

ESTUDIO DEL EFECTO DEL MALLADO EN LA RESOLUCIÓN DEL FLUJO ALREDEDOR DE UN OBSTÁCULO. CASO LAMINAR

Octavio Jouanny¹, Diego N. Passarella²

¹Arquitectura Naval, Universidad Nacional de Quilmes, Roque Sáenz Peña 352, 1876 Bernal, Argentina, ojouanny@becarios.unq.edu.ar, <http://www.unq.edu.ar/>

²Área de Matemática Avanzada, Universidad Nacional de Quilmes, Roque Sáenz Peña 352, 1876 Bernal, diego.passarella@unq.edu.ar, <http://www.unq.edu.ar/>

Palabras Clave: Flujo laminar, Obstáculo Cilíndrico, OpenFOAM[®], Coeficientes de Arrastre y Sustentación.

Resumen. Las herramientas de mecánica computacional permiten evaluar modelos sin la necesidad de construcción de prototipos físicos y la realización de pruebas en túneles de ensayo, representando un ahorro de recursos y tiempo. Para obtener resultados óptimos en problemas de dinámica de fluidos computacional, es necesario realizar un mallado adecuado del dominio que se debe analizar. En este trabajo utilizamos distintos niveles de discretización y distribución de celdas, analizándose cuál de las opciones estudiadas resulta efectiva en lo referente a la exactitud del resultado y el costo computacional involucrado. El análisis se llevó a cabo resolviendo el caso de un obstáculo cilíndrico orientado transversalmente al flujo dentro de un canal de sección cuadrada. La resolución del flujo laminar y el cálculo de los correspondientes coeficientes de arrastre y sustentación se llevó a cabo utilizando el programa de código abierto OpenFOAM[®]. Los resultados numéricos obtenidos se comparan contra resultados de referencia de la literatura.

1 INTRODUCCIÓN

Las soluciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles dependen de la discretización utilizada para describir el dominio. Un adecuado uso de la mecánica de fluidos computacional necesita de soluciones con alto nivel de exactitud. En el empleo de herramientas de Dinámica de Fluidos Computacional (DFC, ó *CFD* en inglés) para la estimación y optimización de coeficientes de resistencia al avance y sustentación, la dependencia de la solución obtenida con respecto a la malla utilizada motiva este trabajo a realizar el análisis del comportamiento de un problema con solución conocida y estudiar el efecto de distintos tipos de discretizaciones espaciales.

En este trabajo se analiza un dominio tridimensional constante que contiene en su interior un obstáculo cilíndrico, del cual nos interesa determinar el valor de los coeficientes de resistencia y sustentación al ser atravesado por un fluido. Para resolver el problema se utiliza como referencia el trabajo Bayraktar (2012), del cual se reproduce el dominio computacional, una forma de distribuir la malla, la cantidad de celdas y la velocidad del flujo. Por último se toma como referencia los valores de los coeficientes de resistencia y sustentación presentados en John (2002) y Braack and Richter (2006). A partir de esos valores, se determina el error cometido en las simulaciones realizadas en este trabajo.

El software utilizado para resolver el problema que se presenta es OpenFOAM[®], es un programa de licencia abierta compuesto por librerías escritas en C++, ejecutables y modificables por el usuario. La aplicación se divide en dos categorías: resolvedores (solvers) que sirven para resolver problemas específicos, y utilidades diseñadas para la manipulación de datos. Dentro de los resolvedores disponibles se utiliza icoFoam, el cual resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles y Newtonianos.

2 DISCRETIZACION ESPACIAL

En el método de volúmenes finitos se discretiza el dominio geométrico sobre el cual se resuelve el problema, dividiéndolo en pequeñas celdas o volúmenes contiguos. En ellos, las ecuaciones de conservación son aplicadas y en cada centro de esas celdas son calculadas las variables mediante métodos de interpolación, asumiendo que los campos de velocidades y propiedades del flujo se conocen (Ferziger, J.H. And Peric, M., 2002). En nuestros casos de estudio estas divisiones son tipo bloques hexaédricos.

La ecuación integral de conservación utilizada por el método de volúmenes finitos escrita en forma general es:

$$\int_S \rho \phi \bar{v} \cdot \hat{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \hat{n} dS + \int_{\Omega} q_{\phi} d\Omega \quad (1.1)$$

Donde el flujo convectivo de la variable a analizar ϕ debe ser igual al flujo difusivo sobre la misma frontera, más/menos lo que se genere o consuma de ϕ en el dominio. Aplicar la ecuación 1.1 en cada volumen de control permite obtener la solución de la cantidad ϕ en todo el dominio. Para poder lograr esto, las integrales de superficie y volumen deben ser calculadas en forma aproximada usando una fórmula de cuadratura.

Sabiendo que el flujo a través del contorno del volumen de control es la suma de las integrales sobre las caras de la celda:

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f_k dS_k, \quad (1.2)$$

Se define f como la componente convectiva $\rho \vec{\phi} \cdot \hat{n}$ o difusiva $\Gamma \nabla \phi \cdot \hat{n}$. Para calcular el valor de la integral de superficie en la ecuación 1.2 se necesita saber el valor del integrando f sobre la superficie a integrar y suponiendo que la velocidad del fluido es conocida, se utilizan dos niveles de aproximación:

- La integral es aproximada en función de los valores de la variable en una o más localizaciones de la cara de la celda.

