

DISEÑO DE CONCENTRADORES DE TENSIONES EN ELEMENTOS MECÁNICOS, MEDIANTE LAS TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS SUPERFICIALES

Sandra I. Robles y Néstor F. Ortega

*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253,8000 –
Bahía Blanca, Argentina, srobles@criba.edu.ar*

Palabras clave: Concentradores de tensiones, elementos mecánicos, tensiones superficiales.

Resumen. El diseño y análisis de árboles de transmisión de potencia, debe cumplir con exigencias especiales en función de la disposición y vinculación de los elementos mecánicos que van montados sobre ellos. Por este motivo, son inevitables las discontinuidades geométricas, variaciones de la sección transversal del mismo, apareciendo resaltos, radios de acuerdo, muescas, orificios, y otras entallas. Cualquiera de estas discontinuidades afecta la distribución de tensiones locales, incrementándolas significativamente en donde se localizan estas entallas. Desde el punto de vista de la resistencia mecánica, el objetivo que se persigue en el diseño y análisis, es encontrar formas racionales que permitan minimizar las causas que afectan a la distribución de tensiones, de forma tal que resulte adecuado el coeficiente geométrico de concentración de tensiones de estos elementos de máquinas. En este trabajo se presentan los resultados de estudios realizados, mediante el Método de los Elementos Finitos, de la variación de los parámetros geométricos más relevantes, tales como relaciones de diámetro de las secciones, radios de curvatura y radio de la entalla que se incorpora a la geometría, con la finalidad de disminuir el valor de la tensión máxima consecuencia del concentrador de tensiones.

1 INTRODUCCIÓN

Es indiscutible la importancia que poseen los efectos de los concentradores de tensiones en el diseño y análisis de elementos mecánicos, que se encuentren sometidos a solicitaciones externas, especialmente, si las mismas originan tensiones que sean variables, en su intensidad y signo. La existencia de entallas hace que se acentúe el efecto de la fatiga en los materiales. Se consideran concentradores de tensiones a todas aquellas discontinuidades geométricas, rugosidades e imperfecciones superficiales, ajustes con apriete entre partes, o de tratamientos tecnológicos, tal que hacen que se incremente localmente la intensidad de las tensiones nominales.

Normalmente, primero se dimensionan los árboles o ejes, en función de las necesidades funcionales y solicitaciones mecánicas, adoptándose ciertas dimensiones estandarizadas, para luego, en una segunda etapa, analizar las concentraciones de tensiones en lugares específicos.

En el caso de los árboles y ejes, la zona donde se genera una importante concentración de esfuerzos es en el resalto (también llamado, hombro), que sirve de apoyo a los cojinetes. En estos elementos, las concentraciones de tensiones pueden llegar a ser determinantes en su proyecto, por ello se ha definido al *factor teórico* o *factor geométrico de concentración de tensiones*, como la máxima tensión producida en el lugar en donde se produce esta concentración ($\tau_{m\acute{a}xima}$ ó $\sigma_{m\acute{a}xima}$), respecto a la tensión nominal que se tendría si dicho concentrador no existiera ($\tau_{nomin al}$ ó $\sigma_{nomin al}$), magnitud relativa que puede evaluarse a través de una ecuación, que se expresa (Budynas and Nisbett, 2008):

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}xima}}{\sigma_{nomin al}} \quad \text{ó} \quad K_t = \frac{\tau_{m\acute{a}xima}}{\tau_{nomin al}} \quad (1)$$

Este factor de concentración de tensiones, se lo determina considerando un comportamiento elástico lineal del material, por eso se lo conoce como *factor teórico* o *factor geométrico* que depende solo de la geometría de la pieza considerada, siempre que el estado de cargas analizado sea estático, manteniéndose las tensiones dentro del límite elástico del material.

Existe otro factor que es el *factor efectivo de concentración de tensiones* que depende del comportamiento a fatiga propio de cada material o del tratamiento tecnológico al cual fue sometida la pieza, producidos por cambios en el estado tensional y es determinado mediante ensayos con probetas normalizadas, sin entalla y con la entalla incorporada (Vallange and Doughtie, 1973).

El incremento de las tensiones reales máximas, puede llegar a alcanzar valores significativos. Si se está en presencia de árboles que estén sometidos a esfuerzos de flexión, los factores teóricos de concentración de tensiones pueden alcanzar valores del orden de 3 ó 4, mientras que en árboles sometidos a esfuerzos de torsión, este incremento de tensiones puede llegar a ser de 2 ó 3, dependiendo de las distintas relaciones geométricas. Este factor tiene especial influencia en la fatiga de la zona afectada. Por estos motivos, el realizar adecuadas consideraciones de diseño y análisis, para minimizar este efecto es muy importante en el comportamiento en servicio de los componentes mecánicos.

Durante años, se han realizado múltiples estudios para determinar ecuaciones y ábacos que permitan colaborar con el proyectista de estos elementos (Budynas and Nisbett, 2008; Pilkey, 1997; Orlov, 1986). No obstante, estas ecuaciones y ábacos, no cubren todo el espectro de posibles variaciones de las relaciones de diámetros (D/d) de los árboles. Por esos motivos, en este trabajo se estudia la concentración de tensiones en árboles, con relaciones D/d entre 1.25

y 1.10, que es un rango de variación de este parámetro que escasamente se presenta en la bibliografía especializada (Stiopin, 1976), pese a que es de uso en la práctica. Cabe acotar que esta concentración de tensiones, por discontinuidades geométricas, se presenta en distintos tipos de elementos mecánicos y materiales (Vallange and Doughtie, 1973; Amé et al., 2011; Domínguez et al., 2007)

Por otra parte, en la literatura se encuentran publicaciones actuales (Pavan et al., 2013; Van Zyl et al., 2013; Göksenli and Eryürek, 2009; Savkovic et al., 2012), sobre el diagnóstico de fallas prematuras de elementos mecánicos, que son ejemplo de las deficiencias de diseño en la consideración de los concentradores de tensiones.

