

## ESTUDIO COMPARATIVO DE LA VARIACIÓN DE TENSIONES EN EL ESPESOR DE PLACAS LAMINADAS USANDO MACRO ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS

Rita F. Rango<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup> y Sergio Oller<sup>b</sup>

<sup>a</sup>ICMASa, INIQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia  
5150, 4400 Salta, Argentina, [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar), <http://www.ing.unsa.edu.ar>

<sup>b</sup>CIMNE. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad  
Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España,  
[sergio.oller@upc.edu](mailto:sergio.oller@upc.edu), <http://www.cimne.upc.es>

**Palabras clave:** Placas Laminadas, Macro Elemento, Variación de Tensiones, Placas  
Delgadas, Placas Gruesas

**Resumen.** Debido a la baja rigidez cortante transversal, las placas compuestas laminadas exhiben una deformación cortante transversal bastante más significativa, aún para bajas relaciones espesor/lado, que placas isótropas homogéneas con las mismas dimensiones geométricas. A efectos de considerar este aspecto en el análisis y diseño de placas laminadas, y aprovechar las ventajas potenciales que estos materiales ofrecen, es necesario contar con herramientas de análisis precisas que permitan realizar diseños adecuados a los requerimientos cada vez más estrictos y que a la vez sean versátiles permitiendo realizar cálculos a gran escala. En este trabajo se emplean macro elementos finitos enriquecidos formulados por los autores, para el estudio y comparación de la variación de desplazamientos y tensiones en el espesor de placas laminadas delgadas, moderadamente gruesas y gruesas, para evidenciar la influencia de la relación espesor/lado en la respuesta mecánica de las placas. Para el estudio llevado a cabo se incorporan en el modelo las cinemáticas correspondientes a la teoría clásica de placas laminadas (CLPT), de primer orden de deformación por corte (FSDT) y la teoría trigonométrica de deformación por corte (TSDT). Para cada una de estas teorías el macro elemento obtenido constituye un elemento finito jerárquicamente enriquecido con polinomios de Gram-Schmidt que, a su vez, es mapeado utilizando el concepto de isoparametría en coordenadas naturales. Los resultados numéricos alcanzados mediante cualquiera de las teorías empleadas, muestran la adecuada predicción de las distribuciones de desplazamientos y tensiones en laminados delgados. Sin embargo, cuando se trata de laminados gruesos, se demuestra a través de los ejemplos presentados, que se hace necesario el uso de teorías de orden superior que conduzcan a una adecuada predicción de las tensiones interlaminares. En particular, el estudio de placas gruesas se aborda mediante la utilización de una teoría de orden superior que incluye la deformación por corte en sus expresiones cinemáticas. En este sentido, se presenta una serie de análisis y aplicaciones de los macro elementos formulados, que evidencia la importancia de contar con un modelo adecuado para determinar las tensiones con mayor precisión y menor costo computacional. De esta manera, se puede contar con herramientas numéricas que permitan el correcto diseño de este tipo de estructuras de material compuesto laminado, realizando cálculos repetitivos y optimización con menor tiempo de cálculo y pre/post proceso.

## 1 INTRODUCCIÓN

En trabajos anteriores, los autores han presentado la formulación de macro elementos finitos jerárquicos empleando las hipótesis cinemáticas correspondientes a la teoría clásica de placas laminadas o *Classical Laminated Plates Theory* (CLPT) (Rango et al., 2009, 2010, 2011, 2012a) y las hipótesis de la teoría de primer orden de deformación por corte o *First Order Shear Deformation Theory* (FSDT) (Rango et al., 2013a,b). Estas teorías se usan comúnmente en el análisis de placas laminadas o sándwich para diversas aplicaciones ingenieriles.

Como es sabido, cuando se trata de placas isótropas homogéneas, la aplicación de la teoría de Kirchhoff está limitada a placas que presentan relaciones entre la máxima deflexión ( $w$ ) y el espesor de la placa ( $h$ ) inferiores a 0.2, y una relación espesor de la placa/mínima dimensión en el plano de la placa menor a 0.1 (Altenbach et al. 2004, Kollar and Springer, 2003). A diferencia de los elementos estructurales isótropos homogéneos, las placas compuestas laminadas o las placas sándwich se caracterizan por tener disímiles módulos de elasticidad con una elevada razón entre ellos. Los materiales compuestos típicos están constituidos por una matriz que tiene un módulo de Young bajo en comparación con el módulo de la fibra y aún en comparación con los módulos del laminado completo. Sumado a lo anterior, se debe tener en cuenta que el material de la matriz es el agente de unión entre láminas, razón por la cual el efecto de cizallamiento sobre el laminado completo está dado por la contribución de cada zona interlaminar del material de la matriz (Jones, 1999).

Es importante destacar que los módulos de corte  $G_{13}$  y  $G_{23}$  en materiales compuestos, son mucho menores en relación al módulo  $E_1$ , que lo que sucede en el caso de materiales isótropos. Así, el efecto de las tensiones tangenciales transversales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  es más importante para placas de material compuesto que para placas isótropas. Aún cuando el valor de estas tensiones ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) sea de un orden menor de magnitud que el de las tensiones en el plano ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ ), las tensiones límites admisibles para las tensiones tangenciales transversales son también de un orden de magnitud menor que las admisibles para las tensiones en el plano.

Se puede decir entonces que tales elementos estructurales de material compuesto tienen una baja rigidez cortante transversal y, frecuentemente, presentan deformaciones tangenciales significativas a bajas relaciones espesor/lado de la placa ( $h/a < 0.05$ ) (Altenbach et al. 2004). Por otra parte, las deflexiones reales pueden ser considerablemente mayores que las obtenidas con la CLPT. Más aún, la CLPT conduce a una incorrecta determinación de las tensiones a lo largo del espesor de la placa y, por ende, a una incorrecta determinación de las tensiones interlaminares.

El primer paso para superar los inconvenientes de la CLPT, es recurrir al empleo de la teoría de primer orden FSDT que proporciona una mejor predicción cuando se calculan las llamadas respuestas globales de la estructura (deflexiones y frecuencia natural de vibración). Sin embargo, la precisión se deteriora cuando se requieren respuestas que involucren a derivadas de los desplazamientos o frecuencias de vibración correspondientes a modos superiores. Esto ocurre aún en placas moderadamente gruesas; a esta limitación se suma la necesidad de emplear factores de corrección por corte, los cuales dependen de las propiedades de cada lámina, del esquema de laminación y de la tipología estructural (Chatterjee and Kulkarni, 1979; Whitney, 1973; Bert, 1973; Hull, 2006; Stephen, 1997).

Como resultado de las consideraciones expresadas, es conveniente extender el concepto de macro elemento formulado por los autores, de manera de incorporar dentro de su formulación

la cinemática correspondiente a teorías de orden superior.

Interesantes teorías de orden superior de deformación por corte o *Higher Order Shear Deformation Theories* (HOSDT) fueron propuestas por autores como Reddy y Liu (1985), Touratier (1991), Soldatos (1992), Kant y Swaminathan (2002), Karama et al. (2009) y más recientemente Mantari et al. (2011) y Mantari y Guedes Soares (2012). Estas teorías satisfacen las condiciones de contorno correspondientes a las superficies libres de la placa y representan, aproximadamente, la distribución parabólica de tensiones tangenciales transversales en el espesor. La mayoría de las teorías HOSDT existentes contienen expresiones polinómicas para las deformaciones por cortante. Por ejemplo, en las formulaciones generalizadas presentadas por Carrera (2003), Carrera et al. (2011) y Demasi (2009a-e) las incógnitas están representadas a lo largo del espesor mediante funciones polinómicas. Sin embargo, en relación a las teorías de capa única equivalente, de acuerdo a la revisión realizada por los autores y a lo mencionado por Mantari et al (2012d), es muy importante explorar el comportamiento de otras funciones en la implementación de nuevas teorías de deformación por corte. Puede decirse que hay evidencias de la demanda generada por las teorías trigonométricas de orden superior (Mantari et al., 2012b), debido fundamentalmente a que son más ricas que las funciones polinómicas, son a la vez más simples y precisas, y las condiciones de contorno en las superficies libres de la placa están garantizadas a priori. En este trabajo se emplea una teoría trigonométrica de deformación por corte (*Trigonometric Shear Deformation Theory*, TSdT) que fue recientemente generalizada para su aplicación a laminados (Ferreira et al., 2005). La formulación realizada por los autores, basada en esta teoría, ha permitido obtener muy buenos resultados en el análisis dinámico de placas gruesas laminadas (Rango et al., 2012b). En este artículo se extiende su aplicación al estudio de tensiones en placas laminadas sometidas a cargas estáticas.