- Los valores de la cara de la celda son aproximados en función de valores del volumen de control.

Una aproximación simple de la integral en la ecuación (1.2) es considerarla como el producto del integrando en la cara central de la celda y el área de la cara de la celda

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx f_e S_e \quad (1.3)$$

El término fuente se aproxima reemplazando la integral de volumen por el producto del valor medio del integrando y el volumen de control.

$$Q_p = \int_{\Omega} q d\Omega \approx q_p \Delta\Omega \quad (1.4)$$

Donde q_p representa el valor de q en el centro del volumen de control.

3 CALIDAD DE LA MALLA

Cuando se realizan simulaciones numéricas se obtienen resultados con distintos tipos de errores, estos son de distinta naturaleza y se deben tener en cuenta para acotar el error total cometido.

El flujo dentro del dominio es representado de manera matemática mediante leyes de conservación escritas en forma integral o diferencial, donde las ecuaciones de Navier-Stokes son consideradas exactas, pero al ser complejas de resolver en flujos de interés se realizan aproximaciones y simplificaciones para poder resolverlas. De igual forma, la resolución numérica requiere el uso de condiciones iniciales y de contorno, de este modo podemos pasar de un dominio infinito a uno finito donde se realizaran las operaciones matemáticas asumiendo una condición de entrada y otra de salida de flujo. Al implementar estas condiciones, las aproximaciones sobre los límites o las paredes, la simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes y los defectos geométricos del mallado del dominio terminan afectando la solución aunque las ecuaciones de cálculo sean exactas. Todo esto se conoce como error de modelado y se define como la diferencia entre el flujo real y la solución exacta del modelo matemático.

Existen también errores de discretización, ya que todos los métodos numéricos generan soluciones aproximadas partiendo además, de distintas aproximaciones algebraicas realizadas para poder obtener el sistema de ecuaciones que debe resolver el código para calcular las integrales de volumen y superficie, los valores de las variables en puntos intermedios e integrales en el tiempo. Este error es definido como la diferencia entre la solución exacta de

las ecuaciones que gobiernan el flujo y la solución exacta de la discretización.

Los esquemas numéricos con que se aproxima el problema suelen dar lugar a ecuaciones no lineales. Éstas son resueltas mediante un proceso iterativo, el cual debe ser detenido en una etapa que está determinada por el criterio de convergencia del código numérico. Aunque el resultado converja y sea iterado en intervalos grandes de tiempo, nunca vamos a obtener una solución exacta debido a errores de redondeo y truncamiento. Se conoce como error de iteración la diferencia entre la solución matemática exacta y la iterativa de las ecuaciones discretizadas. Este error disminuye al aumentar el número de elementos de la malla.

Finalmente podemos describir los errores de usuario y programación. Al realizar una simulación numérica los resultados deben converger a valores esperables. También se debe esperar que el error disminuya al aumentar el número de celdas consideradas en la discretización del dominio y que las soluciones sean aceptables cuando se comparan con las de otro código de simulación o se resuelven analíticamente si esto es posible. Se debe tener en cuenta que un buen resultado depende del trabajo de mallado realizado por el usuario.

Dentro de las posibles fuentes de error asociadas a la malla utilizada, se encuentran los errores debido a la distorsión angular y a la falta de ortogonalidad entre celdas. Ambos efectos se presentan brevemente a continuación.

3.1 Distorsión angular (skewness)

La distorsión angular entre celdas reduce la precisión del cálculo de la integral de superficie (ecuación 1.3). En la figura 1 se muestra una situación típica causante de este error, la integral de superficie requiere el cálculo de la variable en el centro de la cara (punto f), siendo que el valor del flujo en f es obtenido por interpolación en la recta d entre los puntos P y N . En este caso, el valor del flujo f_i no se encuentra en el medio de la superficie de la celda.

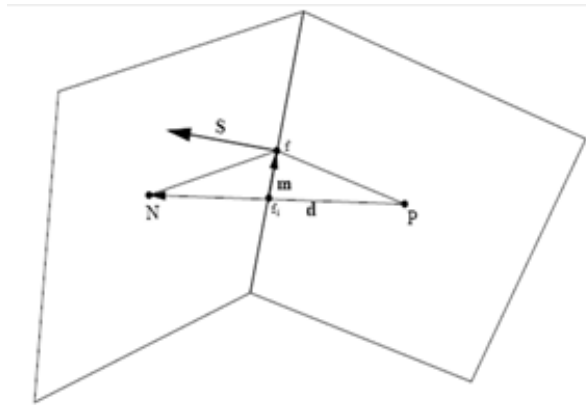


Figura 1. Esquema de error de aproximación debido a distorsión angular entre celdas.

