

## IMPLEMENTACION DE CONDICIONES DE CONTORNO BASADAS EN CARACTERISTICAS A UN ESQUEMA DE VOLUMENES FINITOS DE HARTEN YEE CON INTEGRADOR IMPLICITO

Andrés M. Cimino<sup>a,b</sup>, Andrea Costa<sup>a,b,c</sup> y Sergio A. Elaskar<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Cordoba*

<sup>b</sup>*CONICET*

<sup>c</sup>*Instituto Astronómico Teorico Experimental IATE-CONICET*

**Palabras Clave:** Euler, Volúmenes Finitos, Harten Yee, Condiciones de Contorno

**Resumen.** En el presente trabajo combinamos un modelo de condiciones de contorno basadas en características con un esquema numérico para las ecuaciones de Euler unidimensionales. Dicho modelo tiene en cuenta efectos de variación de área y términos fuente en las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía. Empleamos el esquema numérico de Variación Total Disminuida (TVD) de Harten Yee, con un integrador temporal implícito apropiado para conservar la propiedad TVD. Partiendo de soluciones analíticas estacionarias e inestacionarias de problemas conocidos en la literatura comparamos la precisión de las soluciones obtenidas para distintos tipos de modelos de condiciones de contorno basados en características contra condiciones de contorno convencionales (extrapoladas). Además estudiamos los efectos del empleo de dichos modelos de condiciones de contorno en la velocidad de convergencia para las soluciones estacionarias.

## 1. INTRODUCCION

En ciertos problemas de la dinámica de fluidos es necesario incluir términos fuente al sistema de leyes de conservación para modelar ciertos efectos, como la fuerza gravitatoria, la conducción de calor o algún otro efecto no relacionado con la convección. A su vez, la solución de ciertos problemas suele ser fuertemente dependiente de los valores de las condiciones de contorno. El presente trabajo fue motivado por un problema astrofísico, en el que se le agregan términos fuente a la ecuación de cantidad de movimiento y a la ecuación de la energía. Debido a la naturaleza de los términos fuente el sistema de ecuaciones en ciertas ocasiones se volvía rígido (stiff), lo que hizo necesario implementar un esquema de integración implícito. Además, cuando fue necesario obtener soluciones estacionarias vimos que el algoritmo no convergía a la solución físicamente correcta debido a oscilaciones en el contorno. Por esta razón, decidimos implementar un esquema de condiciones de contorno basado en características, de manera tal que el esquema pudiera captar de manera precisa efectos físicos que se producen desde los contornos hacia el interior del dominio, así como ser capaz de converger a un estado estacionario si la solución física así lo requiere.

## 2. ECUACIONES DE EULER CON TERMINOS FUENTE

El sistema de ecuaciones de Euler es un problema de valor inicial y de contorno (IBVP) que describe la dinámica de un fluido compresible en ausencia de viscosidad a través de tres leyes de conservación. Estas son la ley de conservación de la masa, la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal, y la ley de conservación de la energía.

Siendo  $\rho$ ,  $u$  y  $p$  la densidad, velocidad y presión respectivamente, e introduciendo la definición de energía total  $e_t(t, x)$  como la suma de la energía interna y energía cinética por unidad de volumen:

$$e_t = e_i + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (1)$$

el problema de valores iniciales para el sistema hiperbólico de las ecuaciones de Euler en un dominio  $\Omega$  puede ser escrito en la forma compacta como ley de conservación vectorial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F}) &= \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{U}(t = 0, \mathbf{x}) &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{U}$  es el vector de variables conservativas,  $\mathbf{F}$  es el vector de flujos a través de las interfases, y  $\mathbf{S}$  el vector de términos fuente. Sus componentes son:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e_t + p) u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Una ecuación de estado (EOS) dada por relaciones termodinámicas provee la ecuación adicional necesaria para la clausura del sistema. Si se considera en todos los casos que el fluido es una mezcla de gases térmicamente perfectos, puede emplearse la ecuación de estado calórica:

$$e_i = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \quad (4)$$

donde  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  es el exponente isoentrópico para el gas o mezcla de gases considerados.

En caso que el dominio unidimensional considerado posea una sección variable  $A(x)$  que sólo sea función de  $x$ , se modifica el sistema de leyes de conservación como se indica a continuación (Hoffmann y Chiang, 2000).

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho A u \\ e_t A \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho A u \\ \rho A u^2 + p A \\ (e_t A + p A) u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 3. ESQUEMA NUMERICO

#### 3.1. Discretización en Volúmenes finitos

En el esquema de volúmenes finitos, se discretiza el dominio  $\Omega$  del problema en un número finito  $N$  de celdas  $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), y se asume que las variables conservativas toman un valor constante dentro de cada celda, que se va actualizando conforme se avanza en el tiempo.

De esta manera la forma integral de una ley de un sistema conservativo con fuentes, dada por la ec. (2) puede escribirse para cada celda  $\Omega_i$  en la forma discreta como:

$$\frac{\Delta \mathbf{U}_j}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{S}(\mathbf{U})_j \quad (6)$$

donde  $\Delta x = x_{j+1} - x_j > 0$ ,  $\mathbf{U}$  es el vector de variables de estado, y  $\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}$  es una función de flujo numérico, evaluada en la interfase de dos celdas contiguas, que debe aproximar de forma discreta la función de flujo del sistema hiperbólico continuo. Dicha función debe ser consistente con el flujo del sistema continuo, y además debe cumplir con otras propiedades matemáticas para garantizar la estabilidad y convergencia del esquema. Este sistema de ecuaciones se integra luego en el tiempo mediante un método numérico, que puede ser implícito o explícito.

#### 3.2. Método TVD de Harten-Yee

Harten (1983) diseñó un flujo numérico de segundo orden para leyes de conservación escalares de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (7)$$

De tal manera que la variación total de la solución, definida como:

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (8)$$

no aumente en el tiempo

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (9)$$

El flujo numérico de Harten permite obtener el segundo orden de resolución a través de una función limitadora, que introduce viscosidad numérica en zonas cercanas a discontinuidades. De esta manera, el flujo numérico se convierte en uno de primer orden cerca de las discontinuidades, lo que elimina la posibilidad de que existan oscilaciones. En las regiones más lejanas permite mantener el segundo orden de resolución.

Yee (1987) introdujo una modificación en el flujo de Harten para volverlo más flexible en la elección de la función limitadora a emplear y lograr que sea menos difusivo. Dicho flujo modificado se conoce como flujo numérico de *Harten-Yee*. Mediante una descomposición espectral se generaliza este esquema de flujo para sistemas de leyes de conservación.

