

## EFICIENCIA DE SISTEMAS DE REFUERZO/REPARACIÓN CON HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS

**Gonzalo Ruano<sup>a,c</sup>, Domingo Sfer<sup>b,d</sup>, Bibiana Luccioni<sup>b,c</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, [www.herrera.unt.edu.ar/iest](http://www.herrera.unt.edu.ar/iest), [gonzalo.ruano@gmail.com](mailto:gonzalo.ruano@gmail.com)*

<sup>b</sup>*Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina.*

<sup>c</sup>*CONICET, Av. Rivadavia 1917, Cdad de Bs. As.*

<sup>d</sup>*CIUNT – FACET - Universidad Nacional de Tucumán*

**Palabras Clave:** Hormigón reforzado con fibras, corte, refuerzo, reparación.

**Resumen.** La incorporación de fibras al hormigón u otros materiales cementicios provoca mejoras en el comportamiento del material, fundamentalmente en tracción. Una técnica de refuerzo/reparación de estructuras de hormigón armado es la adhesión de capas finas de material cementicio; en esos casos resulta beneficioso el uso de fibras ya que estas proporcionan además cierta continuidad a través de las fisuras y demoran el inicio y la propagación del despegue.

En el presente trabajo se estudia numéricamente el comportamiento mecánico de vigas de hormigón armado reforzadas y reparadas con hormigón reforzado con fibras (HRF) ensayadas a corte. Para modelar el proceso de daño y reparación se utiliza un algoritmo que tiene en cuenta el proceso evolutivo.

La simulación numérica de las vigas se realiza con un programa de elementos finitos no lineal. El hormigón armado y el HRF se modelan mediante la teoría de mezclas modificada para materiales anisótropos. Dentro de esta teoría el hormigón se modela mediante el modelo de daño plástico modificado. Para las fibras de acero y la armadura se utilizan modelos elastoplásticos. En el caso de las fibras el comportamiento está gobernado por el fenómeno de arrancamiento que en general ocurre antes de la plastificación de las mismas. Estos fenómenos se tienen en cuenta de manera aproximada modificando la ecuación constitutiva de las fibras.

A modo de validación, se compara la respuesta global obtenida numéricamente con los resultados experimentales de vigas de hormigón armado dañadas a corte, reparadas con una capa de HRF y ensayadas nuevamente y vigas de hormigón armado reforzadas con HRF ensayadas a corte.

Finalmente se estudian numéricamente distintas alternativas de la capa de refuerzo/reparación que permiten obtener resultados útiles para el diseño de este tipo de intervención.

## 1 INTRODUCCIÓN

El hormigón es el material estructural más usado en el mundo (Shah y Ribakov, 2011). Es muy común que las estructuras de hormigón armado (HA) requieran refuerzo y/o reparación (Obaidat, et al., 2011). La mayoría de elementos estructurales de hormigón armado están sometidos a fuerzas de corte que raramente actúan solas, sino más bien en combinación con otras (Park y Paulay, 1975).

El hormigón reforzado con fibras (HRF) es un material compuesto por una matriz de hormigón a la que se adicionan fibras que mejoran su comportamiento. El principal efecto de la incorporación de fibras en el hormigón es el control de los procesos de fisuración. Esto da lugar a notables incrementos en la tenacidad del material compuesto, como así también a beneficios adicionales en lo que se refiere a su resistencia, fundamentalmente ante sollicitaciones de tracción. Estas características hacen del HRF un material atractivo para la reparación y/o refuerzo de estructuras de hormigón. El hormigón reforzado con fibras presenta un patrón de fisuración más distribuido, mostrando fisuras de menor ancho. Como consecuencia de ello aumenta la durabilidad de las capas de refuerzo/reparación impidiendo el ingreso de agentes agresivos que favorecen el despegue de estas capas. La técnica de reparación/refuerzo de elementos de hormigón armado con HRF supera algunos de los problemas que presentan otras técnicas de refuerzo como la falla frágil en la interfaz refuerzo/hormigón. Comparados con los polímeros reforzados con fibras, los compuestos cementicios reforzados con fibras presentan mayor resistencia a altas temperaturas y radiación ultravioleta y fundamentalmente mayor compatibilidad con el sustrato de hormigón y mayor durabilidad a largo plazo (Nanni, 2012).

A pesar de que el comportamiento del hormigón bajo cargas multiaxiales ha sido bien estudiado, documentado y modelado por varios investigadores (Swaddiwudhipong y Seow, 2006) los modelos de HRF para predecir su comportamiento, tensiones y deformaciones son aún muy pocos y se encuentran marcadas diferencias entre los modelos constitutivos propuestos en los códigos (Blanco, et al., 2013). Los modelos constitutivos para el HRF pueden clasificarse de acuerdo a la escala en que están definidos en macro-modelos y meso-modelos. En los macro-modelos el comportamiento del material se representa mediante un único material con propiedades promedio. En los meso-modelos se necesita conocer la fuerza necesaria en una fibra para unir las caras de una fisura y obtener el comportamiento del conjunto para una distribución de fibras.

En este trabajo se utiliza una forma simple de modelar el HRF basada en la teoría de mezclas modificada (Luccioni, et al., 2012). El HRF es considerado como un material compuesto por una matriz de hormigón y fibras de acero cortas dispersas que pueden deslizarse. Para el hormigón se utiliza un modelo elastoplástico (Luccioni, et al., 1996) (Luccioni y Rougier, 2005). Las fibras se consideran uniformemente distribuidas y orientadas en 3 direcciones ortogonales. Se simula las mismas mediante un modelo elastoplástico modificado (Luccioni y López, 2002) para incluir el fenómeno de deslizamiento sin modelar explícitamente la interfaz.

En el trabajo se describe brevemente el programa experimental y los modelos constitutivos usados. Se presenta el algoritmo desarrollado para de simular el proceso de reparación de las vigas. Luego se compara los resultados numéricos con los experimentales y finalmente se realizan simulaciones de alternativas de refuerzo/reparación no ensayadas.

## 2 PROGRAMA EXPERIMENTAL

El objetivo principal del programa experimental fue la evaluación de las ventajas que presenta el uso de hormigón reforzado con fibras en refuerzo y reparación de estructuras de

hormigón armado solicitadas a corte, en particular, la contribución de las fibras en la respuesta de las vigas reforzadas/reparadas. Para ello se diseñaron y construyeron vigas de hormigón armado que fallen por corte.

El programa incluía 15 vigas de hormigón armado con y sin estribos construidas juntas. Algunas de las vigas con estribos fueron dañadas, reparadas con HRF y ensayadas nuevamente. El resto fueron reforzadas con HRF y ensayadas. Las dimensiones y detalles de las vigas de HA se muestran en Figura 1(a) y las principales características de los especímenes ensayados se resumen en Tabla 1. Las vigas fueron reforzadas/reparadas con un encamisado de HRF de alta performance. Ver Figura 1(b). Para estudiar el efecto de la incorporación de fibras se usaron tres tipos de materiales de refuerzo/reparación, hormigón simple y HRF con dos dosificaciones de fibras, esto es  $30\text{kg/m}^3$  y  $60\text{kg/m}^3$ . En los dos últimos casos se utilizaron fibras de acero con ganchos en los extremos de 1 mm de diámetro y 50 mm de longitud. Para todos los casos el espesor del encamisado fue de 30mm.

Las vigas fueron ensayadas en flexión asimétrica con una prensa INSTRON 8504, ver Figura 1(c). Se midió el desplazamiento bajo el punto de aplicación de la carga. Las vigas se ensayaron hasta pasar el pico de carga y obtener parte de la rama descendente. Luego se descargaron de manera controlada. Inicialmente se aplicó una carga creciente a velocidad de  $0.167\text{kN/s}$  hasta alcanzar los 30kN; luego se continuó con control de desplazamiento a velocidad de  $0.5\text{mm/min}$ , finalmente la descarga se realizó de manera controlada.

En general, las vigas fueron ensayadas hasta alcanzar una flecha de 12mm. Sin embargo, no todas fueron ensayadas hasta dicha flecha: en algunos casos, pasada la carga máxima, las vigas presentaron ablandamiento muy pronunciado y el ensayo se detuvo al alcanzar el 70% de la carga máxima. En el caso de las vigas con encamisado estas fueron ensayadas hasta alcanzar una flecha de 14mm.