3.2 Ortogonalidad

Para analizar el problema de falta de ortogonalidad entre celdas se presenta el esquema de la figura 2. La ortogonalidad entre las celdas incrementa la precisión de la aproximación de las derivadas, obteniéndose la máxima precisión en el cálculo cuando la línea d que conecta los dos centroides de los volúmenes de control P y N es ortogonal a la cara de la celda y pasa a través del centro de la superficie de la celda (punto f). Se busca que la normal a la cara entre celdas (vector S) y la recta d sean lo más colineales posibles.

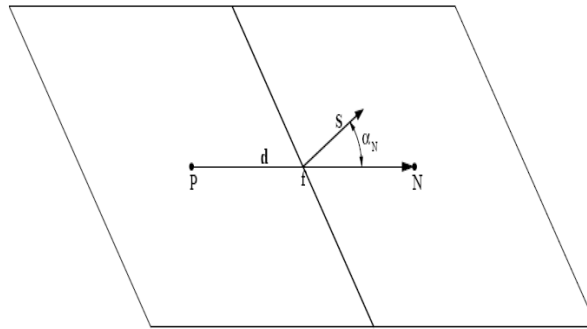


Figura 2. Esquema de error de aproximación debido a la falta de ortogonalidad entre celdas

4 METODOLOGIA

Para el caso de estudio se utilizó un dominio computacional cuya entrada y salida de flujo es de sección cuadrada, en el cual se ubicó un obstáculo cilíndrico descentrado, cercano a la zona de ingreso de flujo, a una distancia donde éste ya se encuentra desarrollado y de manera transversal al mismo (ver Fig. 3). En primer lugar se discretiza el dominio en una cantidad de celdas lo más cercana posible a los valores utilizados en Bayraktar (2012). De esta forma se analiza el resultado de cada simulación en función de distintos niveles de discretización en un mismo dominio.

Para cada nivel se estudiaron tres tipos de mallas distintas (M1, M2 y M3) donde en cada una la distribución de subdominios fue la presentada en la Fig. 4. La distribución M3 es la analizada en (Bayraktar 2012). Cada tipo de malla contiene distinta cantidad de subdominios computacionales que en forma conjunta determinan la geometría del dominio a estudiar. Este tipo de mallas fue elegido para permitir un mayor control en la distribución de celdas en el interior de cada subdominio.

Cada tipo de malla fue discretizada en distintos niveles de refinamiento (L1, L2, L3), de forma de obtener resultados comparables a Bayraktar (2012). Los tres niveles de refinamiento considerados fueron respectivamente 6200, 49200 y 393200 celdas. Se buscó que cada malla tuviera en cada nivel esta cantidad de celdas. Debido a la distribución de subdominios, el número de celdas fue logrado con un margen de error de $\pm 10\%$.

Para cada malla y nivel de discretización se analizaron tres formas distintas de distribuir los volúmenes de las celdas alrededor del obstáculo cilíndrico (D1, D2, D3). En primer lugar se consideró un mallado estructurado en la distribución D1, en el cual todas las celdas posean un volumen similar entre sí. En la práctica, la diferencia de volumen entre celdas no supera el 10%. La distribución D2 se basa en D1 pero redistribuyendo las celdas dentro del dominio de forma que se concentren alrededor del obstáculo. Finalmente, la distribución D3 es igual a D2 pero a la cual se le aplicó una gradación buscando refinar las celdas contiguas al obstáculo manteniendo la cantidad total de éstas en el dominio.

El flujo dentro del dominio se consideró newtoniano e incompresible con una viscosidad cinemática ν igual a 10^{-3} m²/seg. Para el caso analizado, las ecuaciones de conservación de masa y momento se escriben de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{T} \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

El número de Reynolds se define como $Re = UD/\nu$ donde U es la velocidad media en el canal, D es el diámetro del cilindro. Para este estudio el Re considerado fue 20, lo cual nos sitúa en una condición de un flujo laminar y sin presencia de calles de Von Karman. El perfil de velocidades a la entrada es un paraboloide en el plano y - z , aplicado mediante la librería `groovyBC` instalada para este propósito. El perfil de velocidades de entrada considerado es:

$$U(0, y, z) = 16U_m yz(H - y)(H - z)/H^4, \quad V=W=0 \quad (1.6)$$

El tiempo utilizado en la simulación es 25 segundos, suficiente para que el flujo recorra dos veces la longitud del canal, para una velocidad $U_m=0.45$ m/seg. El solver usado en cada caso a estudiar es `icoFoam` y las tolerancias de los resolvidores fueron 10^{-6} y 10^{-5} para la presión y velocidad respectivamente. No se realizaron iteraciones para corregir la no ortogonalidad.

Para las 27 condiciones que surgen de la combinación de parámetros de mallado antes mencionado se calcularon los coeficientes de sustentación (C_L) y el de arrastre (C_D) del cilindro (ver ecuación 1.7) mediante la librería `forces.so` ya incluidas en el código `OpenFOAM`[®]. Los resultados así obtenidos fueron directamente comparados con aquellos presentados en John (2002), Braack and Richter (2006).