El cálculo de los flujos numéricos hace necesario resolver un problema de Riemann para obtener los vectores propios  $\mathbf{R}_{i+1/2}^l$ , los valores propios  $\lambda_{i+1/2}^l$  y los coeficientes de expansión espectral  $\alpha_{i+1/2}^l$  en la interfase entre dos celdas. En el presente trabajo empleamos para ello un *solver* de Riemann aproximado según Roe (1981). Obteniendo los mencionados vectores y valores propios de la matriz jacobiana aproximada de los flujos  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{i+1/2}^l = \lambda_{i+1/2}^l\mathbf{R}_{i+1/2}^l \quad (10)$$

puede expresarse el flujo de *Harten-Yee* para sistemas de leyes de conservación como

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{i+1/2}\Phi_{i+1/2}] \quad (11)$$

La función  $\Phi$  es la función de viscosidad numérica, cuyas componentes se expresan como:

$$\phi_{i+1/2}^l = \sigma^l(\lambda_{i+1/2}^l)(g_{i+1}^l + g_i^l) - \psi(\lambda_{i+1/2}^l + \gamma_{i+1/2}^l)\alpha_{i+1/2}^l \quad (12)$$

donde  $g_i^l$  es la función limitadora *minmod* aplicada a cada una de las componentes del sistema de leyes (2), y se expresa de la siguiente manera:

$$g_i^l = S.\max \{ [0, \min ((\lambda_{i+1/2}^l)|\alpha_{i+1/2}^l|, (\lambda_{i-1/2}^l)\alpha_{i-1/2}^l S_{i+1/2})) ] \} \quad (13)$$

$$S = \text{sign}(\alpha_{i+1/2}^l) \quad (14)$$

Y los coeficientes  $\gamma_{j+1/2}^l$  se expresan como:

$$\gamma_{j+1/2}^l = \begin{cases} \frac{g_{j+1}^l - g_j^l}{\alpha_{j+1/2}^l} & \text{si } \alpha_{j+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{j+1/2}^l = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Para retener el segundo orden de precisión en la integración temporal explícita con Euler (Yee, 1989), la función  $\sigma(\lambda)$  se define como:

$$\sigma^l(\lambda_{i+1/2}^l) = \frac{1}{2} \left( \psi(\lambda_{i+1/2}^l) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_{i+1/2}^l)^2 \right) \quad (16)$$

siendo la función  $\psi(\lambda_{i+1/2}^l)$  la encargada de introducir la disipación numérica propiamente dicha. Para respetar la condición de entropía en ondas de expansión y lograr la convergencia a una solución físicamente correcta (Harten y Hyman, 1983), esta función se define como:

$$\psi(\lambda_{i+1/2}^l) = \begin{cases} |\lambda_{i+1/2}^l| & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^l| \geq \delta_1 \\ \left( (\lambda_{i+1/2}^l)^2 + \delta_1^2 \right) / 2\delta_1 & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^l| < \delta_1 \end{cases} \quad (17)$$

donde  $\delta_1$  es un número real pequeño.

## 4. INTEGRACIÓN TEMPORAL

En el presente trabajo implementamos un esquema de integración implícito TVD tipo *Backward Euler*, con jacobianos evaluados tanto numéricamente como analíticamente para los términos fuente y las condiciones de contorno. Este esquema, para el caso convectivo puro y condiciones de contorno extrapoladas, es estable para valores del número de Courant Friedrichs (*CFL*) del orden de 5. Sin embargo, con la adición de términos fuente y condiciones de contorno más sofisticadas el margen de estabilidad resulta menor.

### 4.1. Esquema Implícito de Yee-Warming-Harten

Un esquema implícito que tenga segundo orden de precisión en la integración espacial sin presentar oscilaciones en regiones cercanas a discontinuidades debe cumplir con la condición de que tanto los flujos convectivos como el integrador temporal cumplan la propiedad TVD. Yee et al. (1985) desarrollaron el siguiente esquema TVD de integración implícito tipo *Backward Euler* para un sistema de leyes de conservación.

Definiendo la variable  $d_j$ , que representa el cambio de la variable de estado entre dos pasos sucesivos de tiempo

$$d_j = U_j^{n+1} - U_j^n \quad (18)$$

puede escribirse el esquema de integración temporal de la forma

$$\mathbf{E}_1 d_{j-1} + \mathbf{E}_2 d_j + \mathbf{E}_3 d_{j+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] \quad (19)$$

donde los coeficientes  $E_i$  se expresan mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n \\ \mathbf{E}_2 &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n + \mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \\ \mathbf{E}_3 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \end{aligned} \quad (20)$$

Además

$$\mathbf{J}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{R}_{j+1/2}^n \mathbf{diag}(C^\pm(\lambda^l + \gamma^l)_{j+1/2}^n) (\mathbf{R}^{-1})_{j+1/2}^n \quad (21)$$

donde para el flujo numérico de Harten los términos  $C^-$  y  $C^+$  se expresan

$$C_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2} [\psi(\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}) \pm (\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2})] \quad (22)$$

con  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $g_j$  dados por las ecs. (10), (15) y (13) respectivamente.

La función  $\sigma(\lambda)$ , en caso de buscar un esquema de segundo orden en la integración temporal, ahora se expresa como:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \psi(\lambda) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda^2 \right]$$

Cuando se desee un esquema para encontrar soluciones estacionarias puede emplearse:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} [\psi(\lambda)]$$

debido a que el esquema es más estable, permitiendo pasos de integración mayores.

## 5. CONDICIONES DE CONTORNO

Un modelado consistente y físicamente correcto de las condiciones de contorno (BC) es fundamental para lograr la estabilidad numérica del modelo, así como para lograr que converja a una solución físicamente correcta. En el presente trabajo implementamos un modelo de condiciones de contorno basadas en características desarrollado por [Thompson \(1987\)](#) y luego generalizado también por [Thompson \(1990\)](#).

Considerando un dominio unidimensional  $\Omega[0 : L]$  discretizado en  $M$  celdas, una forma posible de modelar el contorno es mediante  $k$  celdas ficticias, cuyas variables conservativas se determinan mediante alguna ley. Los modelos convencionales de condiciones de contorno determinan dichas variables extrapolando los valores desde el dominio hacia las  $k$  celdas del contorno.

Esto no es siempre físicamente consistente ya que como la información física viaja con las velocidades características, dependiendo del signo de las mismas las variables del contorno dependerán de las del dominio, o viceversa. Además, una extrapolación implica una imposición del gradiente de la variable extrapolada.

El presente método propone resolver un sistema de ecuaciones en variables características para una ley de conservación tipo ec. (2) en el contorno, para así poder identificar qué ondas entran y salen del dominio, y de esta forma calcular con mayor precisión los gradientes e integrar las variables en las  $k$  celdas del contorno de manera consistente con la integración de las mismas en el dominio.