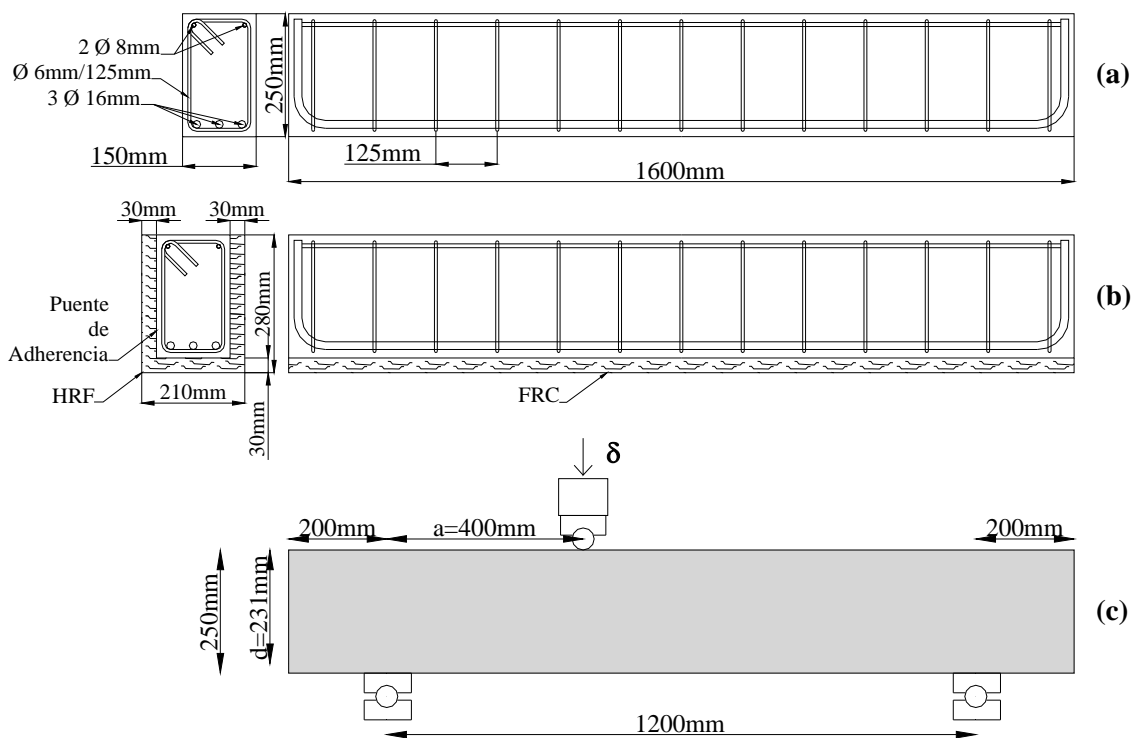


Figura 1: (a) Viga de hormigón Armado. (b) Viga reforzada/reparada. (c) Configuración de ensayo.

Tabla 1: Vigas ensayadas.

Nº Viga	Tratamiento	Contenido fibras [kg/m3]
1; 2	Ref.	-
4; 5; 6	Rep.	-
7; 8	Ref.	30
10; 11; 12	Rep.	30
13; 14	Ref.	60
16; 17	Rep.	60
18	Sin Est. Sin Ref.	-

Est.: Estribos, Ref.: Reforzada, Rep.: Reparada

### 3 MODELOS CONSTITUTIVOS

El HRF puede ser considerado como un material compuesto por una matriz de hormigón y fibras cortas con distintas orientaciones dispersas en el volumen. Una forma simple de modelar el comportamiento de materiales compuestos es la teoría de mezclas. En este trabajo se utiliza la teoría de mezclas de materiales ortótropos para obtener el comportamiento del hormigón con fibras llevando cuenta de lo que ocurre en el hormigón y lo que ocurre en las fibras. En particular, se considera la anisotropía y el posible deslizamiento de las fibras de manera simplificada (Luccioni, et al., 2012).

#### 3.1 Material compuesto

La teoría de mezclas de sustancias básicas en su forma clásica (Truesdell y Toupin, 1960) se basa en las siguientes hipótesis:

- (i) En cada volumen infinitesimal del compuesto participan el conjunto de sustancias componentes.
- (ii) Cada componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica.
- (iii) El volumen ocupado por cada componente es menor que el volumen ocupado por el compuesto.
- (iv) Todos los componentes poseen la misma deformación (ecuación de cierre o compatibilidad).

Para pequeñas deformaciones, la última hipótesis se escribe como:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_1 = (\varepsilon_{ij})_2 = \dots = (\varepsilon_{ij})_n \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  y  $(\varepsilon_{ij})_n$  son los tensores de deformación del conjunto y de la n-ésima componente del material.

Por otro lado, la energía libre por unidad de volumen del compuesto puede escribirse como

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, \alpha_i) = \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ci}) \quad (2)$$

donde  $\Psi_c(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ci})$  es la energía libre por unidad de volumen correspondiente a cada una de las  $n$  sustancias componentes,  $k_c = dV_c/dV$  su fracción de volumen y  $\alpha_{ci}$  un conjunto de variables internas correspondiente a dicha componente.

La ecuación constitutiva secante puede obtenerse a partir de las relaciones de Coleman que garantizan el cumplimiento de la desigualdad de Clasius Duhem (Lubliner, 1972):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{kl}, \alpha_k)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(\varepsilon_{kl}, \alpha_{kc})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c \quad (3)$$

donde las tensiones en cada una de las componentes  $(\sigma_{ij})_c$  se obtienen de las ecuaciones constitutivas correspondientes. Para el hormigón se utiliza el modelo de daño plástico modificado y para las fibras de acero un modelo elastoplástico ortótropo en el que se considera el comportamiento de las fibras de manera simplificada.

En este caso se considera al HRF como un compuesto formado por matriz de hormigón y fibras en tres direcciones ( $x, y, z$ ). No se considera explícitamente la interfaz fibra/matriz. De manera que la ecuación de compatibilidad se escribe como

$$(\varepsilon_{ij})_{FRC} = (\varepsilon_{ij})_{H^o} = (\varepsilon_{ij})_{Fx} = (\varepsilon_{ij})_{Fy} = (\varepsilon_{ij})_{Fz} \quad (4)$$

Pero esta es una condición muy fuerte. Es sabido que el deslizamiento de las fibras respecto de la matriz juega un papel importante en el comportamiento del HRF. Para tener en cuenta este deslizamiento sin modelar la interfaz, se modifica el modelo de las fibras. Se supone que la deformación total de las fibras está compuesta por la deformación elástica  $(\varepsilon_{ij}^e)_{Fi}$ , una deformación plástica  $(\varepsilon_{ij}^p)_{Fi}$  y la debida al deslizamiento relativo a la matriz  $(\varepsilon_{ij}^s)_{Fi}$ .

$$(\varepsilon_{ij})_{Fi} = (\varepsilon_{ij}^e)_{Fi} + (\varepsilon_{ij}^p)_{Fi} + (\varepsilon_{ij}^s)_{Fi}; \quad i = x, y, z \quad (5)$$

Las dos últimas componentes constituyen la deformación inelástica del conjunto fibra+interfaz. Sólo las dos primeras componentes ocurren estrictamente en las fibras, de manera que la deformación de las fibras mismas no coincide con la de la matriz.

### 3.2 Modelo constitutivo del hormigón

Para el hormigón se utiliza el modelo de daño plástico modificado (Luccioni y Rougier, 2005), (Rougier y Luccioni, 2007) que permite simular el comportamiento de materiales friccionales del tipo hormigón sometidos a altos niveles de confinamiento.

Es un modelo que deriva de una generalización de la teoría clásica de la plasticidad (Oller, 1988); (Lubliner, et al., 1989); (Luccioni, et al., 1996). El límite del comportamiento elástico se describe a través de una función de fluencia:

$$F(\sigma_{ij}; \kappa^p) = f(\sigma_{ij}) - K(\sigma_{ij}; \kappa^p) \leq 0 \quad (6)$$

donde  $f(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones.  $K(\sigma_{ij}; \kappa^p)$  es el umbral de fluencia y  $\kappa^p$  es la variable de daño plástico o variable de endurecimiento isótropo. En este trabajo se utiliza el criterio de Lubliner-Oller modificado (Luccioni y Rougier, 2005)

Se define la siguiente regla de evolución para las deformaciones plásticas:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es el factor de consistencia plástica y  $G$  la función de potencial.

La variable de endurecimiento plástico  $\kappa^p$  se obtiene normalizando la energía disipada en el proceso plástico a la unidad y varía entre 0 para el material virgen y 1 cuando se ha disipado plásticamente la totalidad de la energía que el material es capaz de disipar de esta forma. La regla de evolución de la variable de endurecimiento plástico tiene en cuenta el comportamiento diferenciado en tracción y compresión y permite simular adecuadamente la disipación de energía en compresión triaxial de materiales como el hormigón (Rougier y Luccioni, 2007)

$$\dot{\kappa}^p = \left[ \frac{r}{g_f^{*p}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*p}} \right] \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8)$$

donde:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \geq 0 \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i + |\sigma_i|] \quad (9)$$

$\sigma_i$ : son las tensiones principales

$$g_f^{*p} = \left( \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{op}}{f^p(\sigma_{ij})} \right)^{1+H(-r)} \quad g_f^p \quad g_c^{*p} = \left( \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^p(\sigma_{ij})} \right)^{1+H(-r)} \quad g_c^p \quad (10)$$

$$H(-r) \begin{cases} = 0 & \text{if } r > 0 \\ = 1 & \text{if } r = 0 \end{cases}$$

$R^{op}$  es la relación entre los umbrales de fluencia en compresión uniaxial y en tracción uniaxial,  $g_f^p$  y  $g_c^p$  son las máximas densidades de energía disipadas por el proceso plástico en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente.

Estas energías pueden ser evaluadas como:

$$g_f^p = \frac{G_f}{l_c} \quad y \quad g_c^p = \frac{G_c}{l_c} \quad (11)$$

Donde  $G_f$  y  $G_c$  son las energías de fractura y aplastamiento respectivamente y  $l_c$  es un parámetro externo que depende del tamaño característico de la malla de elementos finitos y se introduce para obtener objetividad de la respuesta del sólido respecto del tamaño de la malla.