Con el fin de disminuir la influencia de la concentración de tensiones, en el caso de los árboles y ejes, existen diseños geométricos que permiten reducir esta concentración de esfuerzos en la garganta del resalto, este efecto se logra realizando: (Budynas and Nisbett, 2008)

- a) Corte de penetración de radio de acuerdo generoso en la pared vertical del resalto,
- b) Ranura rebajada de radio grande en el encuentro del resalto, o
- c) Ranura rebajada de radio grande en la parte superior en la cercanía del resalto.

Con respecto a la primera de las propuestas, la misma es difícil de materializar, por la dificultad que presenta el mecanizado del rebaje en la pared vertical del resalto. Con respecto a realizar una ranura rebajada de radio grande en el encuentro de resalto, debilita la sección de menor diámetro, por lo que puede darse el caso que haya que aumentar el radio del árbol, para compensar esta disminución. Resulta entonces, como una solución más racional, técnicamente hablando, tallar una ranura semicircular en la parte superior del resalto, dado que la misma suaviza las líneas de flujo del esfuerzo, atenuando el efecto de la concentración de tensiones, que es la tercera propuesta. Este es el motivo que llevó a los autores a realizar el estudio de la influencia de esta discontinuidad geométrica adicional, sobre el estado tensional y de los desplazamientos superficiales en los árboles analizados.

2 DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS

El modelo de análisis propuesto en este trabajo corresponde a la geometría de un árbol de 2800 mm de longitud total, constituido por tres tramos de sección circular. El tramo central es de 2000 mm de longitud y diámetro D , como una de las variables a considerar, y dos tramos extremos de 400 mm cada uno y diámetro $d = 200$ mm. Considerando la simetría de esta pieza, el modelo analizado se simplificó a un tramo de diámetro D , de 1000 mm de longitud y otro de diámetro $d = 200$ mm y 400 mm de longitud. Se considera con todos los grados de libertad restringidos (empotrado) en el extremo de mayor diámetro (D), y con radio de acuerdo circular r , como segunda variable, en el punto de discontinuidad de la sección transversal (Figura 1).

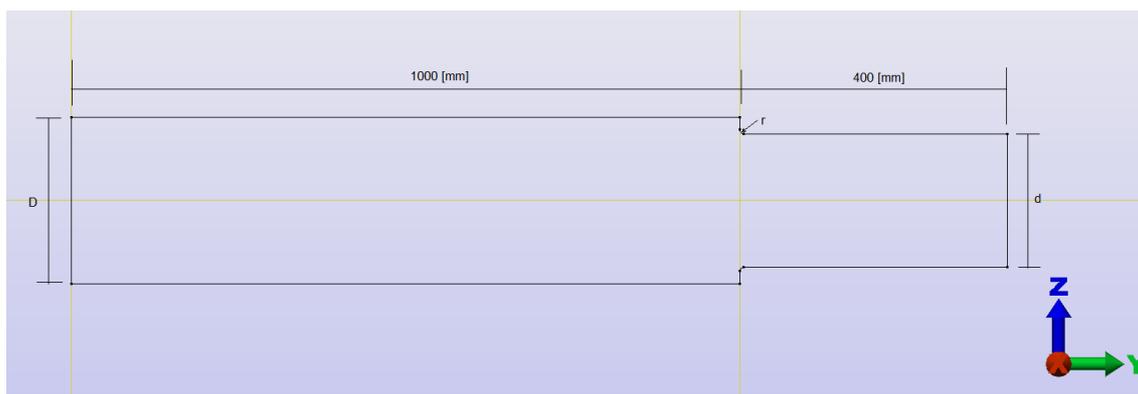


Figura 1: Geometría del árbol con radio de acuerdo r en el resalto.

Para completar el estudio, se construyeron y analizaron, modelos con igual geometría y dimensiones que el árbol mostrado en la Figura 1, a los que se les incorporó una ranura circular de alivio, de radio R , considerada como la tercera variable de estudio, sobre la sección de mayor diámetro (D), a una distancia L del resalto. En este estudio el valor de la variable L se estableció en 10 mm, contemplando el caso en que la pista del rodamiento apoye bajo carga sobre el resalto, a fin de asegurar una adecuada resistencia y por otra parte, posicionada de manera tal que le permita minimizar, al suavizar las líneas de flujo de los esfuerzos, las máximas tensiones generadas en la zona del cambio de sección (Figura 2).