Expresando la solución del sistema en función de los vectores propios izquierdos  $\mathbf{l}_i$  y de las velocidades características  $\lambda_i$  del sistema en variables primitivas, se obtiene

$$\mathbf{l}_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{l}_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{l}_i C = 0 \quad (23)$$

donde los valores propios son:

$$\lambda_1 = u - a; \quad \lambda_2 = u; \quad \lambda_3 = u + a; \quad (24)$$

Y los vectores de variables primitivas y de términos fuente son respectivamente:

$$\mathbf{V}^T = [\rho A \ u \ p A]; \quad \mathbf{C}^T = [C_1 \ C_2 \ C_3]; \quad (25)$$

$$l_1 = [0 \ -\rho A a \ 1]; \quad l_2 = [-a^2 \ 0 \ 1] \quad l_3 = [0 \ \rho A a \ 1] \quad (26)$$

La expresión (23) permite distinguir cuales de las ondas características son ondas entrantes y salientes en el contorno. El criterio de [Hedstrom \(1979\)](#) para establecer el valor de las variables en el contorno expresa que *las amplitudes de las ondas entrantes deben ser constantes en el tiempo*. Luego, si para imponer las condiciones de contorno se desea que las amplitudes de las ondas salientes sean 0 en el contorno, basta con establecer para cada una de ellas

$$\left( -l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + l_i C \right)_{x=0,L} = 0 \quad (27)$$

Para determinar cuáles ondas son entrantes y cuáles salientes, basta con evaluar su velocidad característica en el contorno considerado proyectada en la dirección normal a la cara de la celda colindante con dicho contorno. Para el caso unidimensional esta proyección resulta trivial. En

el caso del extremo izquierdo  $x = 0$ , si la velocidad  $\lambda_i$  es menor a cero, la onda será saliente; y si fuera mayor a cero, se trata de una onda entrante. Para el caso del extremo derecho  $x = L$  es a la inversa.

$$\begin{cases} [l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \lambda_i l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + l_i C]_{x=0} = 0 & \text{si } \lambda_i \leq 0 \\ [l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + l_i C]_{x=0} = 0 & \text{si } \lambda_i > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Definiendo el operador  $\mathcal{L}_i$

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} \lambda_i l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} & \text{para ondas salientes} \\ 0 & \text{para las demas ondas} \end{cases} \quad (29)$$

pueden establecerse las condiciones de contorno de manera sistemática y consistente.

Evaluamos los operadores  $\mathcal{L}_i$  para las ondas salientes en los contornos mediante diferencias finitas descentradas de acuerdo a las siguientes expresiones.

$$\mathcal{L}_1 = (u - a) \left( \frac{\partial pA}{\partial x} - \rho A a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (30)$$

$$\mathcal{L}_2 = u \left( \frac{\partial pA}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho A}{\partial x} \right) \quad (31)$$

$$\mathcal{L}_3 = (u + a) \left( \frac{\partial pA}{\partial x} + \rho A a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (32)$$

Una vez determinados los valores del operador  $\mathcal{L}$  en cada caso, se puede evaluar la evolución temporal de las variables primitivas en las celdas del contorno:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ -\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1) \right] + C_1 = 0 \quad (33a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho A a} (\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1) + C_2 = 0 \quad (33b)$$

$$\frac{\partial pA}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1) + C_3 = 0 \quad (33c)$$

La evolución de las variables conservativas se obtiene mediante operaciones algebraicas sobre la ec. (23), introduciendo la matriz jacobiana entre el sistema conservativo y el sistema primitivo  $\mathbf{P} = \frac{\partial U_i}{\partial V_j}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{P} \mathbf{I}_i^{-1} \mathcal{L} + \mathbf{P} \mathbf{C} \quad (34)$$

donde se demuestra que  $\mathbf{P} \mathbf{I}_i^{-1} = \mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} \mathbf{C} = -\mathbf{S}$

Para integrar empleando el integrador *Backward Euler* resta determinar las jacobianas de los operadores  $\mathcal{L}$  respecto de las variables conservativas.

Como la evaluación numérica de los operadores  $\mathcal{L}_i$  implica un operador diferencial discreto, no puede aceptarse que éste conmute con el operador diferencial respecto de las variables de estado, empleado para evaluar las jacobianas. Luego, se define para el contorno izquierdo

$$\mathbf{J}^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}); \quad \mathbf{J}^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}); \quad (35)$$

y para el contorno derecho:

$$\mathbf{J}^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}); \quad \mathbf{J}^- = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}); \quad (36)$$

Obtuvimos los jacobianos mencionados tanto analíticamente (ya que este es un sistema sencillo) o numéricamente, mediante la metodología propuesta por Knoll y Keyes (2004). Esta metodología propone evaluar las matrices jacobianas por columnas mediante pequeñas perturbaciones en las variables.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_k \approx \mathbf{J}^{(k)} = \frac{\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U} + \varepsilon_k \mathbf{e}_k) - \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U})}{\varepsilon_k} \quad (37)$$

Donde el parámetro  $\varepsilon_k$  se estima, de acuerdo a dichos autores, para cada variable  $U_{kj}$  como:

$$\varepsilon_k = bU_{kj} + b \quad (38)$$

Donde  $b = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_{comp}})$ , para una computadora de 64 bits y doble precisión basta con hacer  $b = 10^{-6}$ . En ambos casos no hubieron diferencias apreciables en los resultados.

Estas relaciones permiten, mediante el mismo integrador temporal utilizado para las celdas del dominio, obtener la evolución temporal de las variables primitivas en el contorno.

$$(\mathbf{I} + \mathbf{J}^c \Delta t) \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{J}^+ \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j+1} = -\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \Delta t \quad \text{para } j < 1 \quad (39)$$

$$\mathbf{J}^- \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{J}^c \Delta t) \Delta \mathbf{U}_j = -\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}) \Delta t \quad \text{para } j > M \quad (40)$$

Este esquema puede flexibilizarse para tener en cuenta otro tipo de condiciones distintas a la de no reflexión de ondas, de acuerdo a lo propuesto por Thompson (1990). Trabajando algebraicamente con las ecuaciones (33) pueden obtenerse diferentes tipos de condiciones de contorno, obteniendo nuevas expresiones para los operadores  $\mathcal{L}_i$  en función de alguna condición que se desee se satisfaga.

### 5.1. Pared sólida

En este caso la condición está dada por  $u = 0 \quad \forall t$ . Como se necesita que  $u$  en el contorno continúe siendo 0 en el tiempo, luego  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \forall t$ . De la ecuación (33b) se obtiene que para satisfacer esta condición:

$$\frac{1}{2\rho Aa} (\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1) + C_2 = 0 \quad (41)$$

Entonces, los operadores  $\mathcal{L}_i$  asociados a ondas que entran al dominio, en lugar de hacerse iguales a 0, se calculan mediante:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 - 2\rho AaC_2 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3 + 2\rho AaC_2 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (42)$$

## 5.2. Flujo supersónico

### 5.2.1. Salida

Esta condición implica:

$$\begin{aligned} u < a < 0 & \text{ para } x \leq 0 \\ 0 < a < u & \text{ para } x \geq L \end{aligned}$$

En ambos casos todas las ondas características serán salientes al dominio, por lo tanto los operadores  $\mathcal{L}_i$  se evalúan mediante las relaciones (30)

### 5.2.2. Entrada

Para el caso del extremo  $x = 0$  todas las características son mayores a 0. Por esta razón será necesario especificar todos los valores de los  $\mathcal{L}_i$ . Si se quiere obtener una solución estacionaria, donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (43)$$

entonces, debe elegirse:

$$\mathcal{L}_1 = \rho A a C_2 - C_3; \quad \mathcal{L}_2 = a^2 C_1 - C_3; \quad \mathcal{L}_3 = -\rho A a C_2 - C_3; \quad (44)$$

Si se busca una solución distinta a la estacionaria, puede asignarse una ley de variación a cualquiera de las derivadas de las variables y despejar el valor de los  $\mathcal{L}_i$  para que las satisfagan.

