012.
- Nallim, L. G., Grossi, R. O., Natural frequencies of symmetrically laminated elliptical and circular plates, *International Journal of Mechanical Sciences* 50: 1153–1167, 2008.
- Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with simply supported edge. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 52: 919-922, 1972
- Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with free edge. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54:547-550, 1973.
- Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with edge restrained elastically. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 129:260-264, 1976.
- Sato, K., Vibration and Buckling of a Clamped Elliptical Plate on Elastic Foundation and under Uniform In-Plane Force. *Theor Appl Mech*, 51:49-62, 2002.
- Timoshenko, S. P., Gere, J. M., *Theory of elastic stability*. Mc Graw Hill, 1961.