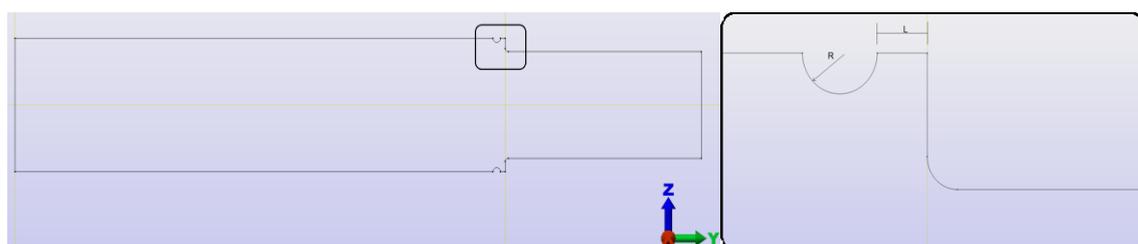


Figura 2: Geometría del árbol con ranura de alivio y detalle de la ubicación de la ranura respecto del resalto.

Las dimensiones utilizadas en los modelos geométricos corresponden a las de árboles de transmisión de potencia de gran tamaño, por ejemplo el del accionamiento del tambor de un elevador de cangilones, con una potencia aplicada del orden de los 400 CV con giro de 50 rpm. Cabe mencionar que en la sección de menor diámetro, va montado el elemento de apoyo, en este caso un rodamiento oscilante de rótulas, de diámetro de pista interior de 200 mm, que respalda con el resalto. Para asegurar el correcto montaje y funcionamiento de este elemento, las dimensiones del radio de acuerdo (r) y el resalto ($(D-d)/2$) del árbol están limitados. Asimismo, el radio del acuerdo del árbol debe ser menor que el radio de redondeo del borde de la pista del rodamiento, valor que está establecido por la norma ISO (ISO 355, 2007; SKF, 2006). En los modelos presentados el radio de redondeo del borde de la pista del rodamiento es 5 mm. Por otra parte, la altura del resalto debe ser menor que la altura de la pista interior, de modo de permitir la aplicación de la herramienta extractora correspondiente, para posibilitar el desmontaje apropiado del rodamiento.

Para determinar el valor de las tensiones y desplazamientos, se adoptó como estado de carga, un momento torsor de 40000 Nm, aplicado en el extremo libre del árbol. La aplicación de la cupla se modeló como carga remota. Las propiedades del material utilizado son módulo elástico a corte $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, Coeficiente de Poisson 0,29; módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, tensión de fluencia $3,10 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ y tensión de rotura $5,65 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$. El

análisis lineal de tensiones se efectuó con un software basado en el Método de los Elementos Finitos, comercialmente conocido como Algor 23 (ALGOR 23, 2010). Se utilizaron elementos Bricks isoparamétricos de 6 y 8 nodos, coincidentes con los vértices del elemento (sin nodos intermedios), generados a partir de un mallado volumétrico. El programa utiliza cuadratura de Gauss para calcular numéricamente las integrales. En todos los modelos se intensificó la densidad de elementos en la zona del resalte, zona de interés donde se producen los mayores gradientes de las tensiones. Estas pruebas se realizaron hasta lograr una aceptable convergencia en los valores del factor teórico de concentración de tensiones. El número total de elementos bricks utilizados varía entre 54000 y 58000.

3 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

3.1 Determinación del K_T en función del radio de entalla y la relación entre diámetros

Teniendo en cuenta las consideraciones expresadas en el punto anterior se construyeron y analizaron modelos con diámetros de sección mayor (D) de valores: 220, 230, 240 y 250 mm y radios de acuerdo (r) de valores 2, 3 y 4 mm.

El cálculo del K_T (Ec. 1) se realizó considerando las tensiones de Von Mises, obteniéndose iguales resultados con el uso de las tensiones de Tresca.

Para la obtención del valor de la tensión de referencia o tensión nominal, se construyó y analizó el modelo de un árbol, de sección circular constante de diámetro $d = 200$ mm, longitud 1400 mm, empotrado en un extremo y sometido a un momento torsor de 40000 Nm.

3.2 Determinación del K_T considerando la influencia de una ranura circular de alivio

Se construyeron y analizaron, modelos con igual geometría y dimensiones que el árbol mostrado en la Figura 1, a los que se les incorporó una ranura circular de alivio, de radio R . En este trabajo se ha utilizado en los análisis la relación entre el radio de la ranura R y el resalte $(D-d)/2$, con valores en el rango de 0,3 a 1. En la Figura 3 se muestra el modelo con el momento torsor aplicado, mientras que en las Figuras 4 y 5 se aprecian los resultados de las tensiones de Von Mises para $D/d = 1,10$, radio de acuerdo $r = 2$ mm y radio de ranura $R = 3$ mm y para $D/d = 1,20$ radio de acuerdo $r = 4$ mm y radio de ranura $R = 8$ mm respectivamente.