## 2 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Se considera un elemento de placa gruesa laminada de forma cuadrilátera arbitraria. Se adopta para el análisis un laminado de espesor uniforme  $h$ , formado por un cierto número de capas  $N_l$ . Cada una de las láminas es de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales. El ángulo de las fibras de la  $k$ -ésima capa, contada desde la superficie  $z = -h/2$ , es  $\beta$  y se mide desde el eje  $x$  de la placa hasta la dirección de la fibra. Se considera un esquema de laminación simétrico con respecto al plano medio de la placa (Figura 1).

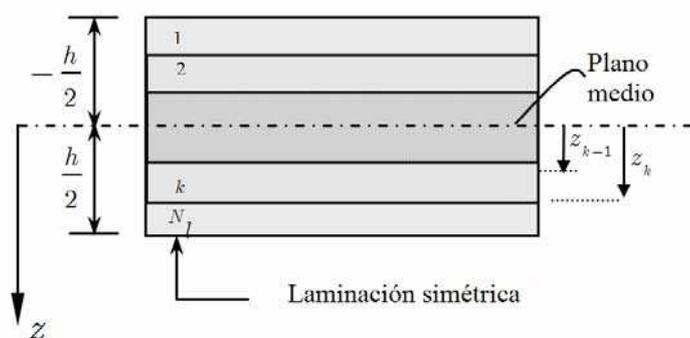


Figura 1. Esquema de laminación de la placa

Basado en la teoría trigonométrica de deformación por corte (TSdT) y teniendo en cuenta las hipótesis correspondientes, el campo de desplazamientos de la placa puede escribirse

como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $u, v$  son las componentes de desplazamiento en el plano  $(xy)$ ,  $w$  es el desplazamiento en la dirección  $z$ , el cual coincide con los desplazamientos transversales de los puntos ubicados en el plano medio de la placa ( $w_0$ ), y  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son las rotaciones de las secciones normales alrededor de los ejes  $y$  y  $x$  respectivamente.

Reemplazando las expresiones de la Ec. (1) en las correspondientes al tensor de pequeñas deformaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

### 3 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO

Las ecuaciones que gobiernan el problema se derivan a partir del Principio de los Trabajos Virtuales. Las expresiones de la energía virtual de deformación  $\delta U$  y del trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas  $\delta V$  se desarrollan a continuación.

La energía virtual de deformación  $\delta U$  está dada por:

$$\delta U = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dz \right\} dx dy \quad (3)$$

Reemplazando las expresiones correspondientes de la Ec. (2), la Ec. (3) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\ &+ \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \\ &\left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \left\} dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

O bien, en función de las fuerzas y momentos resultantes, la Ec. (4) resulta:

$$\delta U = \int_R \left\{ M_{xx} \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + M_{yy} \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + M_{xy} \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ \left. + P_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + P_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} + P_{xy} \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + R_x \delta \phi_x + R_y \delta \phi_y \right\} dx dy \quad (5)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} z \\ \text{sen} \frac{\pi z}{h} \end{Bmatrix} dz \quad \text{y} \quad R_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z} \left( \frac{\pi z}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) dz \quad (6)$$

donde  $\alpha, \beta$  toman los símbolos  $x, y$  indistintamente.

El trabajo virtual  $\delta V$  realizado por las fuerzas externas aplicadas, está dado por:

$$\delta V = - \int_R q \delta w_0 dx dy - \int_\Gamma \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \hat{\sigma}_{nm} \left( -z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_n \right) + \right. \\ \left. + \hat{\tau}_{ns} \left( -z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_s \right) + \hat{\tau}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds \quad (7)$$

donde  $\Gamma$  es la parte del contorno de la placa donde se especifican las fuerzas,  $(\hat{\sigma}_{nm}, \hat{\tau}_{ns}, \hat{\tau}_{nz})$  son las componentes de tensión especificadas en  $\Gamma$ .

Análogamente, la Ec. (7) se puede escribir en función de los momentos y de las fuerzas resultantes como:

$$\delta V = - \int_R q(x, y) \delta w_0 dx dy - \int_\Gamma \left( -\hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \hat{P}_{nn} \delta \phi_n - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \right. \\ \left. + \hat{P}_{ns} \delta \phi_s + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) d\Gamma \quad (8)$$

donde  $n, s$  representan las direcciones tangenciales y normales al contorno del laminado y la fuerza cortante resultante transversal está dada por

$$\hat{Q}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\tau}_{nz} dz \quad (9)$$

Reemplazando las Ecs. (5) y (8) en la expresión del principio de los trabajos virtuales y suponiendo las variables independientes del tiempo para el análisis de cargas cuasi-estáticas, resulta:

$$0 = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \text{sen} \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\ \left. + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \text{sen} \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \text{sen} \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \Big\} dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy \quad (10)$$

Reemplazando en la expresión del P.T.V dada por la Ec. (10) las relaciones constitutivas de cada lámina de un laminado y escribiendo las deformaciones en términos de los desplazamientos, según las relaciones dadas por Ec. (3), se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \bar{Q}_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
& + \bar{Q}_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& + \left( \bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{22} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
& + \bar{Q}_{26} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \\
& + \left( \bar{Q}_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
& + \bar{Q}_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{66} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \left( \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \left( \bar{Q}_{45} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{55} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \\
& \left. + \left( \bar{Q}_{44} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{45} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \Big\} dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy \quad (11)
\end{aligned}$$

Integrando a lo largo del eje  $z$ , se llega a:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_R \left[ A1_{11}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + A1_{12}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + A1_{16}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) \right. \\
& + A1_{12}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + A1_{22}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + A1_{26}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) \\
& + A1_{16}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + A1_{26}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \\
& \left. + A1_{66}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
& + \int_R \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + 2D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& + D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + 2D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \\
& + 2D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 2D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \Big] dx dy \\
& - \int_R \left[ B_{11}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + B_{12}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + 2B_{16}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + B_{12}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + B_{22}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + 2B_{26}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ B_{16}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + B_{26}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \\
 &+ 2B_{66}^S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \Big] dx dy \\
 &- \int_R \left[ B_{11}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{16}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &+ B_{22}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + B_{26}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + 2B_{16}^S \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 2B_{26}^S \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \\
 &+ 2B_{66}^S \left. \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \\
 &+ \int_R \left[ A_{244}^S (\phi_y) (\delta \phi_y) + A_{245}^S (\phi_y) (\delta \phi_x) + A_{245}^S (\phi_x) (\delta \phi_y) + A_{255}^S (\phi_x) (\delta \phi_x) \right] dx dy \\
 &- \int_R q(x, y) \delta w dx dy
 \end{aligned}$$

donde las distintas rigideces están dadas por:

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \sin^2 dz \left( \frac{\pi z}{h} \right), \quad A_{2ij}^S = \left( \frac{\pi}{h} \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \cos^2 \left( \frac{\pi z}{h} \right) dz \\
 B_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) dz, \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz
 \end{aligned} \tag{13}$$