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho U^2 DH}, \quad C_L = \frac{2F_L}{\rho U^2 DH} \quad (1.7)$$

Donde F_D y F_L se definen de la siguiente manera:

$$F_D = \int_{S_C} \left(\rho v \frac{\partial v_t}{\partial n} n_y - p n_x \right) dS_C, \quad F_L = \int_{S_C} \left(\rho v \frac{\partial v_t}{\partial n} n_x - p n_y \right) dS_C \quad (1.8)$$

Siendo S_C la superficie del cilindro, normal al vector unitario $\hat{n} = (n_x, n_y, 0)$, la velocidad tangencial $v_t = \bar{v} \cdot \hat{t}$ y el vector unitario $\hat{t} = (n_y, -n_x, 0)$.

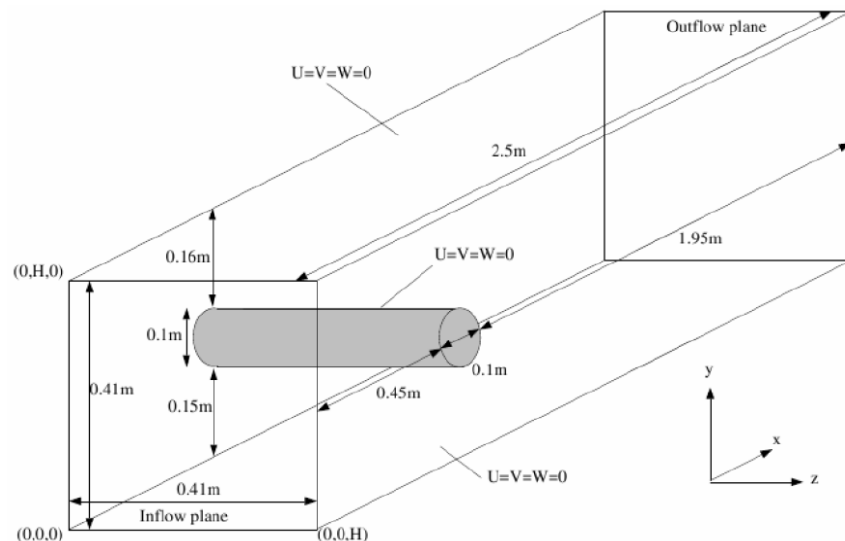


Figura 3. Dominio considerado. Imagen extraída de Bayraktar (2012)

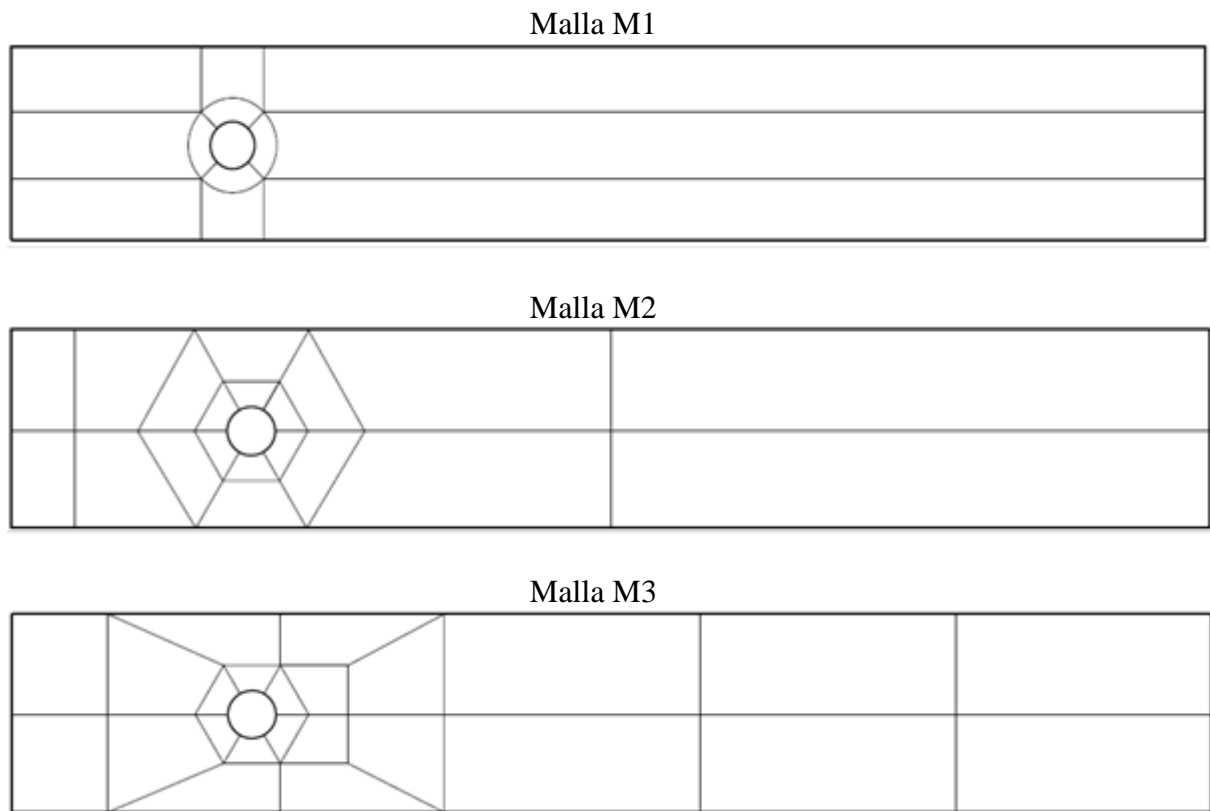


Figura 4. Distribución de subdominios para cada tipo de malla considerado en este trabajo.