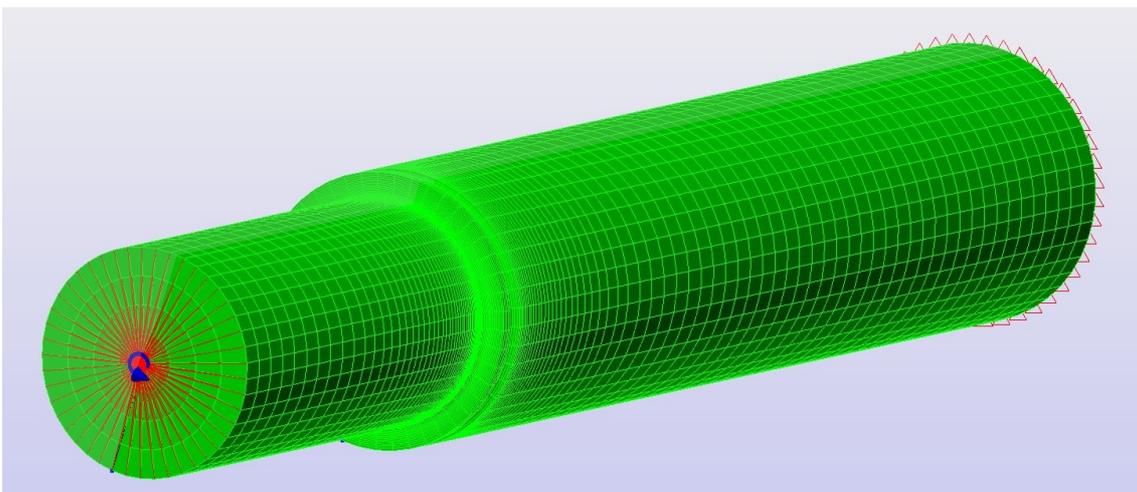


Figura 3: Modelo correspondiente a la geometría con ranura

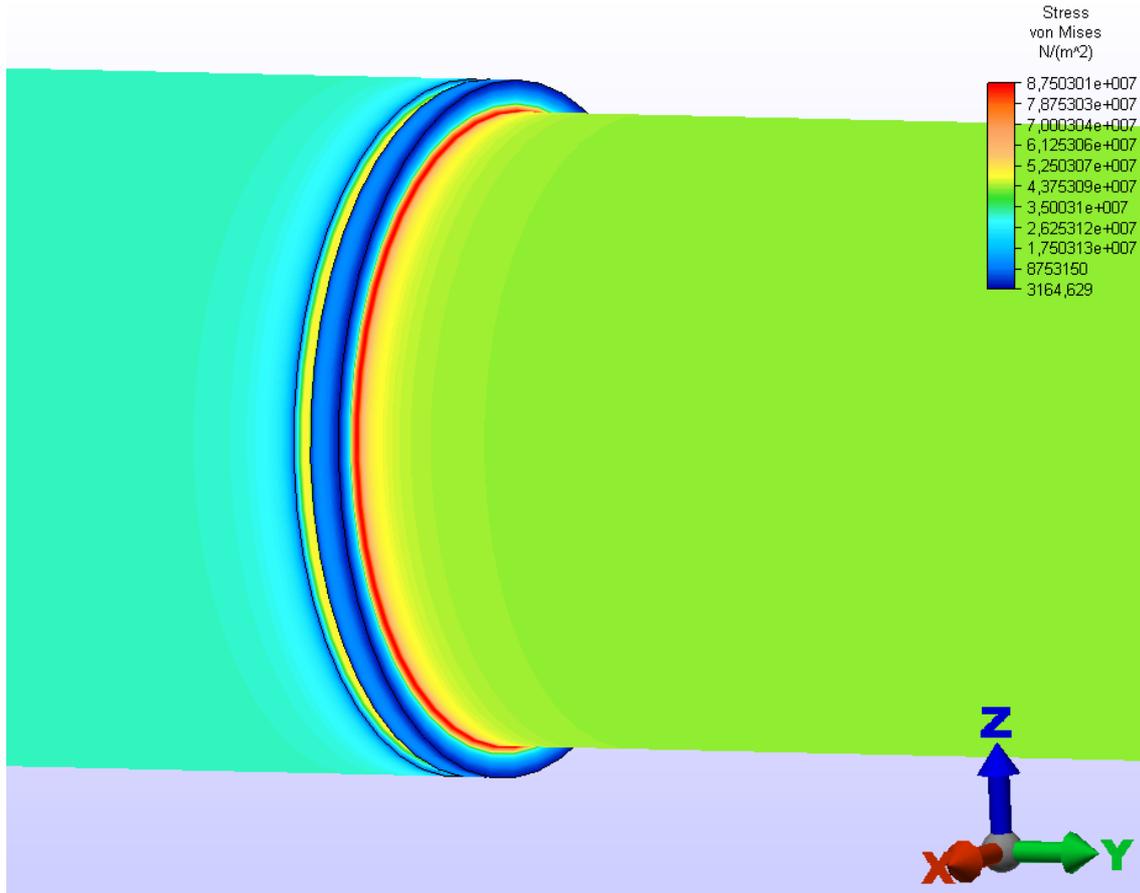


Figura 4: Tensiones de Von Mises para el modelo con $D/d = 1,10$, $r = 2$ mm y $R = 3$ mm