La Ec. (12) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_R \left[ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} A_{11}^S & A_{12}^S & A_{16}^S \\ A_{12}^S & A_{22}^S & A_{26}^S \\ A_{16}^S & A_{26}^S & A_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
 &+ \int_R \left[ \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy \\
 &- \int_R \left[ \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
 &- \int_R \left[ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy
 \end{aligned}$$

$$+ \int_R \begin{bmatrix} \delta\phi_y & \delta\phi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A2_{44}^S & A2_{45}^S \\ A2_{45}^S & A2_{55}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{bmatrix}^T dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy \quad (14)$$

Las funciones incógnitas  $w_0 (= w)$ ,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  se aproximan con funciones de forma admisibles que pueden escribirse como el producto de las funciones de forma por los desplazamientos generalizados respectivos. En coordenadas naturales  $\xi, \eta$  se tiene:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \{N^w(\xi, \eta)\}^T \{c^w\} \\ \phi_x(\xi, \eta) &= \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_x}\} \\ \phi_y(\xi, \eta) &= \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_y}\} \end{aligned} \quad (15)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de la técnica de mapeo de espacios ya desarrollada y utilizada por los autores (Nallim et al., 2005; Nallim y Oller, 2008; Rango et al., 2012b) se pueden definir las siguientes expresiones relacionadas con las funciones de forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A1} &= \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta}, & \mathbf{A2} &= -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta} \\ \mathbf{A3} &= a'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + a'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - a'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 a'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\ \mathbf{A4} &= b'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + b'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - b'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 b'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\ \mathbf{A5} &= -c'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} - c'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} + c'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} - \sum_{i=1}^3 c'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Reemplazando en la Ec. (14) los desplazamientos por las funciones de aproximación, dadas por Ec. (15), y aplicando las Ecs. (16) resulta:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \left[ A1_{ij}^S \right]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[ D_{ij} \right]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[ -B_{ij}^S \right]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \left[ -B_{ij}^S \right]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \left[ A2_{ij}^S \right]_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{N}^\phi \\ 0 & \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 & - q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi y} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{N}^w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{17}$$

Si se cancelan los vectores de desplazamientos nodales virtuales, la Ec. (17) puede escribirse en forma compacta como:

$$[K^E] \{c^E\} = \{F^E\} \tag{18}$$

La Ec. (18) es la ecuación matricial del análisis de flexión por carga transversal, que define la relación entre las cargas actuantes y los desplazamientos originados. De aquí se obtiene  $[K^E]$  que es la matriz de rigidez del macro elemento mapeado según la TSMT y está dada por:

$$\begin{aligned}
 [K^E] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [B1][A1^S][B1]^T + [B3][D][B3]^T + [B3][ -B^S ][B1]^T \right. \\
 & \left. + [B1][ -B^S ][B3]^T + [B2][A2^S][B2]^T \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{19}$$

donde:

$$[B1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix}, [B2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix}, [B3] = \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

y el vector de fuerzas está dado por:

$$\{F^E\} = q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^w] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (21)$$

Si se aplican las condiciones de contorno correspondientes, la resolución del sistema de Ecs. (18) permite obtener los vectores  $\{c^{wE}\}$ ,  $\{c^{\phi_x E}\}$ ,  $\{c^{\phi_y E}\}$ , que reemplazados en la Ec. (15) y haciendo la transformación inversa de coordenadas, permite encontrar el valor de los desplazamientos y de los giros en cualquier punto  $(x, y)$  de la superficie de la placa, o reconstruir totalmente la deformada de una placa laminada, tomada como un macro elemento único.

#### 4 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

El campo de desplazamientos se aproxima, como se escribe en las Ecs. (15), con conjuntos de polinomios expresados en coordenadas naturales. Estos conjuntos tienen como primeros términos a los polinomios de Hermite y como términos de enriquecimiento a los polinomios ortogonales de Gram-Schmidt (Nallim et al., 2003, 2005, 2008). Para la aproximación del campo de desplazamientos de la TSDT, resulta útil recordar los primeros polinomios adoptados por los autores para las teorías CLPT (Rango et al., 2009, 2010, 2011, 2012a) y FSDT (Rango et al., 2013a,b). Por una parte, los polinomios de Hermite considerados en la formulación del macro elemento a partir de la CLPT son:

$$\begin{aligned} p_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & q_1(\eta) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3 \\ p_2(\xi) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_2(\eta) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 \\ p_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & q_3(\eta) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3 \\ p_4(\xi) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_4(\eta) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 \end{aligned} \quad (22)$$

Mientras que, en la formulación obtenida considerando la teoría FSDT, los polinomios de Hermite están dados por:

$$\begin{aligned} p_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_1(\eta) &= -\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2} \\ p_2(\xi) &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_2(\eta) &= \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

Por otra parte, los primeros polinomios de Gram-Schmidt para la generación de los polinomios ortogonales de enriquecimiento están dados respectivamente por:

$$p_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (\text{CLPT}) \quad (24)$$

y:

$$p_3(\xi) = -1 + \xi^2 \quad (\text{FSDT}) \quad (25)$$

El campo de desplazamientos de la TSDT se aproxima usando los polinomios empleados con la CLPT para las deflexiones  $w$ , y con la FSDT en la aproximación de los giros  $\phi_x, \phi_y$ . Esta selección se debe a las variables primarias del problema:  $w, \partial w / \partial n, \phi_n, \phi_s$ , que requieren, por parte de las funciones de forma de soporte local valores no nulos para la función  $w$  y para su primera derivada en los extremos del elemento;

mientras que para garantizar el aporte de desplazamientos sólo en los puntos internos de la superficie del elemento, los polinomios de enriquecimiento y sus derivadas primeras deben ser nulos cuando son evaluados en los extremos.

Para la aproximación de los giros  $\phi_x, \phi_y$  se usan en cambio, los polinomios lineales clásicos de Hermite, y el polinomio más simple y de menor grado para la generación del conjunto de funciones de enriquecimiento de Gram-Schmidt, es decir, aquel que verifique nulidad en los bordes del elemento.

## 5 EJEMPLOS DE VALIDACIÓN

La formulación presentada ha sido implementada en un programa de computadora que permite trabajar con placas isótropas y anisótropas (constituidas por una lámina única o laminados), con distintas combinaciones de condiciones de borde, así como también realizar el ensamblaje de dos o más macro elementos a fin de abarcar el análisis de placas con geometrías complejas.

En las secciones siguientes se presentan ejemplos de validación del modelo propuesto. Se muestran también resultados obtenidos con la formulación propuesta considerando las teorías clásica, de primer orden y trigonométrica.

### 5.1 Análisis estáticos de placa laminada

Este ejemplo corresponde al análisis estático de una placa cuadrada SFSF, de material compuesto laminado (0/90/0/90/0), con una carga  $q$  uniformemente distribuida. Las propiedades del material ( $M1$ ) de las capas son:

$$M1 : E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos usando el macro elemento propuesto, con FSDT y TSDT con cuatro polinomios de Gram-Schmidt ( $m = 4$ ) en ambos casos, y se comparan con los de Moleiro et al. (2008).

$a/h$	Método	$\bar{w}$	$\bar{M}_{yy}$	$\bar{Q}_y$
10	Macroelemento FSDT	3.0492	1.2433	4.9015
	Macroelemento TSDT	3.0581	1.2444	4.9782
	Moleiro et al. (2008)	3.0600	1.2458	4.9785
20	Macroelemento FSDT	2.6969	1.2400	4.8682
	Macroelemento TSDT	2.7015	1.2450	4.9699
	Moleiro et al. (2008)	2.7082	1.2449	4.9748
100	Macroelemento FSDT	2.5841	1.2402	4.9632
	Macroelemento TSDT	2.5901	1.2419	4.9780
	Moleiro et al. (2008)	2.5955	1.2446	4.9783

Tabla 1. Placa laminada cross-ply (0/90/0/90/0) SFSF sujeta a carga uniforme.