5 RESULTADOS

El problema se estudió con los tres niveles y configuraciones de mallas propuestos. Se obtuvieron distintos resultados de coeficientes de sustentación (C_L) y arrastre (C_D), los cuales se presentan en las Tablas 1, 2 y 3. En todos los casos, los valores de referencia son: $C_D=6,18533$ y $C_L=0,009401$.

DISTRIBUCION D1				
Malla	C_D	C_L	Error C_D (%)	Error C_L (%)
M1_L1_D1	5.56990	0.00905	-9.95	-3.77
M1_L2_D1	6.03104	0.00416	-2.49	-55.79
M1_L3_D1	6.17103	0.00745	-0.23	-20.80
M2_L1_D1	5.60683	0.00978	-9.35	4.03
M2_L2_D1	6.01368	0.00513	-2.78	-45.45
M2_L3_D1	6.13759	0.00710	-0.77	-24.44
M3_L1_D1	5.67476	0.01558	-8.25	65.73
M3_L2_D1	5.97222	0.00823	-3.45	-12.41
M3_L3_D1	6.16152	0.00856	-0.38	-8.97

Tabla 1: Resultados coeficientes de arrastre (C_d) y sustentación (C_l),

DISTRIBUCION D2				
Malla	C_D	C_L	Error C_D (%)	Error C_L (%)
M1_L1_D2	5.92801	0.00714	-4.16	-24.01
M1_L2_D2	6.15076	0.00722	-0.56	-23.24
M1_L3_D2	6.17342	0.00924	-0.19	-1.72
M2_L1_D2	5.84589	0.01466	-5.49	55.98
M2_L2_D2	6.07826	0.01004	-1.73	6.75
M2_L3_D2	6.16489	0.00945	-0.33	0.54
M3_L1_D2	5.90826	0.01314	-4.48	39.75
M3_L2_D2	6.03742	0.00988	-2.39	5.10
M3_L3_D2	6.14971	0.00872	-0.58	-7.24

Tabla 2: Resultados coeficientes de arrastre (C_D) y sustentación (C_L)

DISTRIBUCION D3				
Malla	C_D	C_L	Error C_D (%)	Error C_L (%)
M1_L1_D3	5.82484	0.01729	-5.83	83.96
M1_L2_D3	6.10988	0.00950	-1.22	1.12
M1_L3_D3	6.16751	0.00970	-0.29	3.24
M2_L1_D3	5.76687	0.01892	-6.77	101.26
M2_L2_D3	6.04189	0.01171	-2.32	24.61
M2_L3_D3	6.15864	0.00988	-0.43	5.11
M3_L1_D3	5.82013	0.02018	-5.90	114.70
M3_L2_D3	5.99783	0.01310	-3.03	39.42
M3_L3_D3	6.13888	0.00955	-0.75	1.60

Tabla 3: Resultados coeficientes de arrastre (C_D) y sustentación (C_L)

Los resultados varían en todas las simulaciones realizadas ya que dependen de la cantidad de celdas, la disposición de éstas alrededor del cilindro y debido a la calidad de la malla en cada caso. Los resultados marcados en verde y rojo son aquellos con mayor y menor exactitud obtenidos para cada coeficiente. Es de notar que los resultados de coeficiente de arrastre poseen un rango de error mucho más acotado comparado con los resultados de sustentación. En la mayoría de los casos (excepto en el cálculo de sustentación para las mallas M1 y M2 con distribución D1) el resultado de la simulación mejora al aumentar el nivel de discretización del mallado. Los mejores resultados se obtuvieron considerando una distribución de elementos tipo D2 y nivel de discretización L3, mientras que las peores predicciones se obtuvieron con el nivel de discretización L1. Como ejemplo de los campos de

velocidad obtenidos, se presentan dos casos extremos en la Fig. 5.

Analizando distintos parámetros de calidad de la malla como la no ortogonalidad y distorsión angular obtenidos a través de comando checkMesh de OpenFOAM[®], se observa que estos varían en las distintas mallas afectando el resultado de los coeficientes de arrastre y sustentación. Los resultados agrupados por nivel de discretización se presentan en las Figs. 6 & 7. En ellas se traza una recta de tendencia, cuya pendiente remite a la sensibilidad del error cometido con respecto del mencionado parámetro de la malla. Estos resultados están resumidos en la Tabla 4.

Se observa que al aumentar la cantidad de celdas consideradas, las mallas pasan a ser menos dependientes de estos parámetros, ya que la pendiente del error como función de ellos disminuye (Tabla 4). En las figuras 6 & 7 queda de manifiesto en el caso del error en el coeficiente de arrastre disminuye a medida que lo hace la no ortogonalidad y la distorsión angular, lo que determina la importancia de estos dos factores al momento de realizar el mallado.