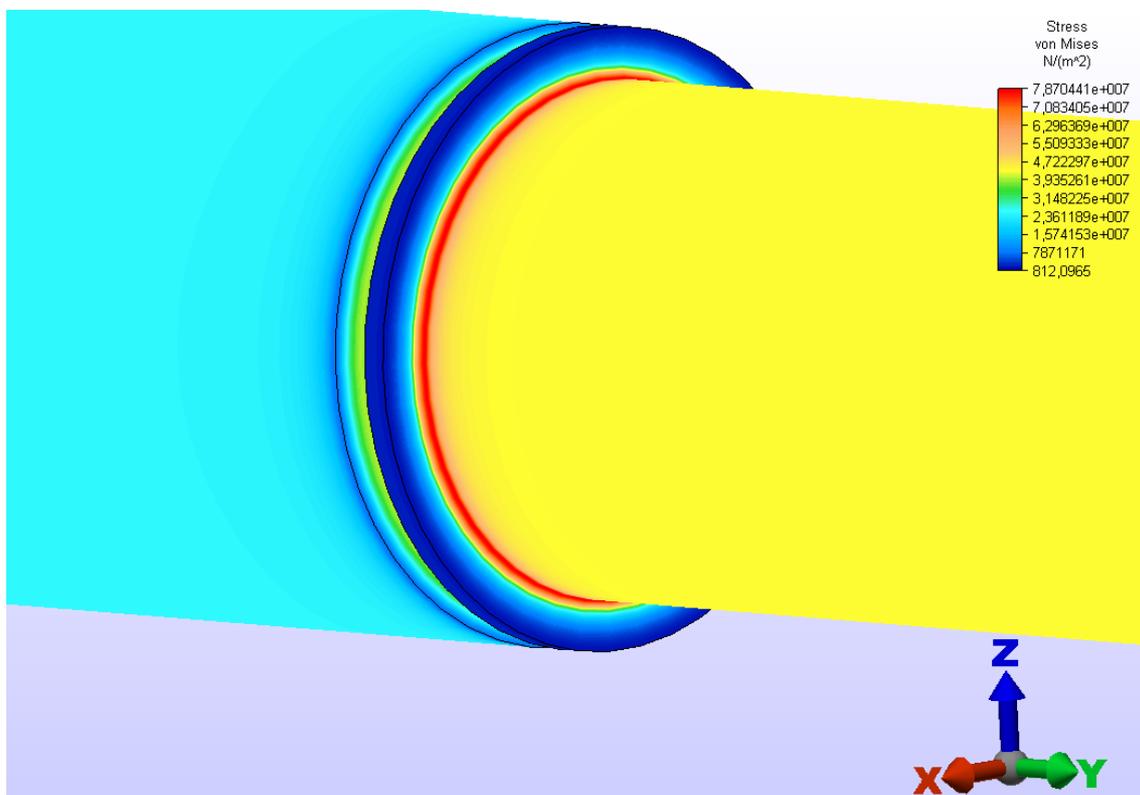


Figura 5: Tensiones de Von Mises para el modelo con $D/d = 1.20$, $r = 4$ mm y $R = 8$ mm

Es importante comentar que en ninguno de los casos analizados en este trabajo, la tensión superó el límite de elasticidad del material.

3.3 Determinación de los desplazamientos en la cara frontal del resalto

Cuando se producen pequeños movimientos deslizantes entre las superficies de apoyo con el árbol y el alojamiento del rodamiento se incrementa la probabilidad de producirse oxidación y/o desgaste, conocido como ludimiento. Por ello, en este trabajo se propone también cuantificar los desplazamientos de la superficie frontal del resalto, que es la zona en la que se apoya el lateral de la pista interior del rodamiento. Con este fin, se analizó el valor del parámetro que hemos llamado "Desplazamiento Superficial" (DS), cuya determinación es análoga a las del parámetro Desplazamiento Volumétrico (Ortega and Robles, 2003), permite considerar la incidencia de los desplazamientos de los nudos de toda la pieza o estructura o en una zona acotada, permitiendo tener un conocimiento global de su comportamiento. El procedimiento consiste en analizar los desplazamientos, de las mencionadas piezas, empleando como función objetivo un parámetro denominado "Desplazamiento Superficiales" (DS), el que se obtiene con la ecuación (2):

$$DS = \sum_{i=1}^n \delta_i \times A_i \quad (2)$$

donde:

δ_i es el desplazamiento total de cada nodo i de la malla; y

A_i es el área de la superficie de influencia de cada nodo de la malla.

4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En la Figura 6 se representa gráficamente la variación del K_T en función de la relación r/d , correspondiendo cada curva a una dada relación de D/d . Se debe hacer notar que para las relaciones r/d y D/d estudiadas ($r/d = 0,01; 0,015$ y $0,02$ y $D/d 1,1; 1,15; 1,20$ y $1,25$) estas relaciones se encuentran en una zona no contemplada en los datos publicados en la bibliografía específica del tema, o bien están en el límite de los rangos considerados (Budynas and Nisbett, 2008; Pilkey, 1997). Estas relaciones poseen una variación próxima a la lineal, con una tendencia convergente, en la medida que se incrementa r/d .

Para verificar la calidad del modelo propuesto, se realizó una comparación con valores presentados en el libro Diseño de Máquinas de Norton (Norton, 2011), en el que se presenta una ecuación aproximada que contiene el rango de valores de la relación D/d estudiados en este trabajo, e indica, los valores de las constantes A y b , de la ecuación aproximada del K_T :