Los adimensionales presentados se obtienen de:

$$\bar{w} = 100 \left( \frac{E_2 h^3}{q a^4} \right) w_0, \quad \bar{M}_{yy} = \left( \frac{10}{q a^2} \right) M_{yy}, \quad \bar{Q}_y = \left( \frac{10}{q_0 a} \right) Q_y$$

## 5.2 Estudio de la variación de tensiones en el espesor

En esta sección se lleva a cabo una comparación de la variación de las tensiones en el espesor de una placa obtenida con la formulación propuesta con la TSDT, con los valores obtenidos por Ramesh et al. (2009), quienes emplearon un elemento finito triangular de orden superior basado en una teoría de tercer orden de deformación por corte.

El propósito de este ejemplo es verificar la correcta predicción de las tensiones interlaminares obtenidas usando el macro elemento formulado, en placas laminadas que presentan singularidades como apoyos puntuales.

Se considera una placa cuadrada laminada (0/90/0), con relación  $a/h = 10$  y apoyos puntuales en sus cuatro esquinas, sobre la cual actúa una carga uniforme distribuida de magnitud  $q$ . Las propiedades del material del laminado corresponden al denominado M1.

Las Figuras 2, 3, 4 y 5 muestran, respectivamente, los siguientes valores adimensionales en las coordenadas  $(x, y, z)$  indicadas, asumiendo como origen de coordenadas el punto central de la placa:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{q a^2} \sigma_{xx}(0, a/2, z), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{q a^2} \sigma_{yy}(0, 0, z)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q a} \tau_{xz}(a/4, a/4, z), \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{q a} \tau_{yz}(0, a/4, z)$$

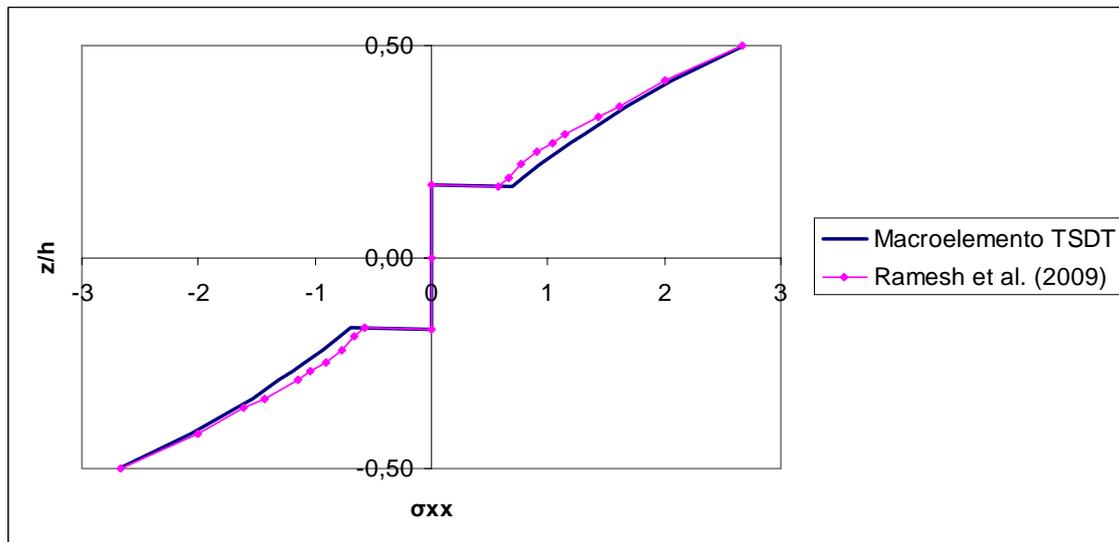


Figura 2. Variación de la tensión  $\bar{\sigma}_{xx}$  en el espesor de un laminado

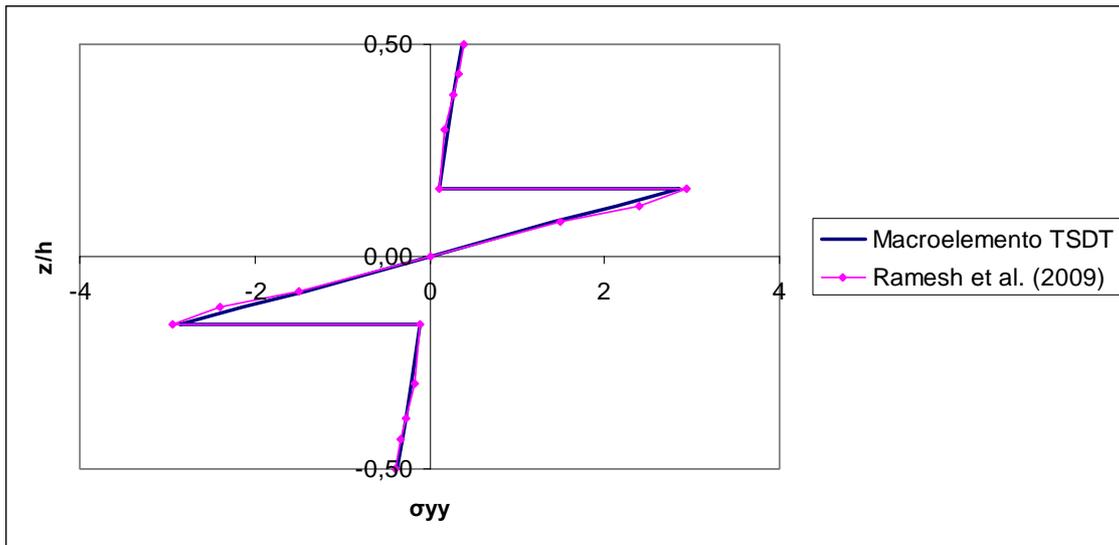


Figura 3. Variación de la tensión  $\bar{\sigma}_{yy}$  en el espesor de un laminado

En las Figuras 4 y 5 se observa la variación de tensiones calculada a partir de las ecuaciones constitutivas (C) y la que surge de plantear el equilibrio (E):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Se puede concluir que el macro elemento formulado permite arribar a excelentes resultados en la determinación de las tensiones de un laminado, ya que reproduce de manera fiel la distribución de las mismas en el espesor de la placa.

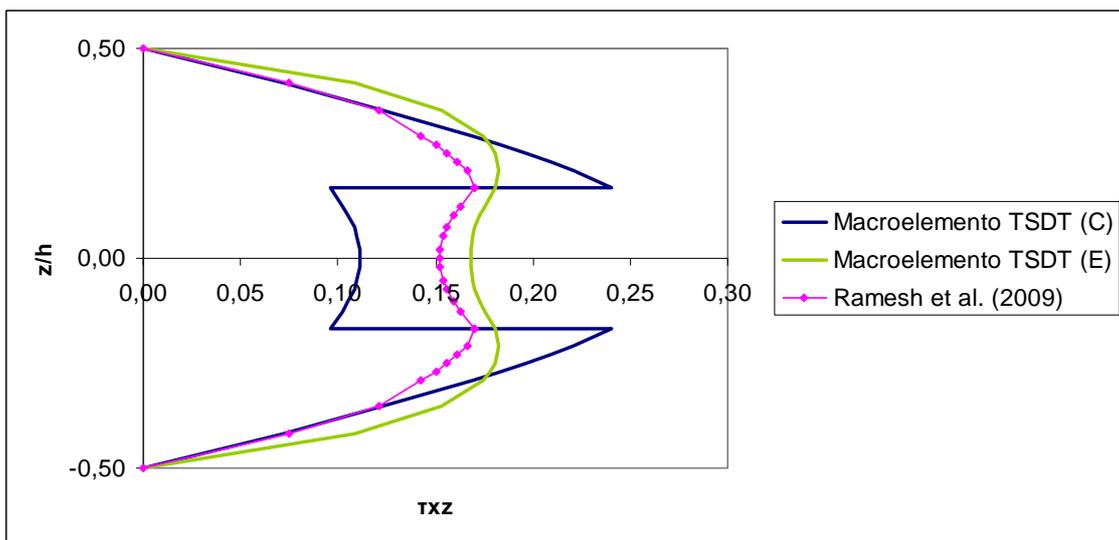


Figura 4. Variación de la tensión  $\bar{\tau}_{xz}$  en el espesor de un laminado