Se utiliza la siguiente regla de evolución para el umbral de fluencia equivalente:

$$K(\sigma_{ij}, \kappa^p) = r\sigma_t(\kappa^p) + (1 - r)\sigma_c(\kappa^p) \quad (12)$$

Donde  $\sigma_t(\kappa^p)$  y  $\sigma_c(\kappa^p)$  representan la evolución de los umbrales de fluencia en ensayos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad F^p \leq 0 \quad \dot{\lambda}F^p = 0 \quad (13)$$

### 3.3 Modelo constitutivo de las fibras

Una forma de simular aproximadamente el comportamiento del hormigón con fibras utilizando la teoría de mezclas es modificar las ecuaciones constitutivas de las fibras (Luccioni y López, 2002); (Luccioni, et al., 2005); (Isla Calderón y Luccioni, 2008); (Luccioni, et al., 2012). Teniendo en cuenta que en este caso las fibras se deslizan antes de entrar en fluencia, se modifica el modelo elastoplástico isótropo convencional del acero reduciendo la tensión de fluencia en la dirección axial de las fibras. De esta manera, el umbral de plasticidad en esta dirección representa, en realidad, el umbral de deslizamiento de las fibras respecto del hormigón. El endurecimiento en esa dirección depende de los distintos mecanismos que se desarrollan en el proceso de arrancamiento.

Partiendo de las consideraciones anteriores, para las fibras de acero se utiliza un modelo elastoplástico para materiales ortótropos. De esta manera, se pueden tener en cuenta, no sólo la ortotropía elástica propia de la geometría de la fibra que sólo contribuye a resistir tensiones en la dirección axial, sino también la ortotropía en los umbrales de comportamiento inelástico que surge cuando se introduce el umbral de deslizamiento, menor a la tensión de fluencia, en la dirección axial de las fibras.

Para considerar la ortotropía el modelo parte de la hipótesis de que existen dos espacios (Betten, 1988); (Luccioni, et al., 1996): un espacio anisótropo real y un espacio ficticio isótropo. El problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio lo que permite utilizar modelos elastoplásticos y de daño desarrollados para materiales isótropos.

Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados mediante una transformación lineal definida mediante un tensor de cuarto orden que mapea las tensiones y depende de la ortotropía material. El problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio y luego los resultados son mapeados al espacio ortótropo actual. Para definir el umbral de deslizamiento y flujo de deslizamiento de las fibras se utilizó el criterio de von Mises en el espacio isótropo ficticio. Para especificar el endurecimiento de las fibras en la dirección axial se utilizaron curvas carga-desplazamiento obtenidas de ensayos de extracción de fibras.

## 4 PROPIEDADES MECÁNICAS

En esta sección se muestra brevemente la calibración de las propiedades mecánicas mediante ensayos de caracterización. Las propiedades del hormigón simple se muestran en Tabla 2 donde se diferencian las correspondientes a un hormigón de resistencia normal usado en las vigas y otro de alta resistencia usado para el encamisado de HRF. Algunas de las propiedades se obtuvieron de ensayos estándar de compresión (ASTM C 39, 86) y de módulo de elasticidad (ASTM C 469, 1987). El resto de las propiedades fueron obtenidas indirectamente de forma tal de representar numéricamente la respuesta experimental. Los ensayos de caracterización fueron modelados con un programa de elementos finitos

desarrollado para investigación.

En Figura 2(a) se muestra la malla usada para simular los ensayos de flexión. Se usaron elementos rectangulares en tensión plana. Las dimensiones de las vigas corresponden a las de una viga Rilem (Rilem TC 162-TDF, 2002). En Tabla 2 se puede ver que el hormigón de alta resistencia tiene mayor relación  $R^{0p} = \sigma^0 / \sigma_t$  y mayor energía de fractura  $G_f$  que el hormigón de resistencia normal. Además la resistencia a tracción aumenta menos que la resistencia a compresión. De hecho, para hormigones de alta resistencia esta propiedad es ligeramente mayor que la correspondiente a la de un hormigón de resistencia normal (Shah y Ribakov, 2011).

En Figura 2(a) se muestra la respuesta experimental promedio de hormigones simples de resistencia normal y de alta resistencia y su comparación con las repuestas numéricas.

Para la simulación de las vigas Rilem de HRF la cantidad de fibras en la dirección axial se obtuvo contando las fibras en la sección central de los especímenes luego de haber sido ensayados. Esta cantidad estuvo muy cerca al 40% del total de fibras, cantidad teórica sugerida por otros investigadores (Torrijos, 2008).

Las propiedades mecánicas de las fibras de acero se muestran en Tabla 3. Para definir el comportamiento de endurecimiento de las fibras en la dirección axial se usaron ensayos de extracción de fibras (pull-out tests). En Figura 3 se muestran gráficos promedio carga-desplazamiento de ensayos de extracción de fibras diámetro  $d = 1\text{mm}$  y longitud  $l = 50\text{mm}$  de dos tipos de matriz: un hormigón de resistencia normal (Isla, et al., 2010) y uno de alta resistencia (Isla, et al., 2012).

En Figura 2(b) se muestra una comparación de resultados experimentales y numéricos de flexión de vigas de HRF con dos dosificaciones de fibras ( $30\text{kg/m}^3$  y  $60\text{kg/m}^3$ ). Allí se puede ver que mientras la respuesta numérica de las vigas con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras se ajusta a la respuesta experimental, la respuesta numérica de las vigas con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras se encuentra por debajo de la experimental. Sin embargo la respuesta numérica si es capaz de reproducir el endurecimiento en flexión haciendo evidente el cambio marcado producido por el incremento en la cantidad de fibras.

Tabla 2: Propiedades hormigón simple.

Propiedades	Hormigón	
	Normal	Alta
Módulo de elasticidad E [MPa]	24010	41500
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.2	0.2
Resistencia última a compresión $\sigma_{uc}$ [MPa]	26.3	95.3
Umbral fluencia uniaxial en comp. $\sigma_{fc}$ [MPa]	18.0	67.0
Relación de resistencia inicial (comp./trac.) $R^{0p}$	7.0	22.5
Relación resistencia (equibiaxial/uniaxial) compresión $R^{bc}$	1.16	1.16
Parámetro controlador del plano octahédrico (Luccioni y Rougier, 2005) $\gamma$	3.5	3.5
Variable de endurecimiento plástico para la tensión pico en compresión $\kappa_{comp}^p$	0.15	0.15
Energía de fractura $G_f$ [MPa.mm]	0.08	0.125
Energía de aplastamiento $G_c$ [MPa.mm]	6.6	10.6



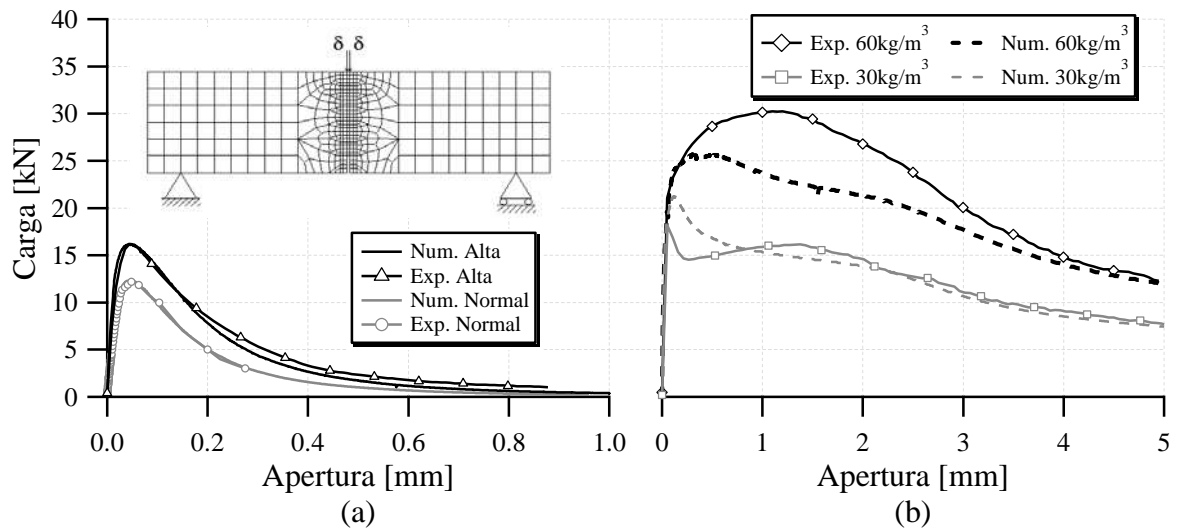


Figura 2: Resultados experimentales y numéricos. a) Vigas de hormigón simple. b) Vigas de HRF.

Tabla 3: Propiedades de las fibras.

Propiedades	Normal	High
Módulo de elasticidad $E_{xx}$ [MPa]	50000	60000
Coefficiente de Poisson $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{zy} = \nu_{yz}$	0.2	0.2
Módulo de elasticidad $E_{yy} = E_{zz}$ [MPa]	500	600
Coefficiente de Poisson $\nu_{yx} = \nu_{zx}$	0.002	0.002
Resistencia última arrancamiento dirección x $\sigma_{utx}$ [MPa]	521.3	820.3
Tensión umbral de fluencia $\sigma_{fx}$ [MPa]	457.1	749.6
Slipping threshold ratio $\sigma_{fx}/\sigma_{fy} = \frac{\sigma_{fx}}{\sigma_{fz}}$	0.01	0.01

X es la dirección axial de las fibras

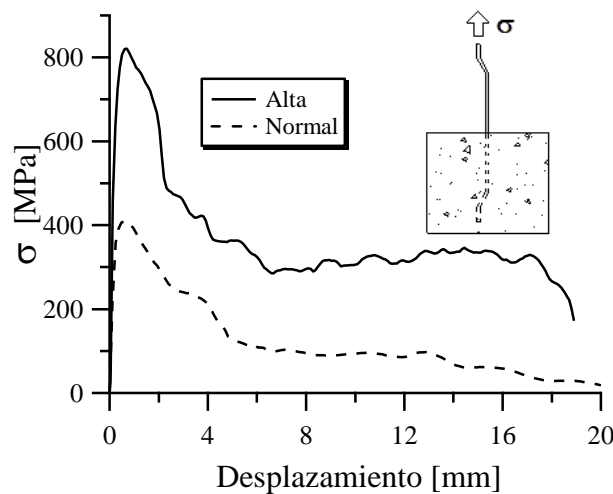


Figura 3: Curvas de arrancamiento experimentales. Respuestas promedio hormigón alta resistencia (Isla, et al., 2012) y resistencia normal (Isla, et al., 2010).