$$K_T = A \left(\frac{r}{d} \right)^b \quad (3)$$

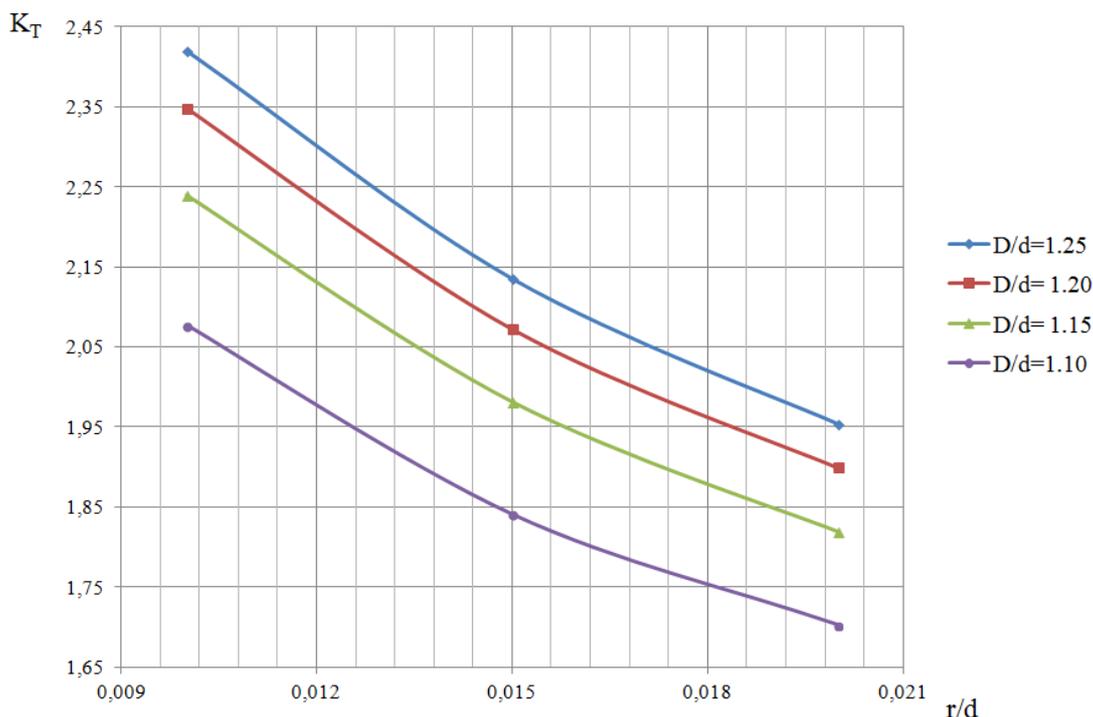


Figura 6: K_T en función de r/d (sin ranura sobre el resalto) y de la geometría del eje.

En la Tabla 1 se exponen los valores de los K_T calculados con la ecuación (5) y los valores que resultan de este trabajo. Como se puede observar las diferencias porcentuales entre los mismos se encuentran por debajo del 5 %.

$\frac{D}{d} = 1,20$					
$\frac{r}{d}$	A	b	K_T		Diferencia Porcentual (%)
			Según Norton [58]	Calculado	
0,010	0,083425	-0,21649	2,26	2,35	4,25
0,015	0,083425	-0,21649	2,08	2,07	0,48
0,020	0,083425	-0,21649	1,95	1,90	1,50

Tabla 1: Comparación de K_T hallado con la ecuación presentada en [58] y la calculada

En la Figura 7 se observan las curvas que representan la variación del factor teórico de concentración de tensiones, para diferentes relaciones entre el radio de ranura de alivio (R) y la magnitud del resalto $((D-d)/2)$. Cada una de estas curvas corresponde a una relación de diámetros (D/d) y un valor dado de radio de entalla (r). Puede observarse que en ambos casos $r = 2$ y 4 mm y para todas las relaciones D/d las curvas presentan un leve incremento de su pendiente, para valores de $R/((D-d)/2)$ mayores a 0,40, aproximadamente.

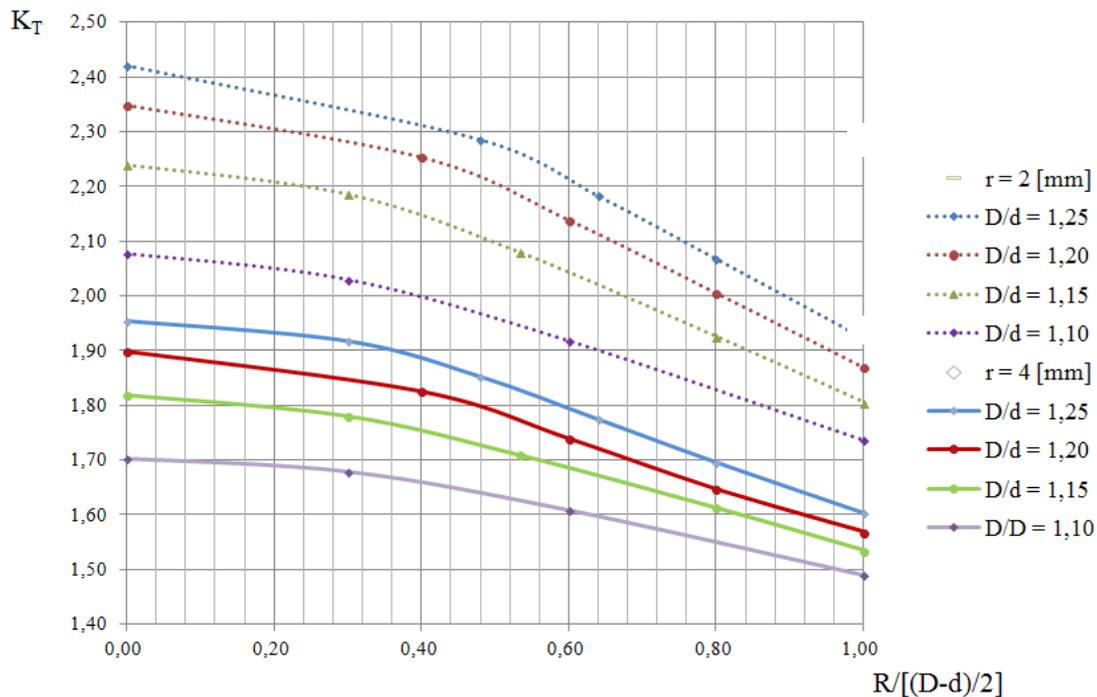


Figura 7: K_T en función del radio de la ranura sobre resalto y la geometría del eje.