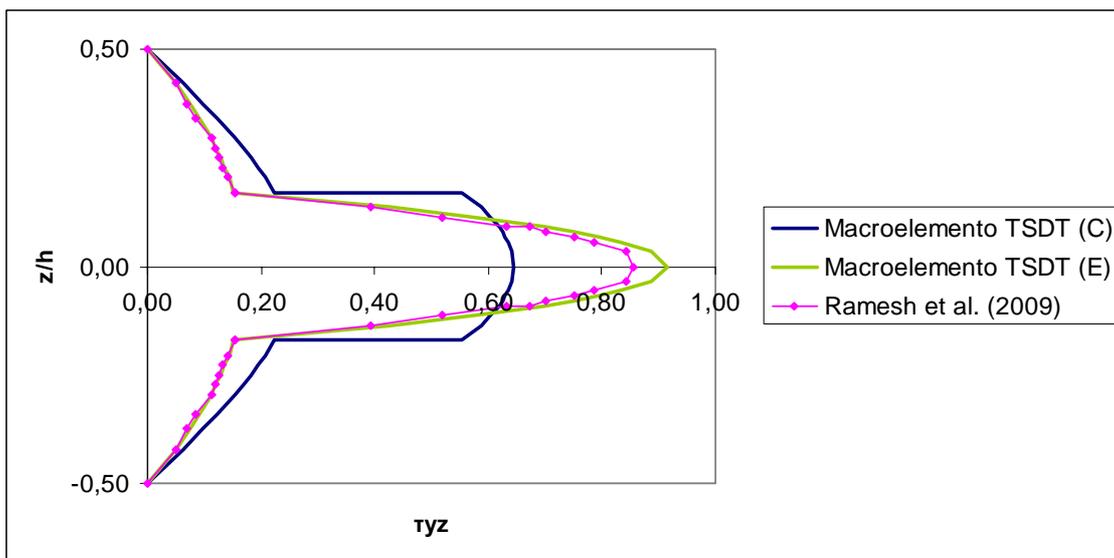


Figura 5. Variación de la tensión  $\bar{\tau}_{yz}$  en el espesor de un laminado

### 6 EJEMPLO DE COMPARACIÓN DE CLPT, FSDT Y TSDT

En esta sección se muestra un estudio comparativo de resultados de desplazamiento  $\bar{u}$  y tensiones  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  (adimensionalizados) aplicando los macro elementos formulados empleando CLPT, FSDT y TSDT a un ejemplo particular. Se estudia además la influencia de la relación lado/espesor en los desplazamientos y en la distribución de tensiones en el espesor de una placa.

Se considera una placa laminada CCC con esquema de laminación (0/90/0), de forma rectangular con lado  $a$  paralelo al eje  $x$  y  $b$  paralelo al eje  $y$ , y relación de aspecto  $a = 2b$ . Se considera un material  $M2$  de propiedades:

$$M2 : E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25 .$$

La relación  $b/h$  toma los valores 100, 50, 20, 10, a efectos de considerar en el análisis placas delgadas, moderadamente gruesas y gruesas. Los adimensionales están dados por:

$$\bar{u} = \frac{E_2}{qh} u \left( \frac{3}{4} a, \frac{3}{4} b, z \right), \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{qb^2} \sigma_{xx} \left( \frac{1}{2} a, \frac{1}{2} b, z \right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{qb} \tau_{xz} \left( \frac{3}{4} a, \frac{3}{4} b, z \right)$$

En la Figura 6 se observa la distribución de los desplazamientos  $\bar{u}$  en el espesor de la placa, con las diferentes relaciones  $b/h$ .