## 5.3. Flujo subsónico

### 5.3.1. Salida

Para el caso de una salida subsónica, dos de las ondas características serán salientes del dominio, luego se evalúan mediante la ec. (30). Para la onda restante pueden establecerse distintos tipos de condiciones, a saber:

#### No reflexión de la onda entrante:

El caso original de esta metodología, que satisface el criterio de Hedstrom

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3 = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathcal{L}_1 = 0 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (45)$$

#### Fuerza total nula en el contorno

Thompson (1990) propuso, partiendo la ecuación de la cantidad de movimiento en variables primitivas (33b), encontrar una relación para los operadores asociados a ondas entrantes que satisfaga:

$$\frac{1}{\rho A} \frac{\partial p A}{\partial x} + C_2 = 0 \quad (46)$$

de manera que la suma de fuerzas sea 0 en el contorno. Sin embargo, esta metodología no funcionó. Nosotros propusimos que se satisfaga la condición de fuerza nula en la ecuación de la cantidad de movimiento en variables conservadas

$$\frac{\partial pA}{\partial x} - S_2 = 0 \quad (47)$$

Luego, el valor del operador  $\mathcal{L}_i$  asociado al contorno considerado es:

$$\begin{cases} \frac{u+a}{2a^2} \mathcal{L}_3 = S_2 + u^2 \frac{\partial \rho A}{\partial x} + 2\rho Au \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u-a}{2a^2} \mathcal{L}_1 + \frac{u}{a^2} \mathcal{L}_2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{u-a}{2a^2} \mathcal{L}_1 = S_2 + u^2 \frac{\partial \rho A}{\partial x} + 2\rho Au \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u+a}{2a^2} \mathcal{L}_3 + \frac{u}{a^2} \mathcal{L}_2 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (48)$$

### Presión constante

Si se desea que la presión sea constante en el tiempo en el contorno, de acuerdo a la ec. (33c) debe cumplirse que:

$$\frac{1}{2} (\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1) + C_3 = 0$$

Luego, el valor de el  $\mathcal{L}_i$  asociado al contorno considerado es:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3 = -\mathcal{L}_1 - 2C_3 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_3 - 2C_3 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (49)$$

### 5.3.2. Entrada

Para el caso de una entrada subsónica, sólo una de las ondas características será saliente del dominio: la asociada a  $\mathcal{L}_3$  o a  $\mathcal{L}_1$ , según el contorno del que se trate. Es necesario establecer un valor para el operador  $\mathcal{L}_2$

#### No reflexión de la onda de Entropía

En este caso, se establece  $\mathcal{L}_2 = 0$ , lo que implica que la entropía del flujo entrante es constante en la dirección x. Para determinar  $\mathcal{L}_3$  puede emplearse:

- la ec. (45) si se desea imponer la condición de no reflexión de la onda 3
- la ec. (48) para la condición de fuerza nula en el contorno
- la ec (49) para la condición de presión constante en el contorno.

**Velocidad de entrada constante** En este caso, al igual que para la pared sólida, debe verificarse que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \forall t$ . Luego, se emplea la expresión (41) para estimar  $\mathcal{L}_1$  y la expresión (31) para estimar  $\mathcal{L}_2$ .

#### Condición de flujo de masa constante

Imponer esta condición implica que:

$$\frac{\partial(\rho Au)}{\partial t} = \rho A \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

De manera que debe cumplirse la siguiente relación entre los operadores  $\mathcal{L}_i$ :

$$(u + a) \mathcal{L}_3 + 2u\mathcal{L}_2 + (u - a) \mathcal{L}_1 = 2\rho Aa^2C_2 + 2a^2uC_1 \quad (51)$$

Puede establecerse un valor para  $\mathcal{L}_2(0$ , por ejemplo), y despejar el valor del operador restante

$$\begin{cases} (u + a) \mathcal{L}_3 = 2\rho Aa^2C_2 + 2a^2uC_1 - (u - a) \mathcal{L}_1 - 2u\mathcal{L}_2 & \text{si } x \leq 0 \\ (u - a) \mathcal{L}_1 = 2\rho Aa^2C_2 + 2a^2uC_1 - (u + a) \mathcal{L}_3 - 2u\mathcal{L}_2 & \text{si } x \geq L \end{cases} \quad (52)$$

O bien imponer en la relación (51) el valor del operador asociado a la onda entrante ( $\mathcal{L}_3$  o  $\mathcal{L}_1$  según el contorno considerado) de acuerdo con alguna otra condición física (no reflexión, fuerza nula, presión constante, etc), determinar el operador asociado a la onda saliente y expresar  $\mathcal{L}_2$  en función de ellos.

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2u} [2\rho Aa^2C_2 + 2a^2uC_1 - (u - a) \mathcal{L}_1 - (u + a) \mathcal{L}_3] \quad (53)$$

Debe tenerse en cuenta que esto físicamente implica que la entropía del fluido que ingresa no será constante.

## 6. CASOS ANALIZADOS

### 6.1. Tobera de sección variable

El primer caso de estudio se trata de una tobera divergente de longitud  $L = 10$  con una ley de variación de área:

$$A(x) = 1,398 + 0,347 \cdot \tanh(0,8x - 4) \quad (54)$$

Para un fluido con exponente isoentrópico  $\gamma = 1,4$  y constante de gas  $R = 1716$ . En todos los casos adimensionalizamos las variables y dimensiones del problema

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_i}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_i a_i^2}; \quad \bar{e}_t = \frac{e_t}{\rho_i a_i^2}; \quad \bar{u} = \frac{u}{a_i}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{t} = \frac{ta_i}{L}; \quad \bar{A} = \frac{A(x)}{A(x=0)} \quad (55)$$

Utilizamos en todos los casos como condición inicial una interpolación lineal entre el valor de la solución analítica en  $x = 0$  y  $x = L$ , y una discretización del dominio en 200 celdas más 2 en cada uno de los contornos, el número de iteraciones varió de acuerdo al tipo de problema estudiado. Evaluamos la convergencia mediante la norma  $L_2$  de la variación de la densidad en dos pasos de tiempo sucesivos.

#### 6.1.1. Flujo supersónico en todo el dominio

Para este caso sólo deben definirse las condiciones a la entrada para las tres variables de estado. Las condiciones a la salida dependerán sólo de los valores en el dominio, por lo tanto deberán obtenerse mediante una relación de compatibilidad (Poinsot y Lele, 1992). Para el caso analizado se emplearon las siguientes condiciones en la entrada:

$$M_i = 1,5 \quad p_i = 2000 \quad \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} \quad a_i = 1118$$

Para este caso sólo puede emplearse la condición de *entrada supersónica* para la entrada, y la de *salida supersónica*. Comparamos los resultados con los obtenidos para condiciones de

contorno extrapoladas convencionales. Este es el caso más sencillo, y en el que las condiciones de contorno tuvieron menor influencia en la solución, como era de esperarse.

En la figura 1 mostramos los resultados obtenidos.