	Error	Err. promedio (%)	Err. Min (%)	Err. Max (%)	Pendiente No Ortogonalidad	Pendiente Skewness
L1	C _D	-6.69	-4.16	-9.95	-0.0016	-0.0157
	C _L	48.69	-3.77	114.70	0.1116	0.0622
L2	C _D	-2.22	-0.56	-3.45	-0.0043	-0.0159
	C _L	-6.65	1.12	-55.79	0.0966	0.0617
L3	C _D	-0.44	-0.19	-0.77	-0.00098	-0.0055
	C _L	-5.85	-0.33	-24.44	0.00064	0.0130

Tabla 4: Errores máximos, mínimos y pendientes para cada nivel de discretización.

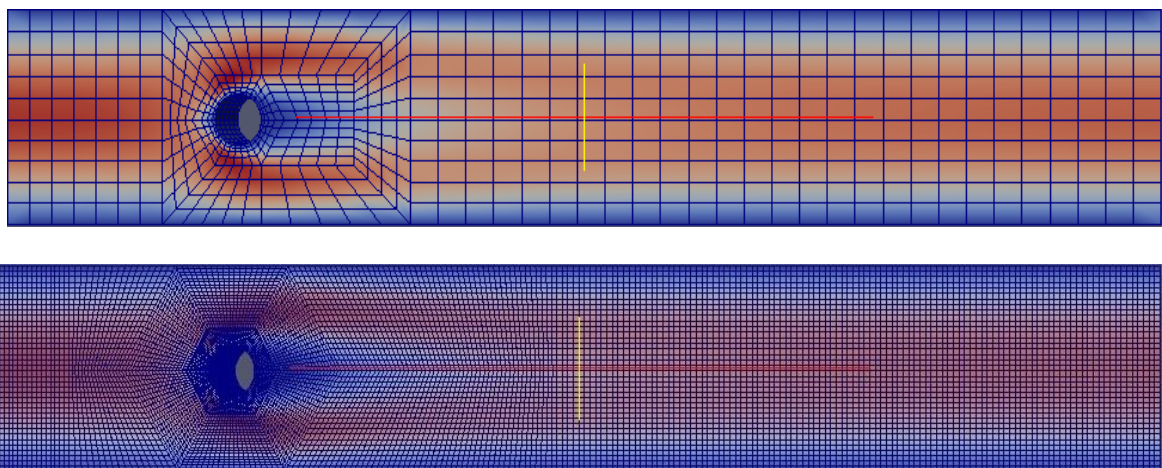


Figura 5. Ejemplo de resultados del módulo de la velocidad para M3_L1_D3 (arriba) y M2_L3_D1 (abajo)