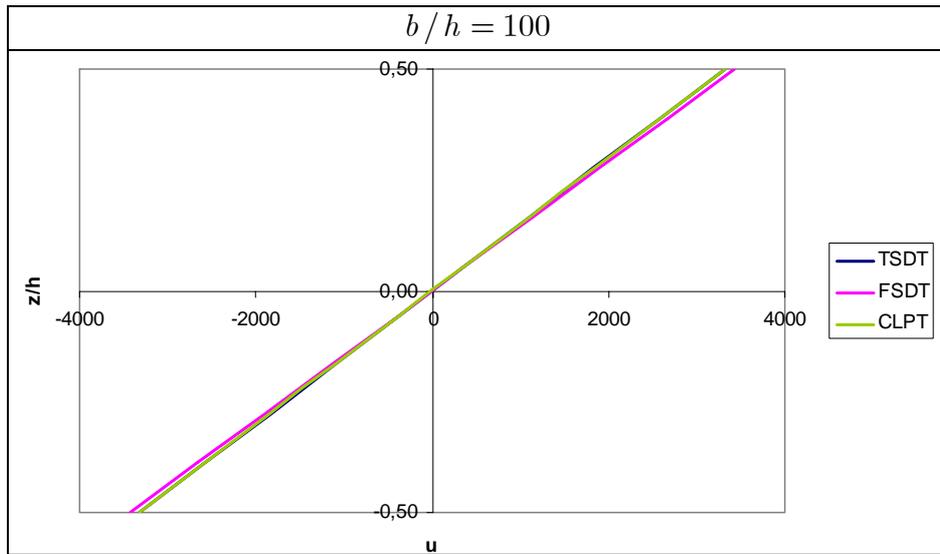


Figura 6a

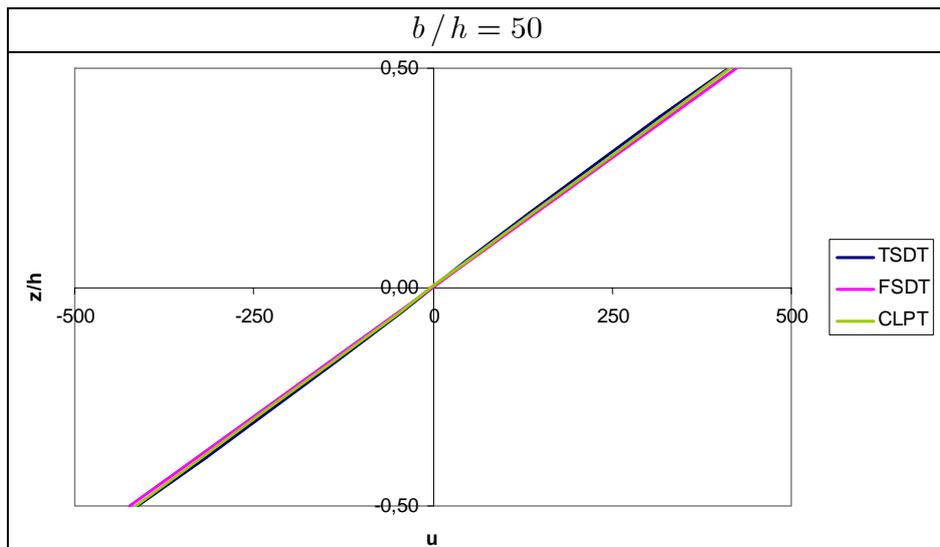


Figura 6b

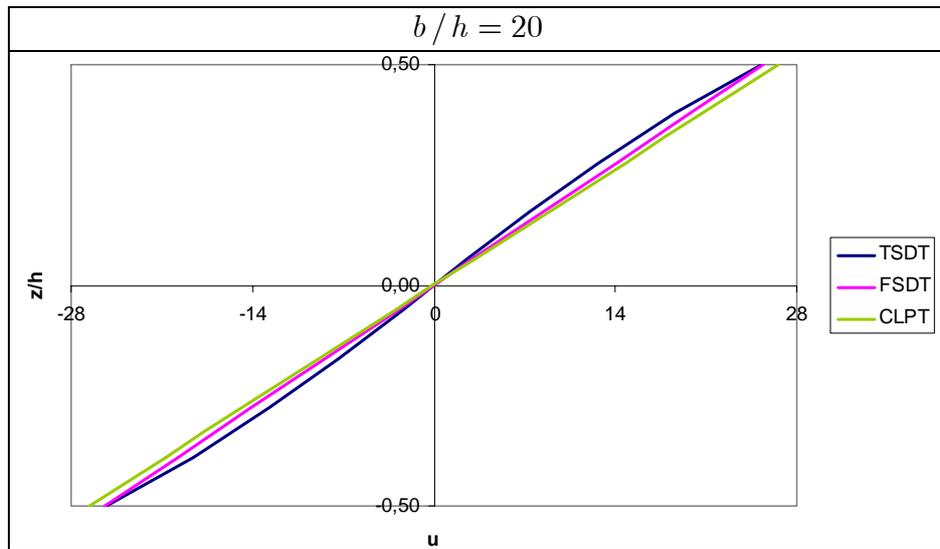


Figura 6c

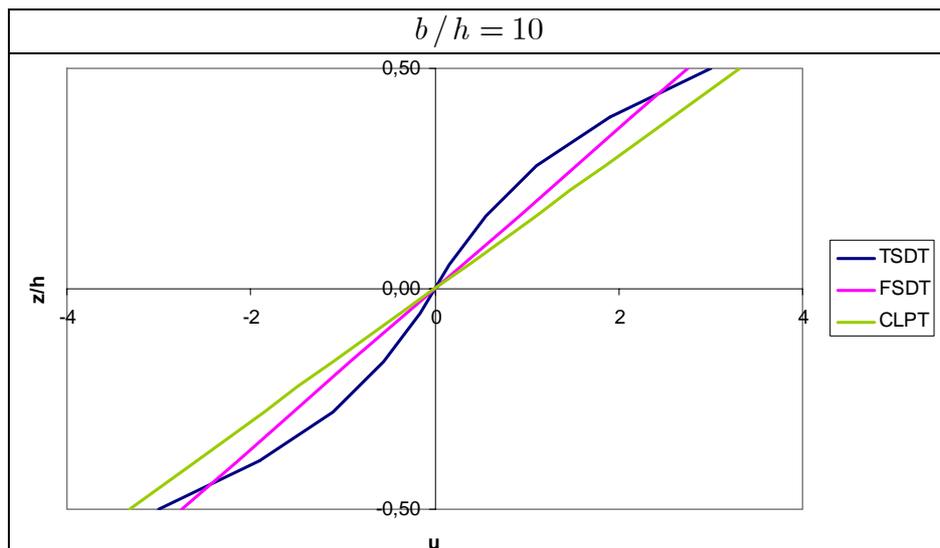


Figura 6d

Figura 6. Variación de  $\bar{u}$  en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT

Las Figuras 7 y 8 muestran, respectivamente, la distribución de las tensiones  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  en el espesor de la placa, con las diferentes relaciones  $b/h$ .

Resulta claro a partir de la observación de estas figuras, que para laminados delgados las tres teorías predicen una distribución adecuada de desplazamientos y tensiones. Sin embargo, cuando se trata de laminados gruesos, se hace necesario y conveniente el uso de una teoría de orden superior para la correcta determinación de parámetros de diseño.