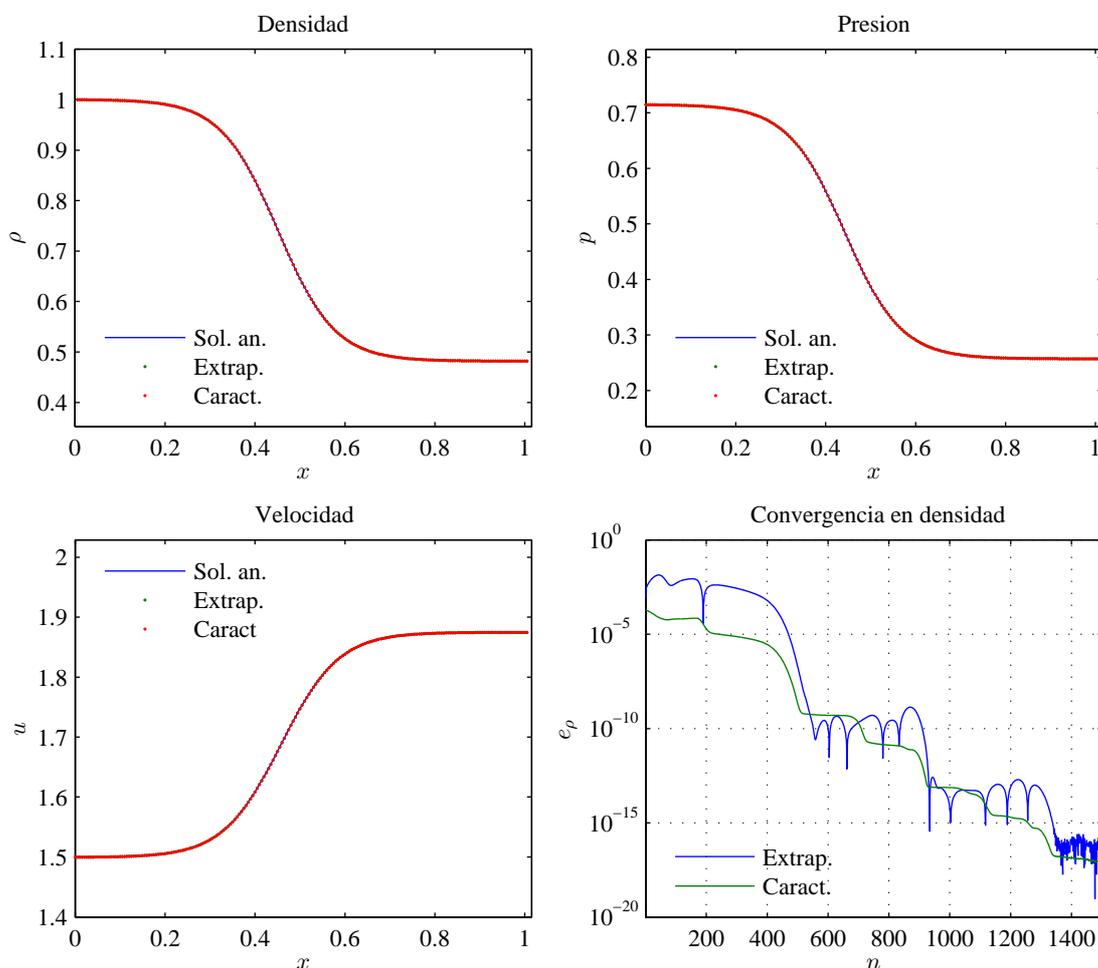


Figura 1: Caso supersónico

En ambos casos en menos de 500 iteraciones la solución convergió al estado estacionario, y ambos modelos muestran propiedades de convergencia similares. Sin embargo, la formulación basada en características presenta menos oscilaciones en el transitorio. Suponemos que las oscilaciones de la solución para condiciones extrapoladas en la parte final de la curva se deben a errores de redondeo en la solución del sistema de ecuaciones, debido a que ocurren para errores cuyo valor es del orden de magnitud de la cantidad de cifras significativas de los datos.

### 6.1.2. Flujo supersónico en la entrada y salida subsónica

Para este caso condiciones a la entrada son idénticas al caso anterior, con la diferencia que se impone una presión a la salida mucho mayor, de manera tal que aparezca una onda de choque

en  $x = 5$

$$\begin{cases} M_i = 1,5 & p_i = 2000 & \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} & a_i = 1118 & \text{en la entrada} \\ p_e = 4930 & & & & \text{en la salida} \end{cases}$$

En todos los casos corrimos con 1500 iteraciones, los resultados obtenidos se ven en la figura 2.

En este caso la elección de las condiciones de contorno juega un rol más importante en la convergencia a la solución. Como la solución analítica depende directamente de cuánto sea el valor de la presión a la salida, el valor inicial de las variables de estado en el contorno determinan la solución numérica. En general imponer la condición de fuerza nula produjo menores oscilaciones durante el transitorio, sin variar el valor de la presión en el contorno. Sin embargo, para valores de  $CFL$  mayores a 1.8 la presión cambia en la salida, haciendo que el algoritmo converja a otra solución con la onda de choque ubicada más hacia la izquierda, que también es físicamente correcta. Este tipo de condición resulta ventajosa si se tiene un contorno abierto en el que no se conoce a priori qué ocurrirá con la presión, sin embargo debe tenerse en cuenta que la solución dependerá del valor del  $CFL$ . La imposición de la presión en el contorno también produjo buenos resultados, sin embargo se ven oscilaciones en la convergencia, probablemente debido a la reflexión de la onda numérica 1 hacia el interior del dominio. La condición de no reflexión también funcionó de forma sorprendentemente buena, aunque la solución fue más fuertemente dependiente del valor de  $CFL$ , pudiendo a veces obtenerse soluciones no físicas. En el caso actual se hizo la corrida con  $CFL = 1,2$ . El modelo convencional fue el que mostró las propiedades de convergencia más pobres.

### 6.1.3. Flujo subsónico en todo el dominio

Para este caso la tobera se comporta como un difusor, y conociendo las condiciones a la entrada sólo es posible una solución física, dada por las ecuaciones de flujo isoentrópico para sección variable.

$$M_i = 0,8 \quad p_i = 2000 \quad \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} \quad a_i = 1118$$

Este caso fue el que más dificultades presentó para obtener una solución que converja, necesitándose más de 2400 iteraciones con  $CFL = 1,8$ .

Imponiendo condiciones de presión constante o gradiente de fuerza nulo en la entrada no se logra convergencia. Mediante la condición de caudal másico constante obtuvimos no obstante buena convergencia para distintas condiciones impuestas en la salida, los resultados para estas condiciones se muestran en la figura 3.

Nuevamente la condición de fuerza nula resultó ser la que mejores propiedades de convergencia exhibió, además de poseer la ventaja de permitir obtener el valor correcto de la presión en el contorno en caso de que se utilice una condición inicial cuyo valor no sea correcto.

Las condiciones de presión constante y no reflexión de ondas también se comportan de manera satisfactoria, siendo ésta última más propensa a inestabilidades para valores mayores de  $CFL$ .