## 5 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE VIGAS

En esta sección se presentan los detalles de la simulación numérica de las vigas de HA. La simulación de las vigas se realizó con el mismo programa usado en la sección 4 en versión 2D y 3D. Se realizó la simulación de las vigas de hormigón armado, de las vigas reforzadas y el proceso completo de ensayo, reparación y nuevo ensayo. Para ello se desarrolló un algoritmo especial que permite reproducir el proceso completo.

Las simulaciones en 3D brindan mayor detalle y sirven para estudiar gran cantidad de problemas, sin embargo son costosas en tiempo computacional. Por eso se presenta como herramienta aproximada práctica y útil para el estudio y diseño de refuerzos y reparaciones de estructuras de hormigón con HRF las simulaciones en 2D.

La herramienta numérica es útil para el estudio y diseño de refuerzo y reparación con HRF.

### 5.1 Mallas 2D y 3D

En la Figura 4 se muestra la malla 2D, se usaron elementos de 50x50mm, de 4 nodos y 2x2 puntos de Gauss en estado de tensiones planas. La viga corresponde a una simplemente apoyada a la cual se aplicaron incrementos de desplazamiento en el tercio de la luz. Se pueden distinguir cuatro bandas cada una correspondiente a un material compuesto. Los materiales se describen en Tabla 4 y se pueden distinguir los correspondientes a las vigas de HA y a las reforzadas/reparadas. Para las vigas sin encamisado la banda inferior no existe y los apoyos se encuentran en la parte baja del material 2. La teoría de mezclas fue usada tanto para representar al HRF como para los demás materiales compuestos. Además en Tabla 4 se indican las proporciones de los materiales compuestos.

Tabla 4: Materiales usados en malla 2D, proporciones. Vigas de HA y vigas reforzadas/reparadas.

Material Compuesto		Componentes					
Material N°	Descripción	Hormigón %	Acero. transv. %	Acero. long. %	HRF		
					H° %	Fibra x %	Fibra y %
1HA	Centro	0.997	0.003	0.0	0.0	0.0	0.0
2HA	Inferior	0.917	0.003	0.08	0.0	0.0	0.0
3HA	Superior	0.9836	0.003	0.0134	0.0	0.0	0.0
4HA	Encamisado	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1Ref./Rep.	Centro	0.7121	0.0021	0.0	0.2835	0.0011	0.0011
2 Ref./Rep.	Inferior	0.6550	0.0021	0.0571	0.2835	0.0011	0.0011
3 Ref./Rep.	Superior	0.7026	0.0021	0.0096	0.2835	0.0011	0.0011
4 Ref./Rep.	Encamisado	0.0	0.0	0.0	0.9924	0.0038	0.0038

HA: Hormigón Armado (sin encamisado), Ref./Rep.: Reforzada/Reparada

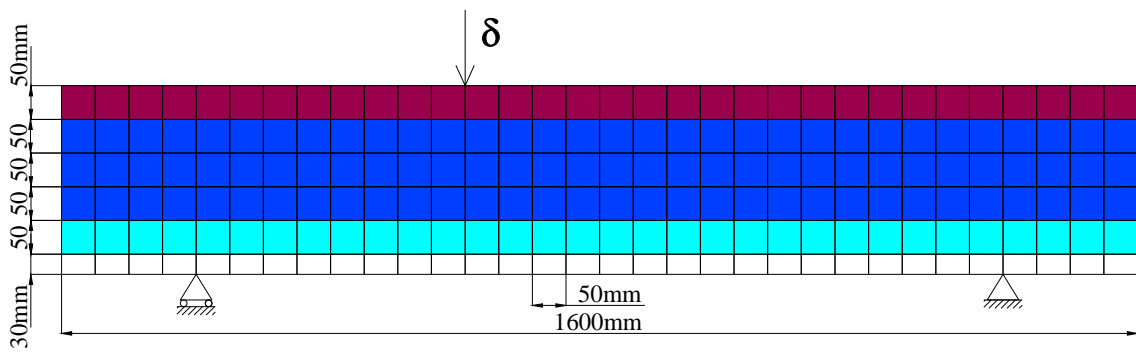


Figura 4: Malla 2D y materiales.

En Figura 5 es posible ver las mallas 3D usadas en la simulación tridimensional. Se distinguen dos casos. Uno correspondiente a las vigas sin refuerzo y otro, basado en el anterior, que además incorpora el encamisado y corresponde a las vigas reforzadas. Gracias a la simetría longitudinal del ensayo es posible modelar solamente la mitad de la viga como se indica en el esquema de Figura 5. Se utilizaron elementos hexaédricos de 8 nodos y 8 puntos de integración. En la Figura 5 se pueden ver además las condiciones de apoyo, simetría y los ejes globales. La simulación supone una viga simplemente apoyada con aplicación de incrementos de desplazamientos en el tercio de la luz. Para modelar solo la mitad longitudinal de la viga se colocaron restricciones horizontales en los nodos en coincidencia con el eje de simetría.

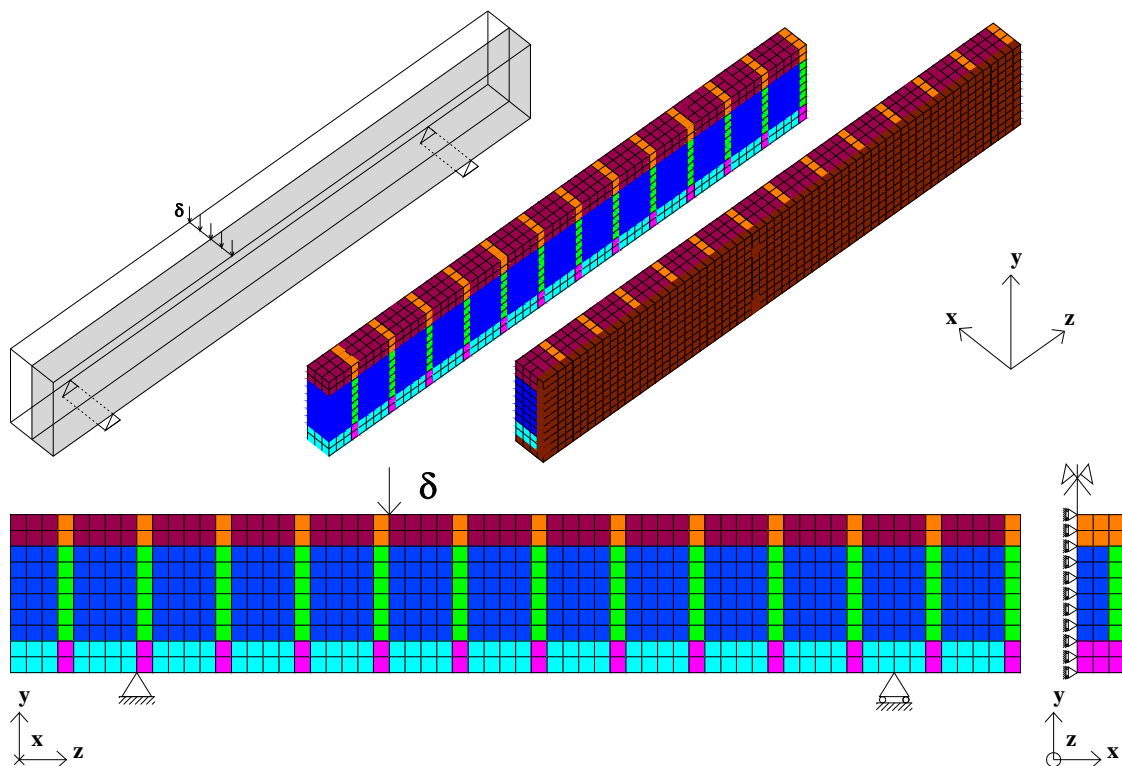


Figura 5: Malla y materiales usados en simulación 3D.

En Tabla 5 se pueden ver las proporciones de materiales usados en la simulación de las vigas sin refuerzo y, para el caso de las vigas reforzadas, la proporción de materiales del encamisado de HRF con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras. Se distinguen los materiales compuestos y las proporciones de cada material simple, esto es hormigón, acero transversal y acero longitudinal. También, entre paréntesis, se especifica la dirección en que trabaja cada acero. En el caso de las fibras, debido al reducido espesor del refuerzo se consideró que en los laterales, no había fibras en la dirección x, la mitad de las fibras estaba dispuesta en la dirección vertical (y) y la otra mitad en la dirección axial de la viga (z) como se indica en la última fila de la Tabla 5. En el caso del refuerzo inferior las fibras estaban dispuestas en iguales proporciones pero en las direcciones (x) y (z).

Tabla 5: Proporción de materiales usados en simulación de vigas sin refuerzo y reforzadas, malla 3D.