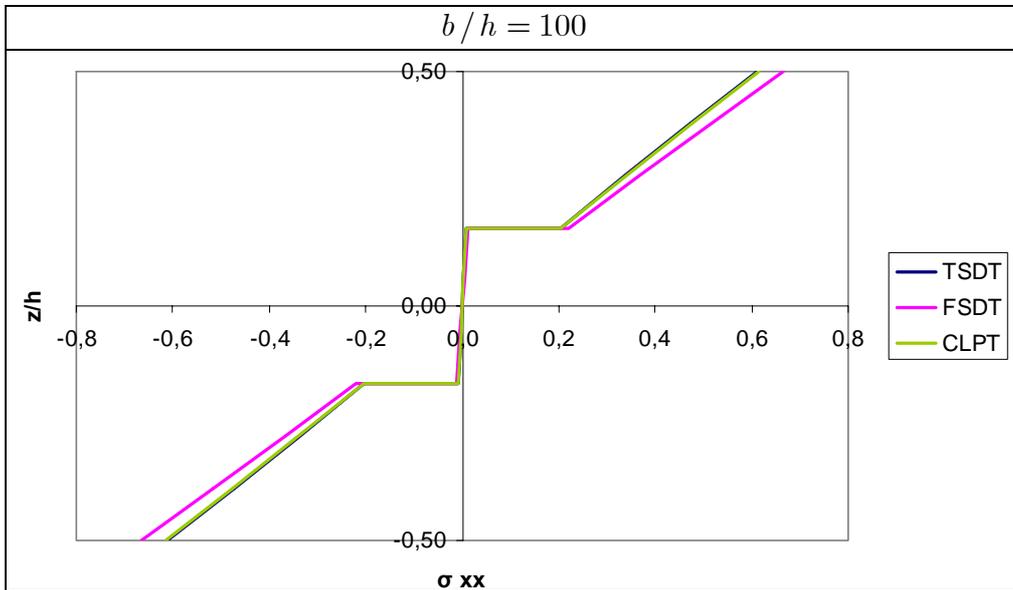


Figura 7a

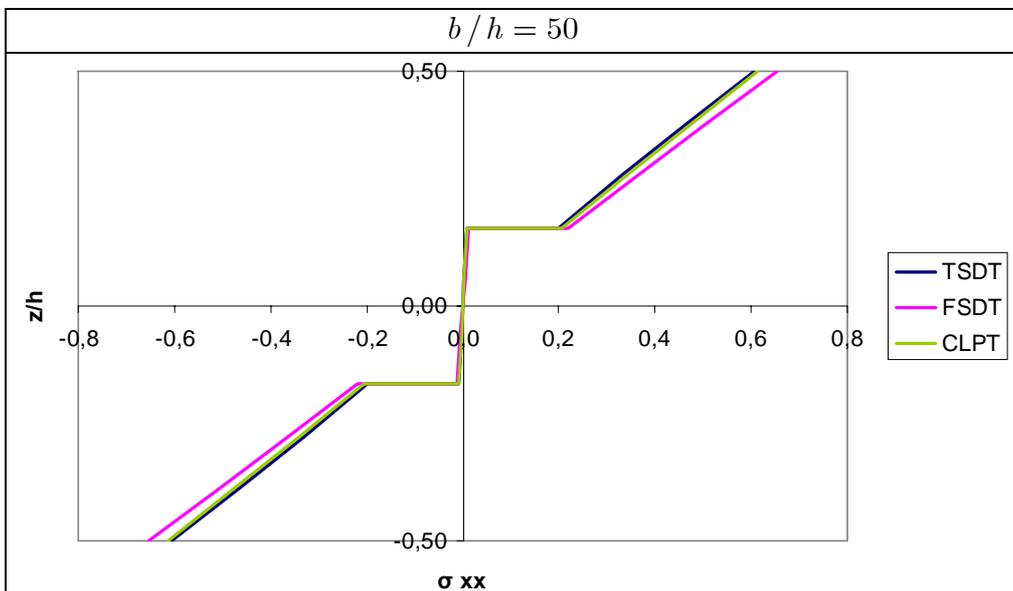


Figura 7b

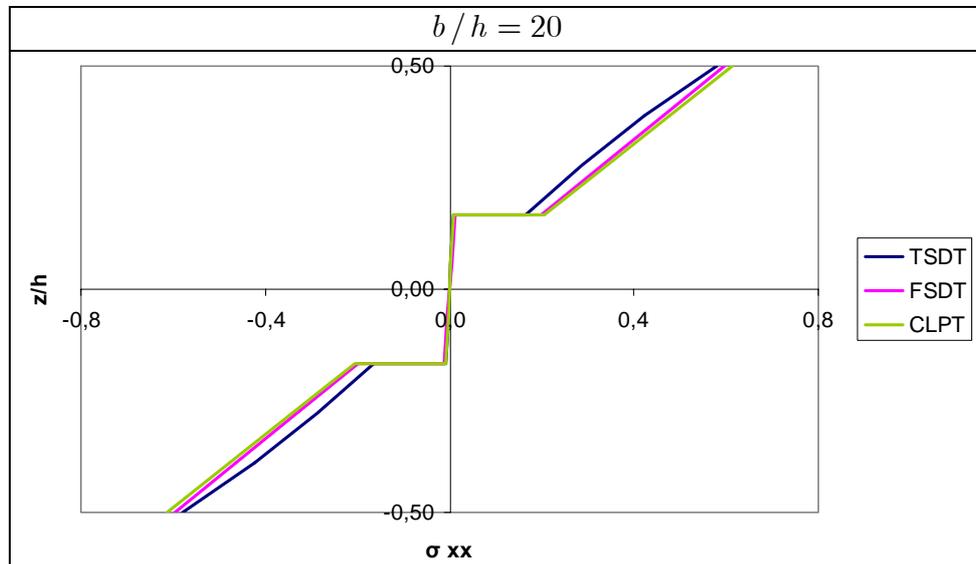


Figura 7c

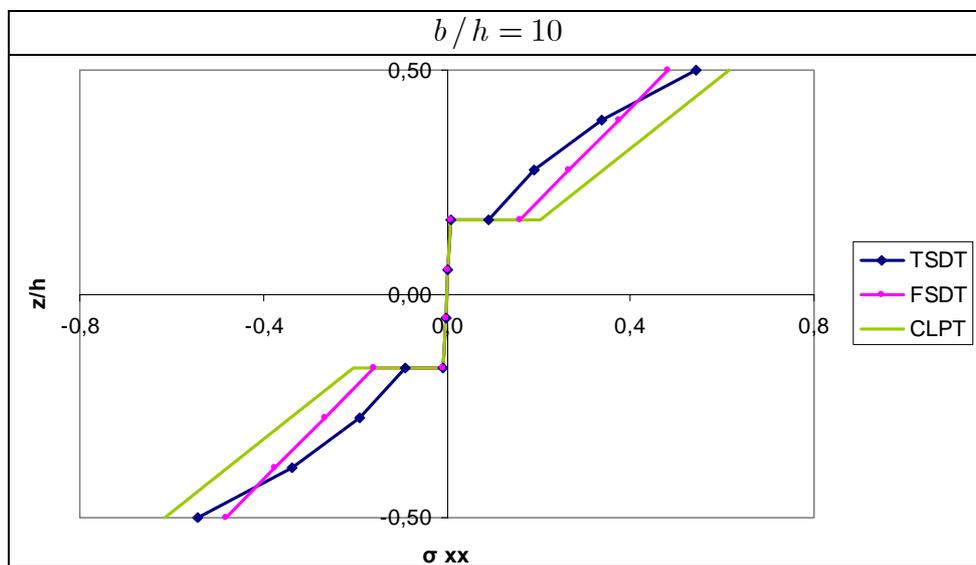


Figura 7d

Figura 7. Variación de  $\bar{\sigma}_{xx}$  en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT

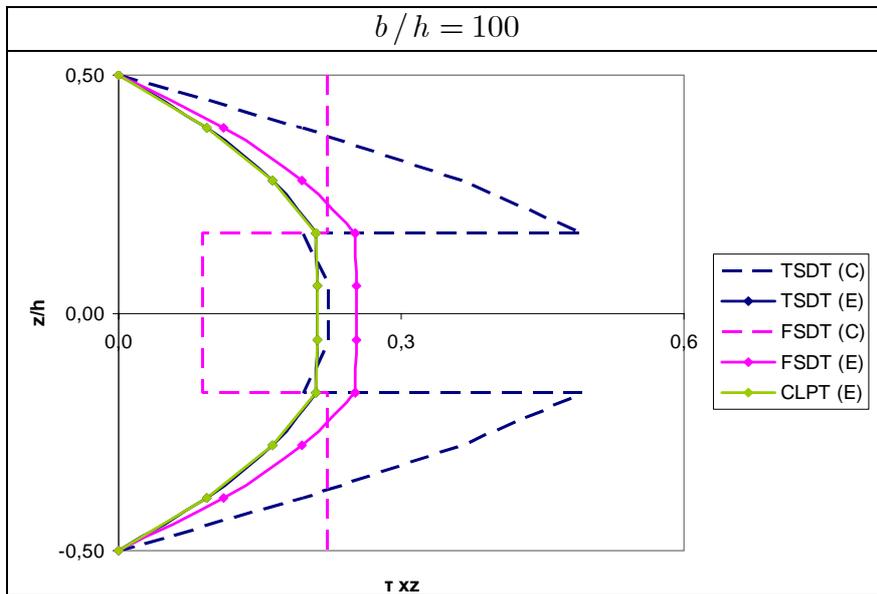


Figura 8a

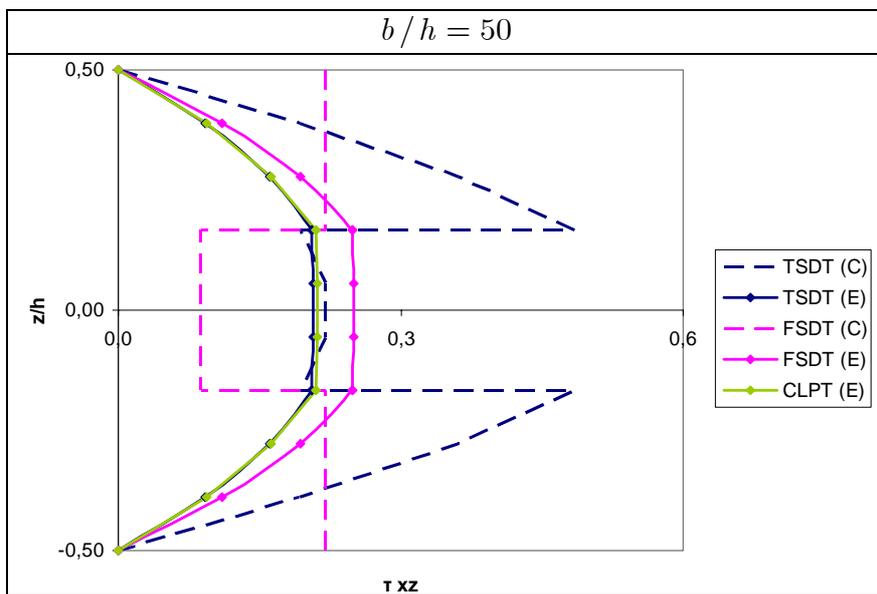


Figura 8b

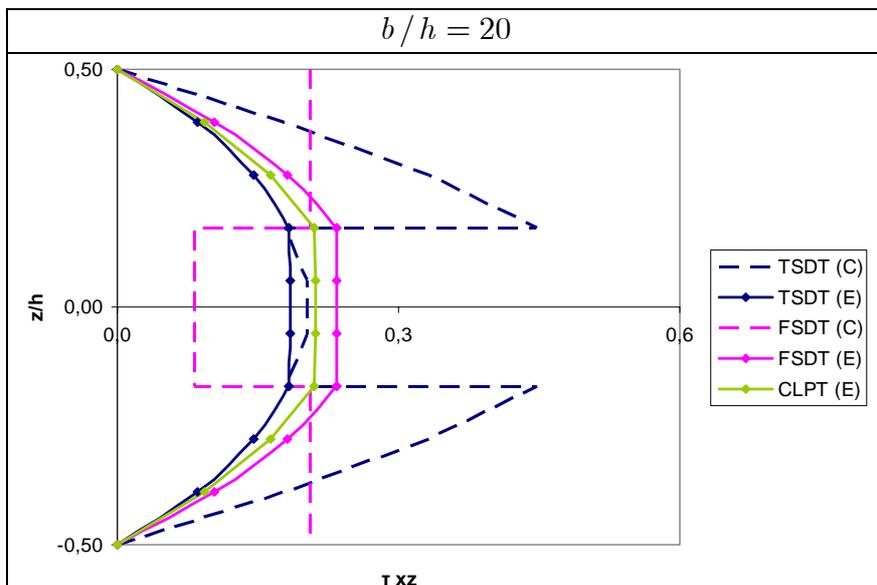


Figura 8c

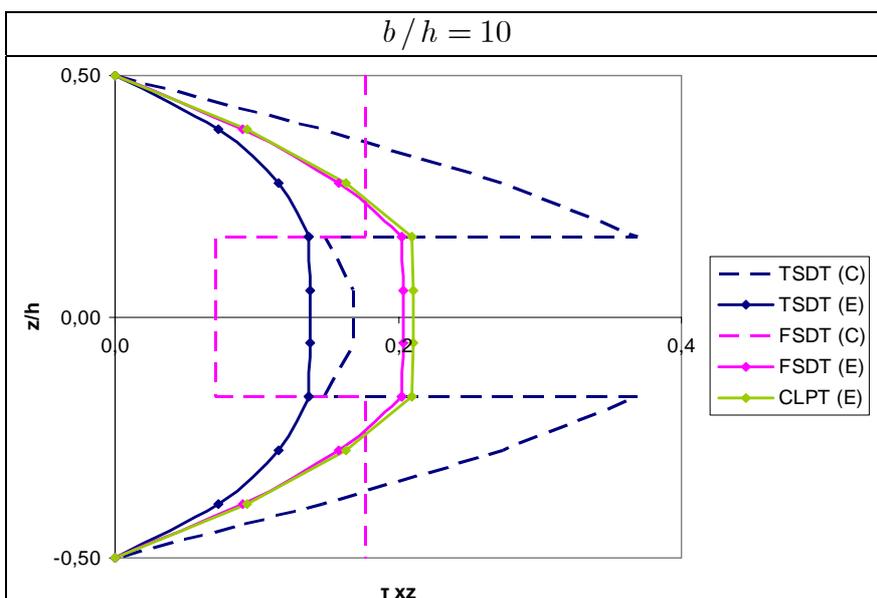


Figura 8d

Figura 8. Variación de  $\bar{\tau}_{xz}$  en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla un macro elemento finito jerárquico a partir de la teoría trigonométrica de deformación por corte. Esta teoría, que fue recientemente generalizada para su aplicación a laminados, es más rica que teorías con funciones polinómicas, siendo además más simple y precisa. Su aplicación garantiza a priori la satisfacción de las condiciones de

contorno correspondientes a las superficies libres de la placa. El macro elemento formulado se basa en el concepto del método de los elementos finitos en su versión h-p, ya que combina un mínimo proceso de discretización con el enriquecimiento de las funciones de soporte local empleando polinomios ortogonales generados con la fórmula de recurrencia de Gram-Schmidt. Las ventajas del modelo desarrollado se manifiestan además en la precisa determinación de las tensiones, especialmente las tangenciales transversales, lo cual es fundamental en procesos de diseño de materiales compuestos laminados que tienen debilidad en la dirección transversal. Por otra parte, el modelo permite considerar relaciones de espesor bajas (placas delgadas), evitando el fenómeno de bloqueo por cortante y constituyendo funciones de aproximación conformes.

A través de ejemplos numéricos se comparan los modelos desarrollados empleando las teorías CLPT, FSDT y TSDT para placas laminadas, y se demuestra que la metodología propuesta con la teoría de orden superior, TSDT, mejora los resultados obtenidos con la FSDT, haciéndolos más precisos, y mostrando una distribución más realista de las tensiones en el espesor de la placa. Esto es posible además, con un bajo número de polinomios de Gram-Schmidt.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET, a través del PIP 0105/2010, Proyecto CIUNSa N°1903 y Proyecto Redes V, financiado por la Secretaría de Políticas Universitarias.

## REFERENCIAS

- Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer – Verlag, Germany, 2004.
- Bert C.W. Simplified analysis of static shear factors for beams of nonhomogeneous cross section. *Journal of Composite Materials*, 7:525-529, 1973.
- Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarks. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 10: 215-96, 2003.
- Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites: Part B*, 42: 123–133, 2011.
- Chatterjee S.N and Kulkarni S.V. Shear correction factors for laminates plates. *AIAA Journal*, 17(5): 498-499, 1979.
- Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part I: Governing equations. *Composite Structure*, 87: 1–11, 2009a.
- Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part II: Layerwise theories. *Composite Structure*, 87: 12–22, 2009b.
- Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Composite Structure*, 87: 183–94, 2009c.
- Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part IV: Zig – zag theories. *Composite Structure*, 87: 195–205, 2009d.
- Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part V: Results. *Composite Structure*, 88: 1–16, 2009e.
- Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & Structures*, 83: 2225-2237, 2005.
- Hull A.J. Mindlin shear coefficient determination using model comparison. *Journal of Sound*

- and Vibration*, 294: 125-130, 2006.
- Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, U.S.A. , 1999.
- Kant T., Swaminathan K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*, 56: 329-44, 2002.
- Karama M., Afaq K.S., Mistou S. A new theory for laminated composite plates. In: Proc IMechE, Vol 223. Part L: J. Mater: Des Appl., 2009.
- Kollár L.P. and Springer G.S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press., 2003.
- Mantari J.L., Guedes Soares C. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94: 1991-2000, 2012.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94: 37-49, 2011.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49: 43-53, 2012b.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory. *Composites: Part B*, 43(8): 3348-3360, 2012d.
- Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A., Reddy J.N. Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates. *Computers & Structures*, 86: 826-838, 2008.
- Nallim, L.G., Grossi, R.O., On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1201-1207, 2003.
- Nallim, L.G., Oller, S., Grossi, R.O., Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1797-1822, 2005.
- Nallim, L. G., Oller, S., An analytical - numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plate. *Composite Structures Journal*, 85: 311-325, 2008.
- Ramesh S.S., Wang C.M., Reddy J.N., Ang K.K. A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates. *Composite Structures*, 91: 337-357, 2009.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Desarrollo de un elemento finito jerárquico para placas utilizando polinomios de Gram-Schmidt. *Mecánica Computacional*, 28: 747-766, 2009.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Assembly of hierarchical finite elements to the static and dynamic analysis of quadrilateral plates. *Proceedings of the XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*. Argentina, 2010.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Static analysis of thick laminated plates using enriched macro elements. *Proceedings of the 16th International Conference on Composite Structures - ICCS*. Portugal, 2011.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Formulación y ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras laminadas. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estructural*, 9: 4-21, 2012a.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Análisis de placas laminadas mediante macro elementos usando teoría trigonométrica de deformación por corte. *Mecánica Computacional*, 31:

- 1379-1398, 2012b.
- Rango, R.F., Bellomo, F.J., Nallim, L.G. A general Ritz algorithm for the static analysis of arbitrarily laminated composite plates using First Order Shear Deformation Theory. *The Journal of Engineering Research (TJER)*, 10(2): 1-12, 2013a.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements. *Composite Structures*, 101:94-103, 2013b.
- Reddy J.N., Liu C.F. A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. Journal. Engineering Science*, 23: 319-30, 1985.
- Soldatos K.P. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94: 195-220, 1992.
- Stephen N.G. Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4): 539-553, 1997.
- Touratier M. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8): 901-16, 1991.
- Whitney J.M. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40(1): 302-304, 1973.