Las condiciones de contorno extrapoladas resultaron ser de nuevo las menos satisfactorias. Por tratarse de una entrada subsónica, para que el problema esté bien condicionado es necesario sólo definir 2 de las variables y la tercera debería adecuarse mediante relaciones de compatibilidad, de acuerdo a [Poinsot y Lele \(1992\)](#) y [Dutt \(1988\)](#). Sin embargo, para hacer converger el

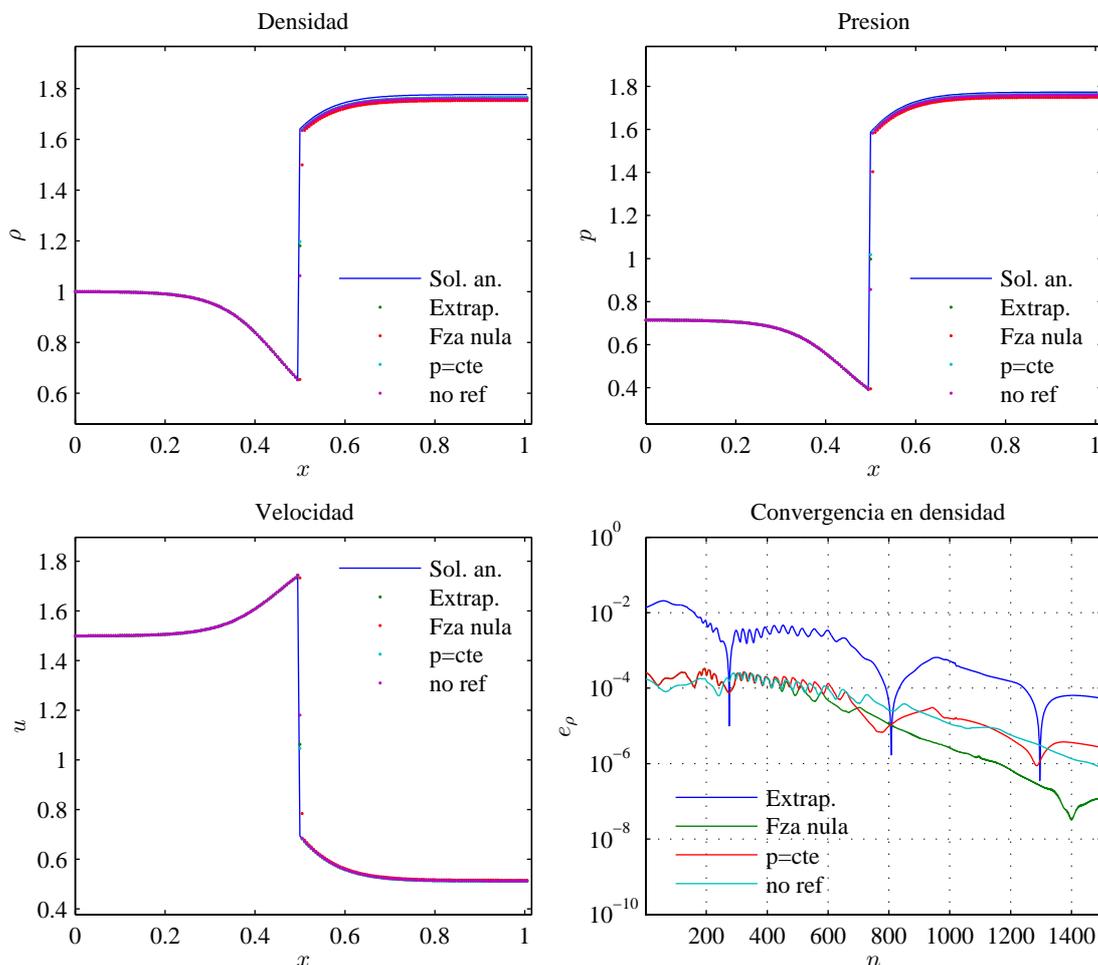


Figura 2: Caso supersónico- subsónico

problema a la solución fue necesario fijar todas las variables en la entrada. En este caso resultó sencillo porque conocemos la solución analítica, sin embargo un caso general no resultará así.

## 6.2. Arco coronal de sección variable

El segundo caso analizado consiste en un modelo gasdinámico analítico simplificado de un arco de la corona solar, obtenida por [Cargill y Priest \(1980\)](#). Dicho modelo consiste de un arco circular con hidrógeno monoatómico, en cuyas bases la presión se encuentra impuesta en función de lo que ocurra en la región de transición. En una de las bases se impone una velocidad de entrada  $u_0$ , y se consideran los efectos de la gravedad.

Tomando una coordenada curvilínea  $0 \leq s \leq 2L$  a lo largo de la línea media del arco y despreciando su curvatura, el problema se idealiza con las ecuaciones de Euler cuasi unidimensionales de sección variable (5) con un vector de términos fuente de la forma:

$$\mathbf{S} = \left[ 0, \quad p \frac{\partial A}{\partial x} - \rho A g \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right), \quad -\rho A u g \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right) \right]^T \quad (56)$$

En la figura 4, tomada de la referencia citada, se esquematiza el modelo.

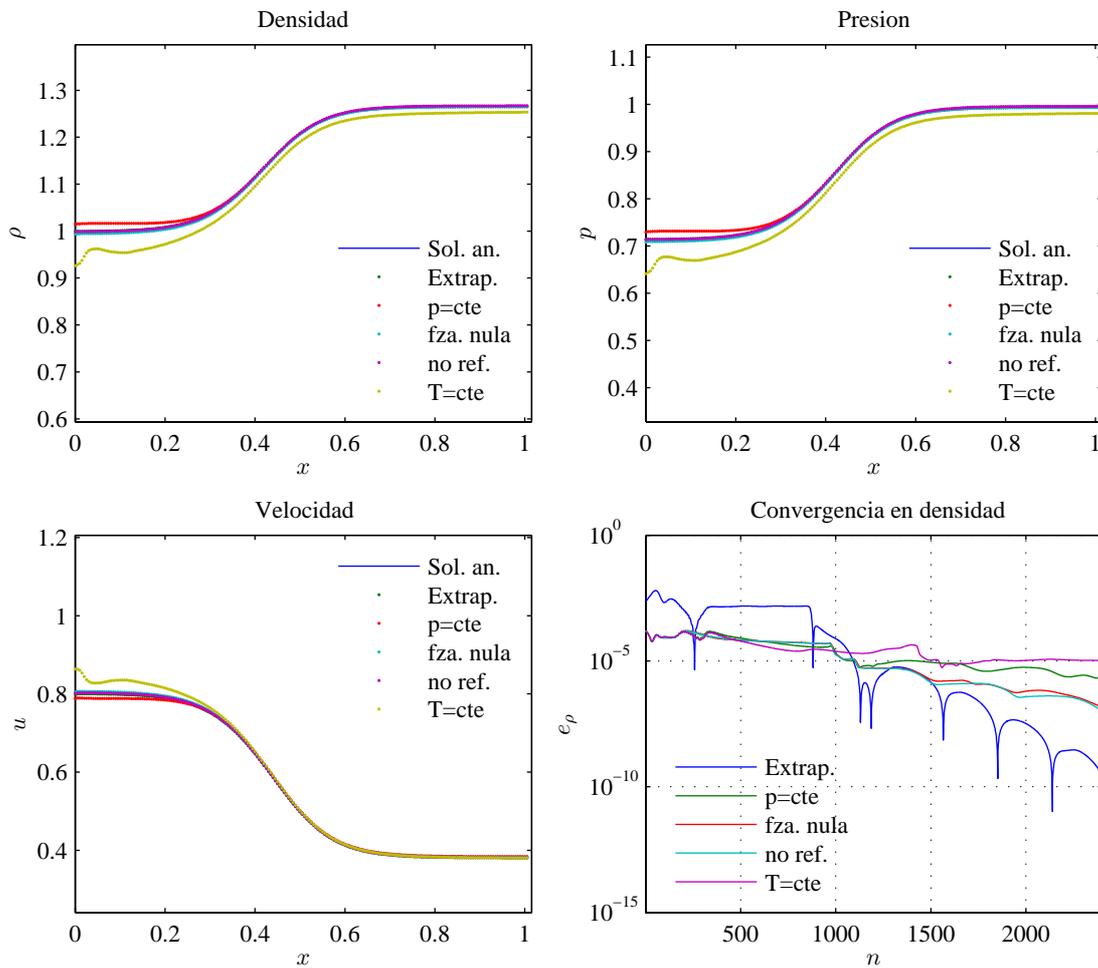


Figura 3: Caso subsónico

Si asumimos además que el flujo es isoentrópico y estacionario, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en variables primitivas se simplifican de la siguiente manera