Cabe acotar que el valor máximo de las relaciones $R/[(D-d)/2]$ se limitó a la unidad, situación en la que el radio de la ranura de alivio (R), es coincidente con la magnitud del resalto $[(D-d)/2]$.

En la Figura 8, se muestra la relación entre el porcentaje de atenuación del K_T , respecto a los valores del factor teórico de concentración de tensiones para el caso de la geometría sin ranura de alivio, para la relación $R/[(D-d)/2] = 1$, es decir, cuando el radio de la ranura de alivio es coincidente en magnitud con la altura del resalto, en otras palabras el máximo valor de R tomado en consideración.

Se observa que la gráfica presenta un máximo entre el valor correspondiente a la relación $D/d = 1,20$ a $1,25$. Se puede inferir que la influencia de la ranura de alivio sobre la disminución de las tensiones máximas prevalece sobre la influencia del incremento de la magnitud del resalto tal como puede apreciarse en la figura 6 donde la geometría sin ranura de alivio indica que cuanto mayor es el resalto, mayor es el valor de K_T .

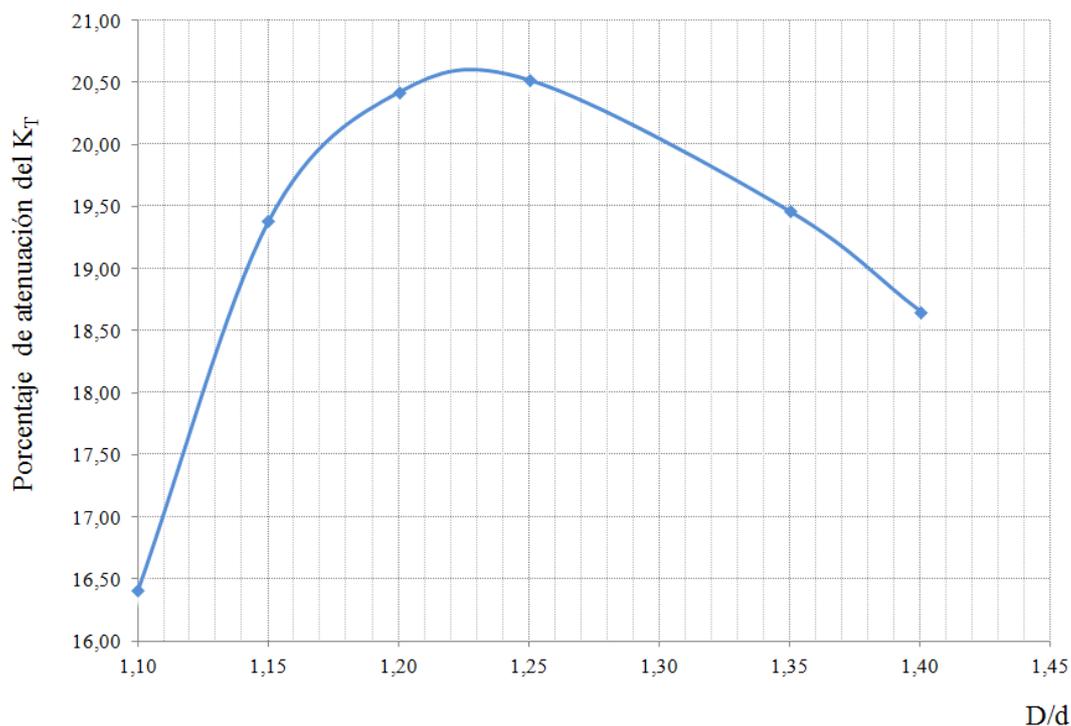


Figura 8: Porcentaje de atenuación del K_T en función de la relación D/d para $r = 2$ [mm] y radio de ranura de igual magnitud que la altura del resalto

En la Figura 9, se aprecia que los Desplazamientos Superficiales prácticamente se duplican, cuando la relación D/d aumenta de 1,10 a 1,25. Para los valores 1,10 y 1,20 de esta relación, los Desplazamientos Superficiales se mantienen casi constantes, independientemente de la relación entre el resalto y el radio de la ranura de alivio, pero para la relación $D/d = 1,25$, se aprecian incrementos mayores de los Desplazamientos Superficiales, con el aumento de la relación entre el resalto y el radio de la ranura de alivio. En otras palabras, el radio de la ranura de alivio colabora para disminuir los desplazamientos de la cara frontal del resalto, a partir de valores de relaciones $D/d \geq 1,25$.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una metodología de análisis para colaborar con el diseño de concentradores de tensiones cuantificando la influencia que poseen las ranuras de alivio, información que escasamente está documentada en los manuales clásicos, empleados por los diseñadores, por lo que varias de las figuras presentadas y consideraciones realizadas tienen utilidad en el diseño práctico de estos elementos mecánicos. Este es un primer trabajo realizado sobre este tema por los autores y se continuará investigando con el objetivo de considerar la influencia de otras variables por cuanto se entiende que un análisis detallado de esta temática resulta de interés para la prevención, desde el diseño, de fallas prematuras vinculadas con la fatiga y a los efectos de la re-ingeniería de piezas colapsadas.