Material Compuesto		Materiales Simples		
Nº	Descripción	% Hormigón	% A° Transv.	% A° Long.
1	As verticales	0.954784	0.045216 (y)	-
2	Hormigón	1.0	-	-
3	As horiz. inferior	0.897012	0.022608 (y)	0.08038 (z)
4	As Inferior	0.91962	0.0 (y)	0.08038 (z)
5	As horiz. superior	0.9639947	0.022608 (y)	0.0133973 (z)
6	As Superior	0.9866027	0.0 (y)	0.0133973 (z)
7	HRF	0.9923567	0.0038217 (fibra y)	0.0038217 (fibra z)

## 5.2 Algoritmo de reparación

Para las vigas reparadas se utilizó un proceso evolutivo con dos etapas. La primera corresponde a las vigas de HA y la segunda a las vigas reparadas. En la primera etapa los materiales componentes del HRF tienen participación volumétrica nula. El HRF es activado en la segunda etapa a la vez que todas las proporciones de los materiales varían para dar lugar a los materiales nuevos de reparación. De esta forma los materiales de reparación no contribuyen sino hasta la segunda etapa. De una etapa a la otra también se modifica el ancho de la viga. En la segunda etapa la viga está formada por los materiales dañados provenientes de la etapa anterior (hormigón y acero) más los nuevos materiales del encamisado. En ambas etapas se usa la misma malla pero para la segunda etapa se inician los materiales del encamisado inferior. Además en la segunda etapa se reinician los desplazamientos. Si bien al finalizar el primer ensayo las vigas presentaban deformaciones permanentes durante el segundo ensayo los desplazamientos fueron medidos respecto del eje de la viga reparada. Las variables internas de los materiales de la primera etapa se reinician, excepto la correspondiente a la variable de endurecimiento plástico, la cual se conserva para representar el daño sufrido por el hormigón y el acero en barras.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 Vigas de hormigón armado con estribos

En Figura 6 se puede ver la respuesta numérica 3D y comparación con los resultados individuales y promedios de las vigas de HA que luego fueron reparadas. Se puede ver que la simulación numérica reproduce con precisión la rigidez global y es cercana a la respuesta promedio de las vigas. Sin embargo debe destacarse que los ensayos de estas vigas mostraron gran dispersión. Entre los investigadores está generalmente aceptado que el mecanismo de corte en estructuras de HA es complejo y difícil de reproducir numéricamente. Las dificultades podrían atribuirse a las diversas contribuciones presentes en el mecanismo de corte, el estado de tensiones multiaxial y la marcada no linealidad que caracteriza la fisuración diagonal (Ferreira, et al., 2013). Es interesante destacar que en estas vigas la respuesta post pico no lineal es debida principalmente al comportamiento en ablandamiento del hormigón porque al final de la simulación las barras de armadura aún poseen mucha capacidad de disipación de energía.

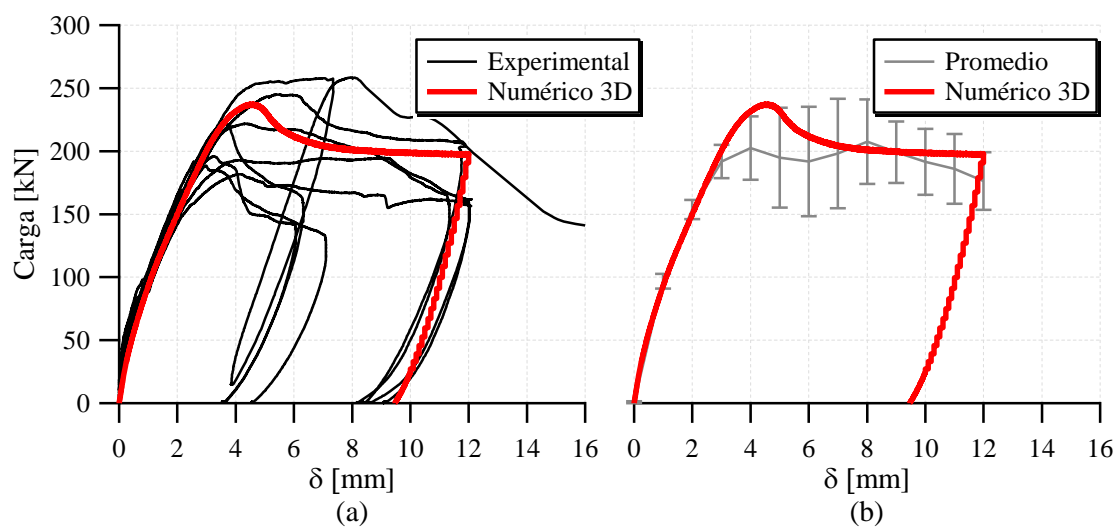


Figura 6: Curvas carga-desplazamiento vigas con estribos sin refuerzo. Comparación de resultados numéricos y experimentales.

### 6.2 Vigas de hormigón armado sin estribos sin refuerzo

En Figura 7 se puede ver la simulación 3D y comparación con resultado experimental de la viga sin estribos y sin refuerzo. Se puede ver que el modelo reproduce bien la rigidez pero sobreestima la carga máxima. El modelo numérico reproduce el pico de carga, este se forma pues el hormigón no es capaz de mantener cargas y se obtiene una rotura frágil ya que ha disipado casi toda la energía disponible. Se recuerda que para desplazamientos mayores a 2mm experimentalmente la viga se había dividido en dos bloques unidos por la armadura inferior y superior que es el que continúa resistiendo la carga. Ese mecanismo no se puede reproducir con el modelo continuo utilizado.

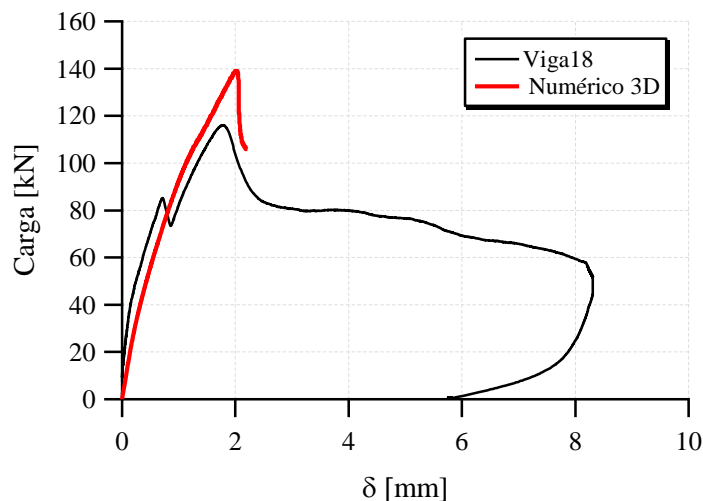


Figura 7: Curvas carga-desplazamiento vigas sin estribos sin refuerzo. Comparación de resultados numéricos y experimentales.

### 6.3 Evaluación de tensiones en planos de unión hormigón/HRF

Mediante la simulación numérica en 3D de las vigas ensayadas se pueden evidenciar los valores de las tensiones en los planos de contacto entre los materiales de base y de refuerzo. En Figura 8 se muestran mapas de colores de las tensiones de corte  $\sigma_{yz}$  (tensiones de corte de la viga) en el hormigón de la viga y en el hormigón de alta resistencia del encamisado. En la misma figura se muestra la posición de elementos tomados como control para los cuales se evaluaron las tensiones de corte en el plano de adherencia. En Figura 9 se muestran las tensiones de corte de adherencia y como comparación las de la viga de los materiales hormigón de vigas y hormigón de alta resistencia de encamisado.

Si se compara la máxima resultante de las tensiones tangenciales en el plano de interfaz se puede ver que esta llega a un máximo de 4,5Mpa que es bastante menor que la resistencia al corte especificada por el fabricante del puente de adherencia usado en los ensayos que es de 13Mpa. Esto garantiza, en condiciones ideales, que el refuerzo de HRF no se desprege del sustrato de hormigón existente.

Este cálculo se realizó previo a los ensayos para asegurar que no era necesario usar medios adicionales para fijar el refuerzo de HRF a las vigas.

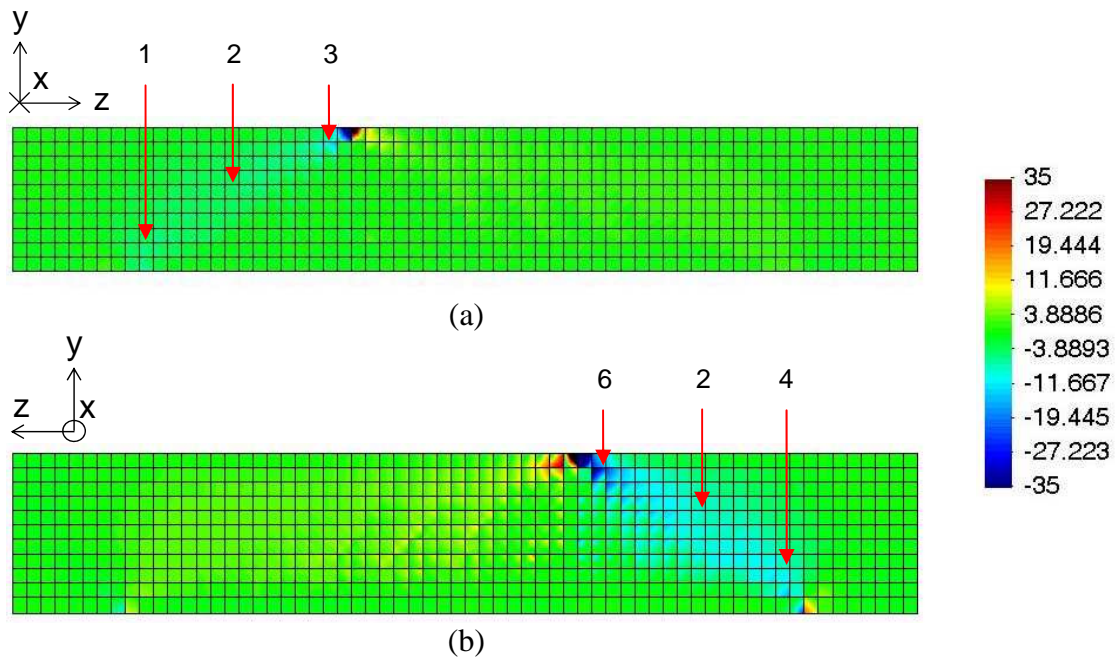


Figura 8: Tensiones de corte  $\sigma_{yz}$  viga con estribos reforzada con HRF con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras correspondientes a carga máxima. (a) Hormigón vigas. (b) HRF encamisado.