$$\frac{d}{ds} (\rho Au) = 0 \tag{57}$$

$$\rho \frac{du}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right) \tag{58}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \tag{59}$$

Combinando estas ecuaciones y teniendo en cuenta la definición de la velocidad del sonido  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ , partiendo de la ecuación de la cantidad de movimiento se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para la velocidad en función de  $s$ .

$$\left(u - \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{ds} = -g \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right) + \frac{a^2}{A} \frac{dA}{ds} \tag{60}$$

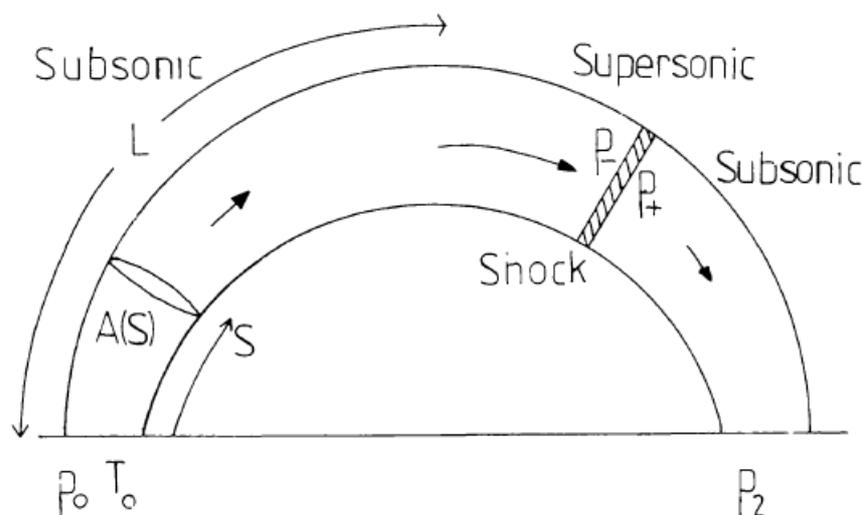


Figura 4: Esquema del modelo del arco de Cargill y Priest (1980)

Si además se adimensionaliza el sistema de la misma manera que para la tobera de sección variable, de acuerdo a (55), y si además se define un coeficiente de gravedad adimensional en función de una escala de longitud hidrostática  $\Lambda_0$

$$\bar{g} = \frac{L}{\Lambda_0} \quad (61)$$

donde

$$\Lambda_0 = \frac{p}{\rho g} \quad (62)$$

puede obtenerse una expresión que es sólo función de la velocidad adimensional  $\bar{u}$

$$\left[ \bar{u} - \frac{1}{\bar{u}} \left( \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}\bar{A}} \right)^{\gamma-1} \right] \frac{d\bar{u}}{d\bar{s}} = -\frac{\bar{g}}{\gamma} \cdot \cos \left( \frac{\pi\bar{s}}{2} \right) + \left( \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}\bar{A}} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\bar{A}} \frac{d\bar{A}}{d\bar{s}} \quad (63)$$

Imponiendo la condición de contorno  $u = u_0$  para  $s = 0$  puede integrarse esta ecuación para obtener una ecuación algebraica no lineal, de donde se despeja la distribución de velocidades. Y mediante la relación isoentrópica y la ecuación de continuidad se obtienen las demás variables.

A continuación presentamos la solución para un arco de semilongitud  $L = 140 \cdot 10^6 m$ , con una densidad en sus bases de  $\rho_0 = 1,18 \cdot 10^{-12} kg/m^3$  y una temperatura  $T = 1 \cdot 10^6 K$ . Se emplearon estos valores típicos de la corona solar debido a que este modelo hidrodinámico sencillo ideal no permite tener en cuenta efectos de conducción y y disipación típicos de la región de transición que separa la cromósfera de la corona. Para dichas condiciones iniciales la gravedad solar adimensionalizada toma un valor de  $\bar{g} = 2,8$ .

En el código numérico sin embargo, por una cuestión de simplicidad y consistencia con la expresión de los términos fuente para este problema, dados por la ec. (56), adimensionalizamos la gravedad según

$$\bar{g} = \frac{gL}{a^2} \quad (64)$$

La ley de variación de sección para el caso considerado es

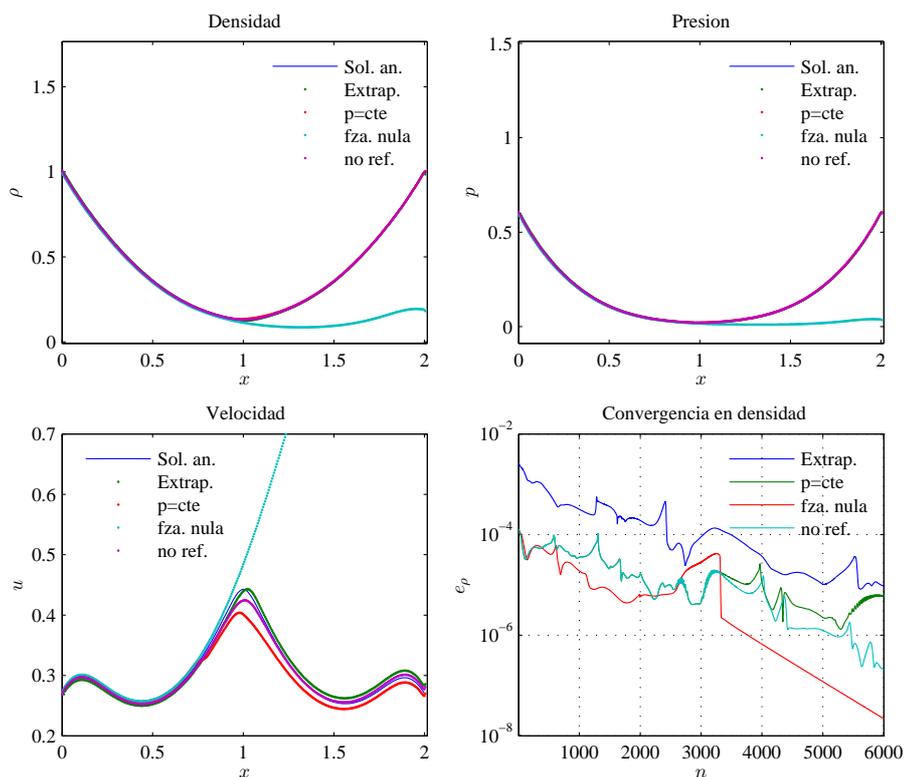
$$A(x) = A_0 \cdot \left[ 1 + (k-1) \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi s}{2L} \right) \right]; \quad k = 5$$

El parámetro  $k$  representa una relación de contracción entre el área en la base y el área en el punto medio del arco, es decir:

$$\frac{A(s=L)}{A(s=0)} = k \quad (65)$$

Debido a que la solución obtenida está adimensionalizada, ésta es independiente del valor de  $A_0$ . Por simplicidad, se adoptó  $A_0 = 1$ .