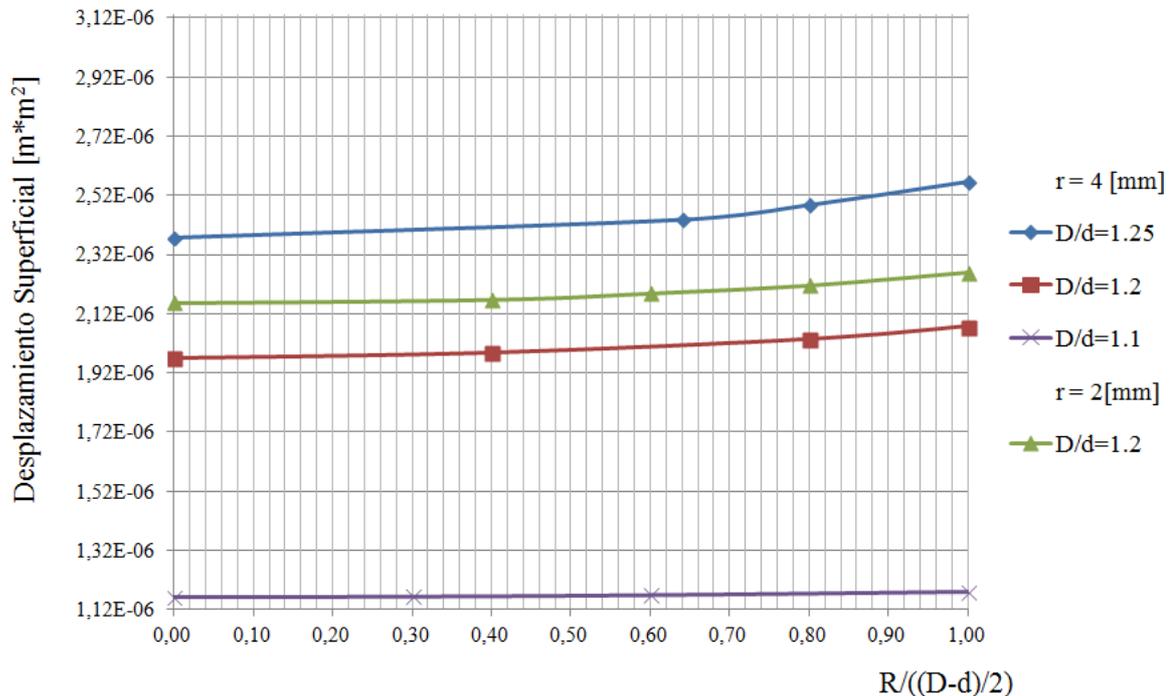


Figura 9: Variación de los Desplazamiento Superficiales

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por el apoyo brindado para el desarrollo de estas investigaciones

BIBLIOGRAFÍA

- ALGOR 23, Profesional Mech/VE. *Docutech, linear stress and dynamics, reference Division*. Pittsburgh. Pennsylvania, 2010.
- Amé R.M., Dasso G.M. and Lezama D. Tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas: *Revista Cubana de Ingeniería*, 2(2):43-48, 2011.
- Budynas R.G. and Nisbett J.K. *Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley*, Octava Edición en Español, Mac Graw Hill, México, 2008.
- Domínguez P., Robles S.I., Ortega N.F. and Santos R. Stress Concentration Factors in Composite Materials: *JEC Composites Magazine*, N° 37, 63-65, 2007.
- Göksenli, I. and Eryürek B. Failure analysis of an elevator drive shaft, *Engineering Failure Analysis*, 16:1011–1019, 2009.
- ISO 355, Rolling bearings. Tapered roller bearings. Boundary dimensions and series designations, 2007.
- Norton R.L. *Diseño de Máquinas*. Ed. Pearson, México, 2011.
- Orlov P. *Ingeniería de Diseño*. Segunda Edición en Español. Ed. MIR, Moscú, 1986.
- Ortega N.F. and Robles S.I. The design of hiperbolic paraboloids on the basis of their mechanical behavior: *Journal of thin – walled structures, Elsevier*, 41, 769-784, 2003.
- Pavan, A., Vikrant K., Swamy M. and Jayaraman G. Root cause analysis of bowl-mill pinion shaft failures, *Case Studies: Engineering Failure Analysis*, 1:103–109, 2013.
- Pilkey W.D.; *Peterson's Stress Concentration Factors*. Second Edition. Ed. Willey, New York, 1997.

- Savkovic M., Gašić M., Petrovic D., Zdravkovic N. and Pljakic R. Analysis of the drive shaft fracture of the bucket wheel excavator: *Engineering Failure Analysis*, 20:105–117, 2012.
- SKF. Catálogo General, Publicación 6000, Madrid, 2006.
- Stiopin P. *Resistencia de Materiales*, Ed. MIR, Moscú, 1976.
- Vallange A. and Levy Doughtie V. *Cálculo de Elementos de Máquinas*, Ed. Alsina, 1973.
- Van Zyl G. and Al-Sahli A. Failure analysis of conveyor pulley shaft Case Studies: *Engineering Failure Analysis*, 1:144–155, 2013.