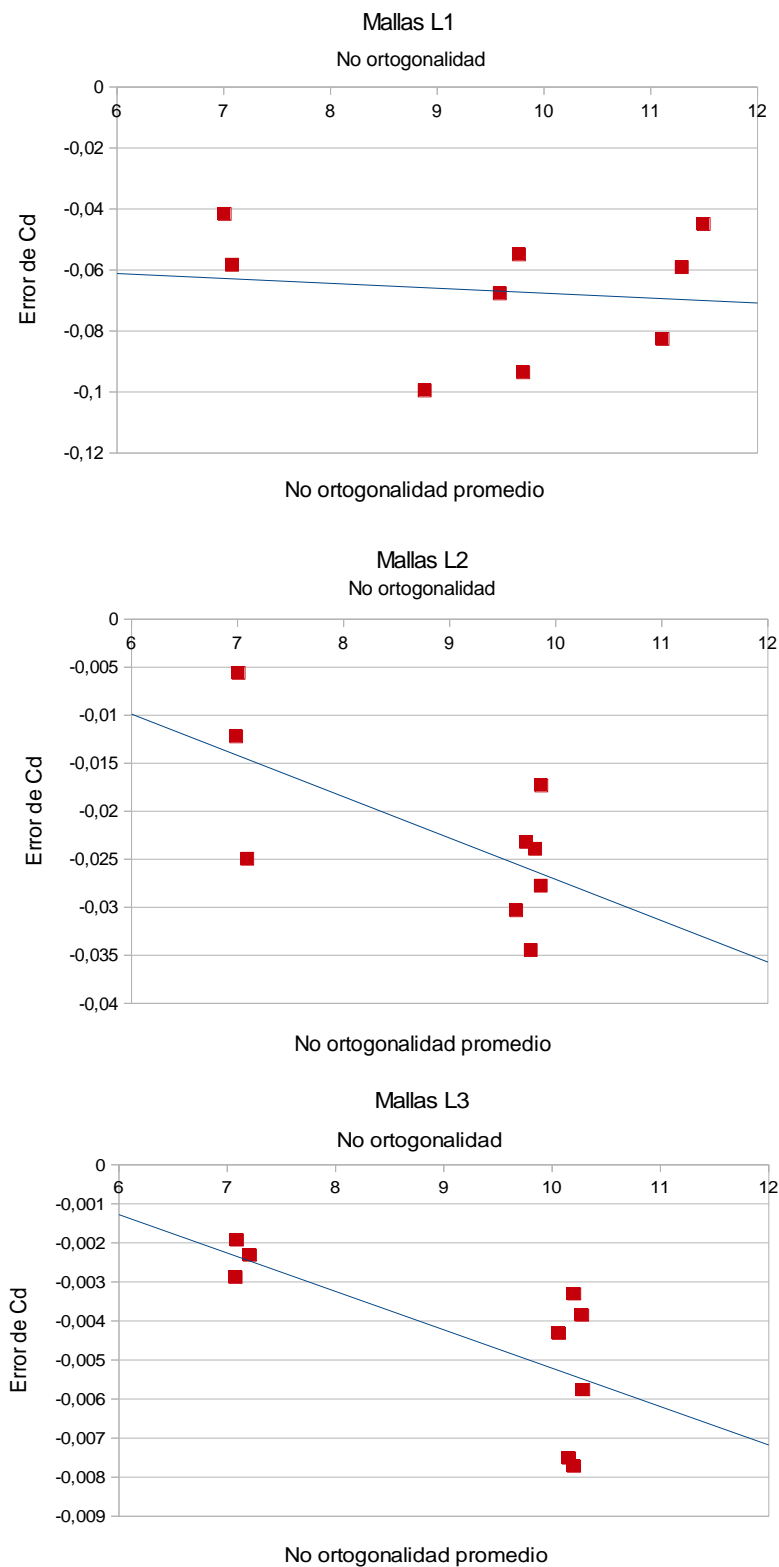


Figura 6. Tendencias del error cometido en el cálculo del coeficiente de arrastre en función de la no ortogonalidad de la malla para los niveles L1, L2 y L3 de discretización

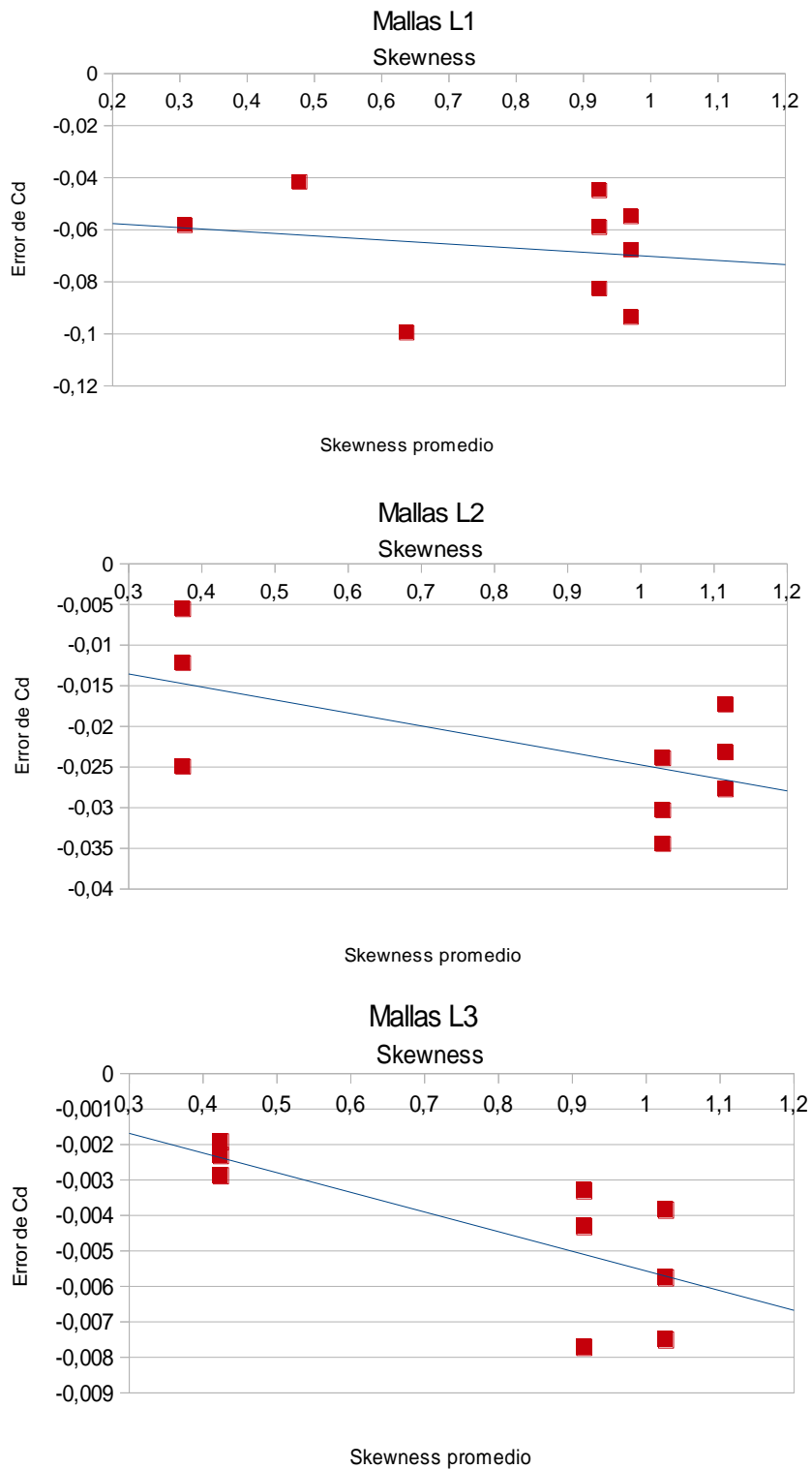


Figura 7. Tendencias del error cometido en el cálculo del coeficiente de arrastre en función de la distorsión angular de la malla para los niveles L1, L2 y L3 de discretización