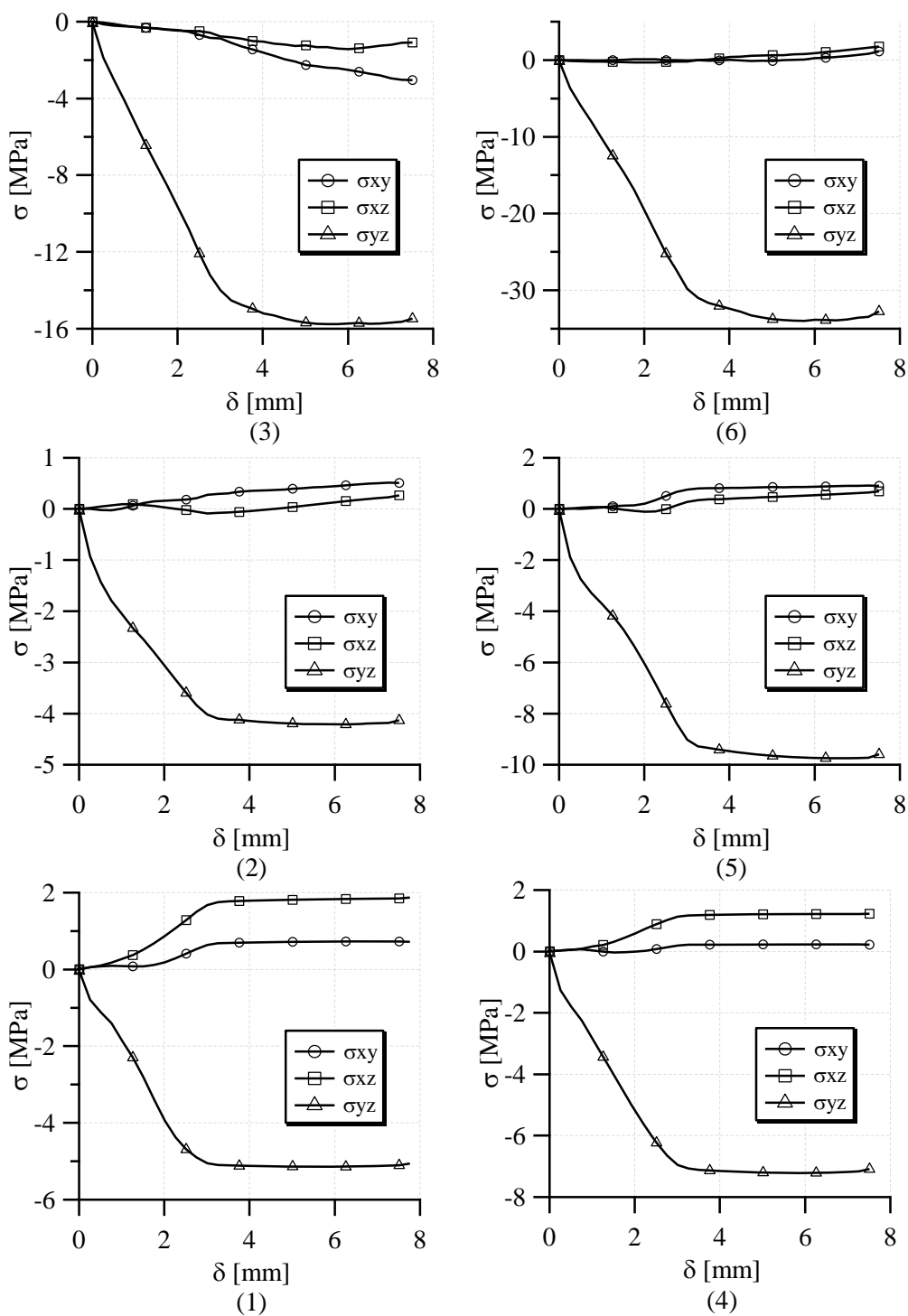


Figura 9: Tensiones de corte en viga reforzada con HRF con 60kg/m<sup>3</sup> de fibras. (1), (2) y (3) tensiones en hormigón de viga de hormigón armado. (4), (5) y (6) tensiones en hormigón de encamisado de HRF.



## 6.4 Vigas reparadas

A continuación se presentan simulaciones realizadas con la herramienta 2D.

En Figura 10 se puede ver la respuesta numérica 2D del primer ensayo de las vigas de HA que fueron reparadas. En la comparación se incluyeron solo los resultados de las vigas que fueron ensayadas hasta mayor desplazamiento. Se puede ver que la respuesta numérica se aproxima a la experimental promedio.

En Figura 11 se puede ver la respuesta numérica y comparación con la respuesta experimental de las vigas reparadas para todos los materiales de reparación usados. Se puede ver la respuesta numérica promedio de las vigas de hormigón armado agrupadas según material con que fueron posteriormente reparadas. Además se muestran las respuestas individuales de las vigas reparadas. La mayoría de las vigas reparadas alcanzaron mayor carga que en el primer ensayo. En los ensayos las vigas reparadas con HRF con  $60 \text{ kg/m}^3$  de fibras (Figura 11 (c)) se obtuvo la mayor diferencia entre el primer ensayo y el reparado. Debe notarse, sin embargo, que esa diferencia podría deberse a que en el primer ensayo esas vigas fueron hasta un desplazamiento último menor que el resto de las vigas. Considerando valores medios se puede concluir que las vigas reparadas alcanzaron mayores valores en carga y que la resistencia promedio se incrementó al aumentar el contenido de fibras del encamisado de HRF.

En Figura 11 (a) se muestra la respuesta carga-desplazamiento de las vigas reparadas con hormigón simple. En general las curvas de respuesta de estas vigas presentan caídas de carga debidas al despegue de la capa de encamisado. La respuesta numérica se encuentra sobre la experimental ya que no se consideró el despegue de la capa de reparación. En Figura 11 (b) se muestra la respuesta de las vigas reparadas con HRF con  $30 \text{ kg/m}^3$  de fibras. Las vigas reparadas mostraron buena restitución de la rigidez y la resistencia inicial fue superada en todos los ensayos. La respuesta numérica se encuentra entre las curvas experimentales. En Figura 11 (c) se muestra la respuesta de las vigas reparadas con HRF con  $60 \text{ kg/m}^3$  de fibras. La rigidez y resistencia de las vigas reparadas con este material fue restituida e incluso superada. A pesar de que se puede reproducir numéricamente la carga máxima se observan diferencias en la rigidez inicial y la carga post-pico.

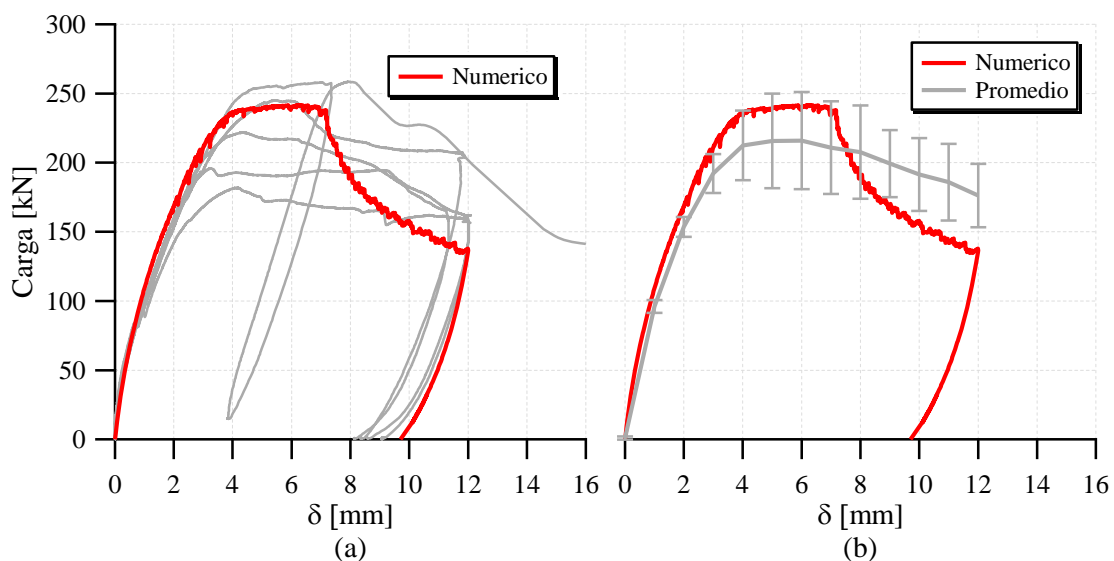


Figura 10: Vigas de HA, respuesta experimental y numérica. (a) Ensayos individuales. (b) Respuesta media.