La discretización del dominio fue de 400 celdas, más 2 en cada uno de los contornos. Para este modelo la condición de contorno en la entrada de velocidad es  $u_0 = 0,27 \cdot a$ . La solución analítica predice que tanto la entrada como la salida serán subsónicas, por lo tanto empleamos la condición de caudal másico constante para la entrada y probamos las condiciones de presión constante, no reflexión y fuerza nula en la salida. La solución depende fuertemente de la ley de variación de la sección con la coordenada  $s$ , así como la longitud del arco, ya que la gravedad solar produce un gradiente en la densidad, cuyo mínimo se encuentra para  $s = L$ , y además desacelera el flujo en la rama ascendente, y lo acelera en la descendente. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.2.



Lograr la convergencia a la solución analítica resultó sumamente complicado, y las soluciones obtenidas fueron fuertemente dependientes de las condiciones iniciales y las condiciones de contorno. Esto ocurre porque, debido a la variación de sección y a los efectos de estratificación de densidad debidos a la gravedad, en la región superior del arco aparecen regiones de muy baja presión y densidad. Además, la propia naturaleza de la solución analítica puede incluir varios máximos locales y puntos de inflexión. Durante las iteraciones a veces aparecieron zonas del dominio con flujo supersónico, que al llegar al contorno transformaban las condiciones de borde a salida supersónica, haciendo que el algoritmo converja a otra solución.

Por otro lado, el peso relativo de los términos fuente respecto a los convectivos hace que, si bien el algoritmo converge con relativa rapidez a la densidad y a la presión, en general le cuesta bastante más converger a la velocidad. En los contornos, donde la variación de sección no es importante, la relación entre el valor de los términos fuente y los flujos convectivos para la cantidad de movimiento y energía fue respectivamente

$$\frac{S_2(x=0)}{F_2(x=0)} = 2,50 \quad \frac{S_3(x=0)}{F_3(x=0)} = 1,093 \quad (66)$$

y para  $s = L/2$ , donde la variación de la sección es importante

$$\frac{S_2(x=L/2)}{F_2(x=L/2)} = 1,53 \quad \frac{S_3(x=L/2)}{F_3(x=L/2)} = 1,51 \quad (67)$$

Esto nos lleva a concluir que los términos fuente debidos a la gravedad son los más problemáticos para el caso considerado, tanto porque actúan en las celdas del contorno como porque tienen mayor peso relativo que los de variación de sección. En la zona central del arco ( $s = L$ ), dicha relación para ambos casos es del orden de  $1 \cdot 10^{-3}$ , debido a que tanto la gravedad como la variación de sección dejan de ser importantes.

El modelo de condiciones de contorno que mejor resultados dio fue el de presión constante en el contorno, aunque vimos que la convergencia fue bastante errática, y para casos más severos (como para  $k = 20$  y  $L = 175Mm$ ) una vez alcanzada la solución analítica, ésta no era estable y después de un tiempo el algoritmo convergía a otra solución.

Nuevamente la condición de no reflexión de ondas probó ser la con mejores propiedades de convergencia, pero ocurrió que resultó muy sensible a las condiciones iniciales. Una estrategia que empleamos para subsanar este problema fue emplear la condición de salida con presión constante para las primeras 3000 iteraciones, y luego cambiar a las condiciones de no reflexión.

La condición de fuerza nula en el contorno no convergió a la solución analítica propuesta simplemente porque se demuestra que para esta solución no se cumple que

$$\frac{\partial pA}{\partial x} + \rho Ag - p \frac{dA}{dx} = 0$$

El algoritmo converge a una solución con expansión supersónica, que verifica la relación anterior. Nuevamente los gráficos de convergencia muestran que la solución con condiciones extrapoladas es la más lenta para converger. Además, esta solución requirió, como en el caso de la tobera con entrada subsónica, definir todas las variables en la entrada, porque de otra manera no se lograba la convergencia. Si bien en la figura 6.2 se observa que esta solución es la que más se acerca a la analítica, lo que ocurre es que se mantiene oscilando. Sin embargo, las condiciones extrapoladas probaron ser más robustas e insensibles a la condición inicial.

## 7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo probamos distintos tipos de métodos de condiciones de contorno junto con un integrador implícito para el esquema de Harten Yee. Podemos concluir que la integración de ambos métodos funcionó como esperábamos, y que la evaluación de los jacobianos de forma numérica (tanto para los términos fuente en el dominio para los operadores de las BC) resultó igual de efectiva que su evaluación analítica. Esto sugiere que puede usarse esta misma metodología para sistemas más complejos (como el Magnetohidrodinámico, por ejemplo), donde las expresiones analíticas de los jacobianos son más complejas.

Si bien los modelos de condiciones de contorno empleados fueron diseñados para captar perturbaciones en flujos inestacionarios, probaron ser muy aptos para converger a soluciones estacionarias también. Esta posibilidad resulta especialmente útil para el estudio de problemas astrofísicos, donde los problemas a veces presentan oscilaciones inestacionarias, y otras veces convergen a una solución estacionaria.

Por otro lado, cuando se trate de casos en los que es difícil converger a la solución, pueden usarse condiciones iniciales simplistas y un modelo de condiciones más robusto para las primeras iteraciones durante el transitorio, para luego emplear un modelo más preciso o más acorde a la condición física que se esperaría en el contorno analizado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores deseamos agradecerle al Dr. José P. Tamagno por sus sugerencias y comentarios sobre el artículo. También agradecemos a CONICET por haber financiado el trabajo de investigación que posibilitó la redacción de este trabajo.

## REFERENCIAS

- Cargill P.J. y Priest E. Siphon flows in coronal loops. I - Adiabatic flow. *Solar Physics*, 65:251–269, 1980.
- Dutt P. Stable Boundary Conditions and Difference Schemes For Navier-Stokes Equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 25:245–267, 1988.
- Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. 49:357–393, 1983.
- Harten A. y Hyman J.M. Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws. 50:235–269, 1983.
- Hedstrom G. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 30, 1979.
- Hoffmann K.A. y Chiang S. *Computational Fluid Dynamics. Volume II*. ESS, 2000.
- Knoll D. y Keyes D. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193, 2004.
- Poinsot T. y Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows. 101:104–129, 1992.
- Roe P.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. 43:357–372, 1981.
- Thompson K. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. 68:1–24, 1987.
- Thompson K. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II. 89:439–461, 1990.
- Yee H., Warming R., y Harten A. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations. 57:327–360, 1985.
- Yee H.C. Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes. 89464, 1987.
- Yee H.C. A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. 101088, 1989.