Finalmente, si se analizan los resultados en función del volumen promedio de las celdas consideradas, se observa claramente la dependencia del error cometido como función de la cantidad de celdas consideradas (ver Fig. 8). Un incremento en la cantidad de celdas

(disminución del volumen promedio de ellas) reduce el error cometido en la simulación. En los casos aquí analizados, se obtiene una reducción de orden menor a la unidad.

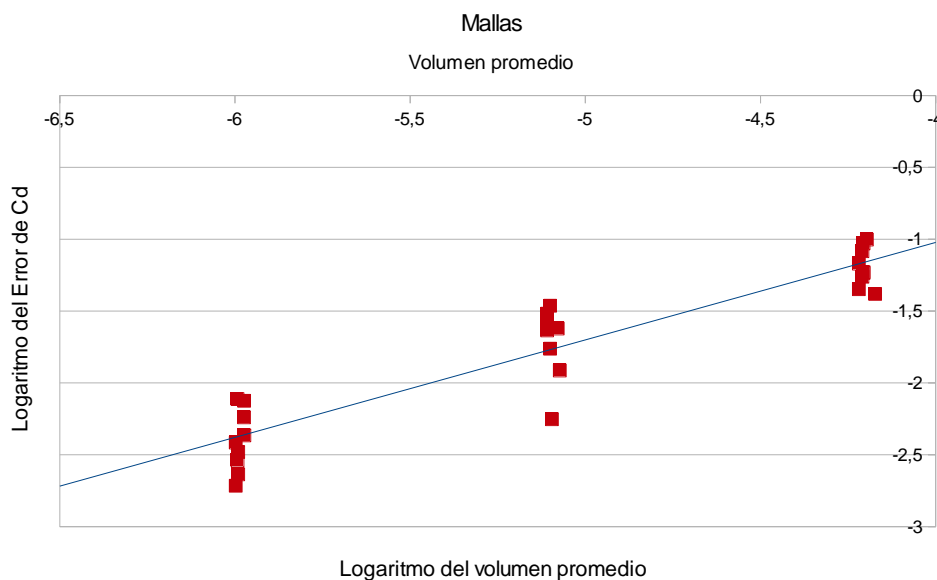


Figura 8. Logaritmo del error cometido como función del logaritmo del volumen medio de las celdas en cada nivel de discretización considerado.

6 CONCLUSIONES

Se analizó el efecto de la utilización de distintos tipos de mallas en la resolución de un caso simple de mecánica de fluidos. Los resultados obtenidos fueron comparados contra valores de referencia del coeficiente de arrastre y sustentación.

Se observó una clara dependencia entre el error obtenido y el nivel de discretización considerado, siendo el nivel L3 en el cual se obtuvieron resultados con menor error. Otros factores relacionados con la calidad de la malla tales como la no ortogonalidad y distorsión geométrica promedio fueron analizados, mostrando ser determinantes al momento de obtener resultados numéricos con menor error. El error cometido en el cálculo del coeficiente de arrastre es mucho menos dependiente de la no-ortogonalidad y distorsión angular de la malla para cada nivel de discretización que en el caso del coeficiente de sustentación.

Una distribución de elementos como la D2 presenta un buen compromiso en el cálculo de ambos coeficientes.

Resultados clásicos, como la necesidad de tener una mayor cantidad de elementos y mantener bajos niveles de no ortogonalidad y distorsión geométrica, fueron recuperados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el proyecto de investigación “Estrategias de automatización, control y modelado aplicadas a la resolución de problemas tecnológicos” Res. 673/13 de la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional de Quilmes.

REFERENCIAS

- Bayraktar, E., Mierka, O. And Turek, S., *Benchmark computations of 3D laminar flow around a cylinder with CFX, OpenFOAM[®] and FeatFlow*, Int. J. Computational Science and Engineering, Vol.7, No.3, pp.253-266, 2012.
- Braack, M. And Richter, T., *Solutions of 3D Navier-Stokes benchmark problems with adaptative finite elements, computers and Fluids*, Vol. 35, No. 4, pp.372-392, 2006.
- Ferziger, J.H. And Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 2002.
- Jasak, H., *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Thesis, University of London, 1996.
- John, V., *On the efficiency of linearization schemes and coupled multigrid in the simulation of a 3D flow around a cylinder*, Int. J. Numer. Math. Fluids, Vol.50, No 7 pp. 845-862, 2006.
- Juretic, F., *Error Analysis in Finite Volume CFD*, Thesis, University of London, 2004.
- OpenFOAM[®] User's Guide (Version 2.2.2)*, Available at <http://www.OpenFOAM.org/docs/>, 2013.