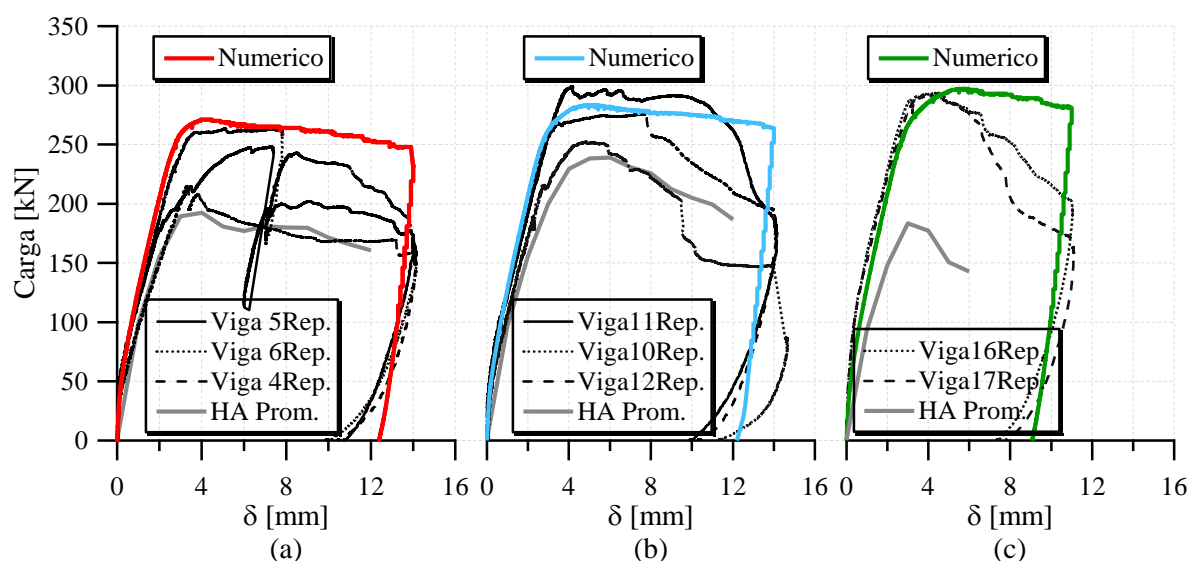


Figura 11: Vigas reparadas. (a) Hormigón simple. (b) HRF con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras. (c) HRF con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras.

## 6.5 Vigas reforzadas con HRF

En Figura 12 se puede observar la respuesta de las vigas reforzadas y comparación con la simulación numérica. Se muestra, como comparación, la respuesta promedio y desviación estándar experimental de las vigas sin refuerzo. Se puede observar que en casi todos los casos la resistencia de las vigas reforzadas supera a la de las que no poseen refuerzo.

La Figura 12(a) muestra la respuesta de las vigas reforzadas con hormigón simple. Para este caso con vigas similares se obtuvieron respuestas diferentes. De hecho, la viga 1 presentó despegue del material de encamisado mientras que en la viga 2 no ocurrió. Ya que el presente modelo no reproduce despegue la respuesta numérica es cercana a la de la viga 2. En Figura 12(b) se muestra la respuesta carga-desplazamiento de las vigas reforzadas con HRF con  $30\text{ kg/m}^3$  de fibras. Se puede ver que la respuesta numérica reproduce los datos experimentales y sobreestima levemente la carga máxima alcanzada. En Figura 12(c) se muestra la respuesta carga-desplazamiento de las vigas reforzadas con HRF con  $60\text{ kg/m}^3$  de fibras. Se puede ver que la respuesta numérica se asemeja a la de la viga que más resistió.

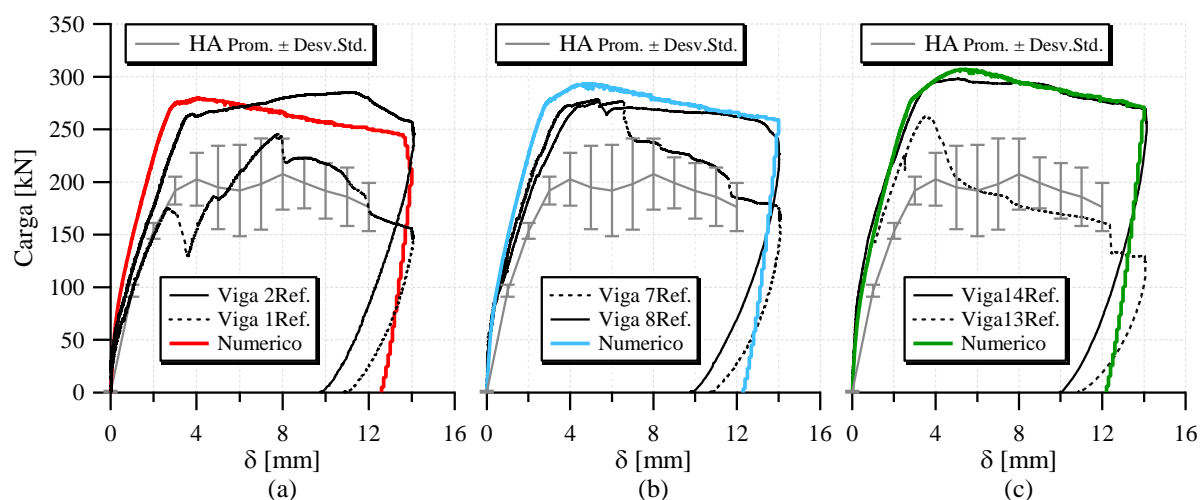


Figura 12: Vigas reforzadas. (a) Hormigón simple. (b) HRF con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras. (c) HRF con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras.

## 7 ALTERNATIVAS DE REFUERZO/REPARACIÓN

En esta sección se estudia numéricamente el efecto de diferentes variables del encamisado de HRF en el comportamiento de vigas reforzadas/reparadas.

Como alternativas de refuerzo de las vigas se estudió numéricamente el cambio de la respuesta variando el espesor del encamisado. Se utilizaron espesores de 20mm, 30mm y 40mm. Las proporciones de fibras usadas corresponden a las de la campaña experimental, es decir  $30\text{kg/m}^3$  y  $60\text{kg/m}^3$  de fibras.

En Figura 13 se puede ver la respuesta de vigas reforzadas con HRF. Como era de esperar, con el aumento del espesor del encamisado se obtiene mayor carga máxima. Además para refuerzos con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras se obtiene mayor capacidad de carga que con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras.

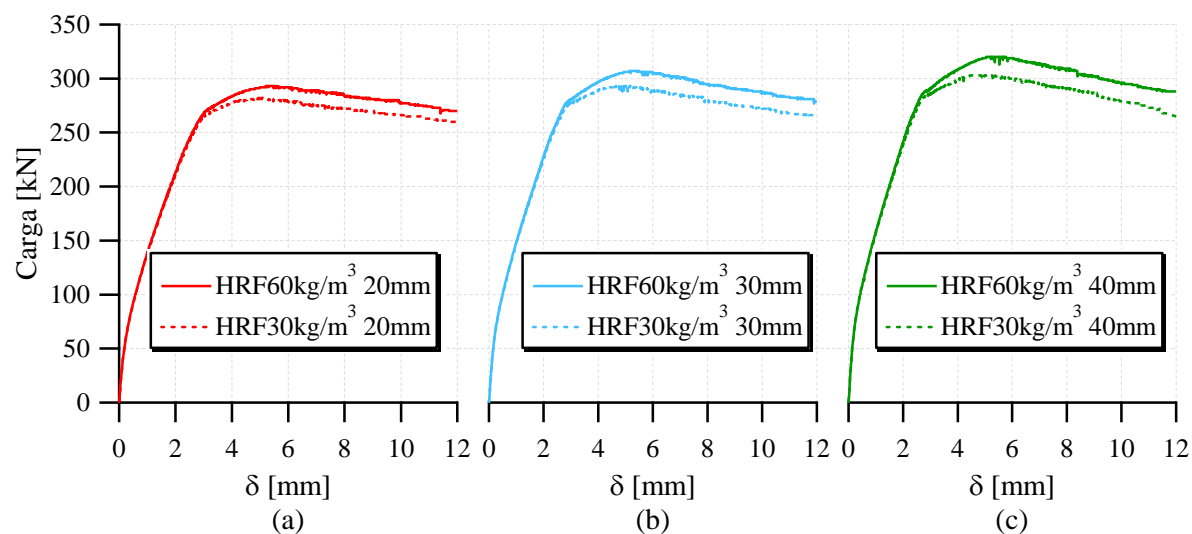


Figura 13: Efecto del espesor del encamisado. (a) HRF con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras. (b) HRF con  $60\text{kg/m}^3$  de fibras.

Además se estudió numéricamente el cambio de la respuesta variando la calidad del hormigón usado en el encamisado. Se utilizó espesor de 30mm constante y los dos contenidos de fibras usados en la campaña experimental, es decir  $30\text{kg/m}^3$  y  $60\text{kg/m}^3$  de fibras. Con el cambio de resistencia de la matriz se modifican las propiedades del hormigón y la curva de arrancamiento de las fibras que es la correspondiente a un hormigón de dicha calidad (Isla, et al., 2010).

En Figura 14 se puede ver la respuesta de vigas reforzadas con HRF. Con mejora de resistencia del material se obtiene aumento de la carga máxima y para contenido de fibra de  $60\text{kg/m}^3$  se obtuvieron respuestas de mayor carga que las con  $30\text{kg/m}^3$  de fibras.

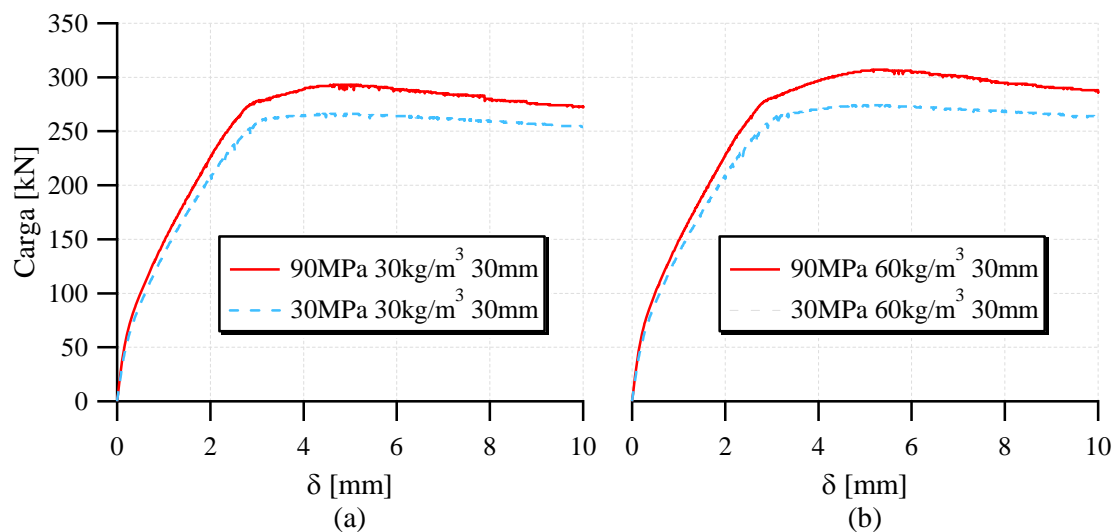


Figura 14: Diferente calidad de hormigón de encamisado.

Además se estudió la respuesta de otra alternativa de refuerzo. Se consideró el refuerzo de las vigas realizando encamisado solo en los laterales de las vigas no en la base. Esto se realizó quitando los materiales de la base y usando la malla usada para reproducir los ensayos de vigas sin refuerzo. La respuesta obtenida fue casi coincidente con la obtenida para la configuración de refuerzo de los ensayos.

El caso de las vigas ensayadas que fueron reparadas es diferente pues estas presentan fisuras en caras laterales y fondo por lo que es necesario un encamisado alrededor de las mismas para hacer efectiva la reparación. Como alternativa se estudió la respuesta de una viga reparada en laterales y fondo pero solo en la mitad de la longitud del lado donde se aplica la carga. Esta simulación muestra resultados muy próximos a los correspondientes a una viga reparada en toda su longitud. Esto indica una alternativa para ahorrar materiales y peso que debiera compatibilizarse con factores de tipo estético.

## 8 CONCLUSIONES

En este trabajo se simulan vigas de hormigón armado y vigas reforzadas y reparadas con HRF ensayadas a corte. Se usó una forma simple para modelar el hormigón reforzado con fibras. Del trabajo presentado se pueden extraer las siguientes conclusiones:

La forma de tener en cuenta la contribución de las fibras considerando ensayos de arrancamiento de fibras es simple y permite un buen ajuste con los ensayos de caracterización material. Para mejorar las simulaciones de los ensayos de caracterización y las vigas podrían usarse ensayos de extracción de fibras con diferente inclinación y una distribución y

orientación de fibras más detallada.

La simulación de las vigas de hormigón armado mostró que la respuesta post-pico es fuertemente dependiente del hormigón ya que el acero de las armaduras tiene mucha capacidad de disipación de energía.

La simulación tridimensional de la viga sin estribos sin refuerzo reproduce la forma de rotura experimental pero sobreestima la carga máxima. Permite el estudio del mecanismo de trabajo y evidencia la fragilidad del espécimen atribuible al comportamiento del hormigón que no es capaz de soportar más carga.

La simulación tridimensional de las vigas reforzadas permite cuantificar los valores de las tensiones de corte en la zona de contacto entre los hormigones.

El método desarrollado para reproducir el proceso completo de daño y reparación de las vigas permite considerar los cambios sufridos por los materiales correspondientes a la primera etapa y representar objetivamente su comportamiento en la segunda etapa. Se logra entender el comportamiento de la estructura y buenas estimaciones en carga máxima. Resulta entonces una herramienta útil para el diseño y predicción del comportamiento de vigas reforzadas/reparadas.

Las simulaciones de las vigas reforzadas se adecuan a los ensayos, logran mostrar los cambios en la etapa post-pico y son sensibles a los contenidos de fibras.

Las simulaciones hechas considerando diferentes espesores de encamisado muestran que el comportamiento del conjunto no varía radicalmente, por lo que para definir un espesor práctico deberán considerarse también aspectos como condiciones de colocación en obra, costos y masa total adicional para la estructura.

El despegue del material de encamisado no fue simulado pero podría tenerse en cuenta de una forma similar a la del modelo constitutivo de las fibras considerando la deformación transversal del hormigón compuesta por la deformación del HRF más la deformación de la interfaz.

Para reproducir mejor la curva carga-desplazamiento completa (rigidez y capacidad de carga) será necesario considerar degradación de rigidez del hormigón y deslizamiento de la armadura en barras.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán (CIUNT), a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y al Consejo Nacional de Investigaciones Científico Técnicas (CONICET) por el apoyo económico recibido. Además agradecen especialmente a las firmas: Tensolite S.A. que realizó el hormigonado y curado de las vigas sin refuerzo, a Cemento Avellaneda S.A. que proveyó el cemento utilizado para el hormigón de reparación y refuerzo y a Maccaferri de Argentina S.A. que proveyó las fibras de acero para los ensayos.

## BIBLIOGRAFÍA

Altun, F., Haktanir, T. y Ari, K., Effects of steel fiber addition on mechanical properties of concrete and RC beams. *Construction and Building Materials*, 21: 654-661, 2007.

ASTM C 39, 86, Test method for compressive strength of cylindrical concrete specimens. *Annual book of ASTM standards*, 04.02 Concrete and Agregates (Section 4 Construction), 1986.

ASTM C 469, Standard test method for static modulus of elasticity and Poisson's ratio of

concrete in compression. *Annual book of ASTM standards*, 04.02 Concrete and Agregates.(Section 4 Construction) 1987.

Betten, J., Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4: 29-46, 1988.

Blanco, A. , Pujadas P., de la Fuente A., Cavalaro S., Aguado A., Application of constitutive models in European codes to RC-FRC. *Construction and Building Materials*, 40: 246–259, 2013.

Ferreira, D., Bairán, J. y Marí, A., Numerical simulation of shear-strengthened RC beams. *Engineering Structures*, 46: 359–374, 2013.

Iskhakov, I., Ribakov, Y., Holschemacher, K. y Mueller, T., High performance repairing of reinforced concrete structures. *Materials and Design*, 44: 216–222, 2013.

Isla Calderón, A. y Luccioni, B., Modelo para hormigones reforzados con fibras. *ENIEF 2008* , 2008.

Isla, F. A., Luccioni, B., Isas Pedraza, R. D. y Sfer, D., Arrancamiento de fibra de acero en matriz de hormigon. *XXXIV Jornadas sudamericanas de Ingeniería Estructural*, Septiembre-Octubre, 2010.

Isla, F., Isas, R., Ruano, G. y Luccioni, B., Efecto de la orientación y del confinamiento en el ensayo de extracción de fibras. *XXXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural*, 2012.

Lubliner, J., On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Mechanics. *Int. Journal Non Linear Mechanics*, 7: 237-254, 1972.

Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E., A plastic damage model for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 3(25): 299-326, 1989.

Luccioni, B. y López, D. E., Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras. *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*, 411-431, 2002.

Luccioni, B. M., López, D. E. y Danesi, R. F., Bond-Slip in Reinforced Concrete Elements. *Journal of structural engineering*, 131(11): 1690-1698, 2005.

Luccioni, B., Oller, S. y Danesi, R., Coupled plastic damage model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 129: 81-89, 1996.

Luccioni, B. y Rougier, V. A plastic damage approach for confined concrete. *Computer y Structures*, 83: 2238-2256, 2005.

Luccioni B., Ruano G., Isla Calderón F., Zerbino R., Giaccio G., A simple approach to model SFRC. *Construction y Building Materials*, 37: 111-124, 2012.

Nanni, A., A New Tool for Concrete and Masonry Repair: Strengthening with fiber-reinforced cementitious matrix composites. *Concrete international*, 34(4): 43-49, 2012.

Obaidat Y. T., Heyden S., Dahlblom O., Abu-Farsakh G., Abdel-Jawad Y., Retrofitting of reinforced concrete beams using composite laminates. *Construction and Building Materials*, 25: 591–597, 2011.

Oller, S., Un modelo de Daño Continuo para materiales Friccionales, Ph.D. Thesis. *Universitat Politecnica de Catalunya, Escola Técnica Superior D'Ingenyers de Camins, Canals I Ports*, 1988.

Park, R. y Paulay, T., Reinforced concrete structures, 1975.

Rilem TC 162-TDF, Test and design methods for stel fibre reinforced concrete. *Materials and Structures*, 35: 579-582, 2002.

Rougier, V. C. y Luccioni, B. M., Numerical assessment of frp retrofitting systems for reinforced concrete elements. *Engineering Structures*, 29: 1664-1675, 2007.

Shah, A. A. y Ribakov, Y., Recent trends in steel fibered high-strength concrete. *Materials and Design*, 32: 4122–4151, 2011.

Swaddiwudhipong, S. y Seow, P. E. C., Modelling of steel fiber-reinforced concrete under

multi-axial loads. *Cement and Concrete Research* , 36: 1354–1361, 2006.

Torrijos, M. C., Mesoestructura, comportamiento mecánico y propiedades de transporte en hormigón. *Tesis presentada para el grado de doctor en ingeniería*, Septiembre 2008.

Truesdell, C. y Toupin, R., The classical field theories. *Handbuch der Physik*, 1960.