

## ANÁLISIS HIDROMECAÁNICO DE UN MEDIO POROSO DISCONTINUO UTILIZANDO XFEM

J. Lucero<sup>a</sup>, M. Luege<sup>a</sup> y C. Torrijos<sup>b</sup>

<sup>a</sup>CONICET, Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800,  
4000 S.M. de Tucumán, Argentina, <http://www.herrera.unt.edu.ar/iest/>

<sup>b</sup>CONICET, LEMIT, Universidad Nacional de La Plata, 52 y 121, 1900 La Plata, Argentina,  
<http://www.lemmit.gov.ar/>

**Palabras Clave:** Permeabilidad, Medios porosos, XFEM, transporte de fluidos

**Resumen.** La modelación del transporte de fluidos en materiales porosos fisurados es de suma importancia en diversos problemas industriales. Para una evaluación numérica confiable de la durabilidad es fundamental analizar la interacción entre el estado actual de deterioro del medio y el transporte de fluido a través del mismo. En este trabajo, se presenta un modelo hidro-mecánico acoplado, basado en la teoría de Biot-Coussy. Suponiendo un medio poroso completamente saturado, las ecuaciones que gobiernan el problema se obtienen a partir del balance de masa y de momentum, tanto del fluido como del sólido poroso, y de los modelos constitutivos del sólido y del fluido en términos de presión y desplazamiento. Para el tratamiento de las discontinuidades, se aplica el Método de Elementos Finitos eXtendido mientras que el flujo de fluido a través de las fisuras se modela utilizando una extensión de la ley de Poiseuille para flujo de fluidos viscosos entre dos placas paralelas, donde la conductividad depende de la viscosidad dinámica del fluido y de la apertura de la fisura. Se presentan resultados numéricos de ensayos en medios fisurados, analizando tanto la sensibilidad de los resultados a la apertura de fisura como el acoplamiento con el campo de desplazamientos.

## 1. INTRODUCCIÓN

La modelación del transporte de fluidos en materiales porosos fisurados es objeto de estudio en muchas aplicaciones industriales, tales como, la fracturación hidráulica en la ingeniería del petróleo, el análisis de la permeabilidad para la estimación de daños, ingeniería ambiental, etc. El aumento del nivel de daño modifica las propiedades hidromecánicas del medio, por lo cual resulta de gran interés el estudio de procesos de fisuración y su influencia en el flujo de fluido a través del mismo. El estudio experimental del flujo estacionario en rocas fracturadas, formaciones geológicas u hormigón bajo ciertas condiciones, ofrecen información acerca de la permeabilidad efectiva del medio, de los poros conectados y la interconexión entre las grietas micro y macro del material en estudio. Si el medio presenta discontinuidades discretas, ya sean débiles como bandas de corte, o fuertes como presencia de grietas, el flujo presenta grandes variaciones resultando altamente anisótropo. El medio poroso es un sistema multifásico formado por una estructura o matriz porosa, una fase fluida y otra gaseosa. Estas fases presentan diferentes propiedades hidromecánicas e interaccionan entre sí. La predicción completa del comportamiento de la deformación del material sólido y de la interacción con un flujo de fluido, se consigue mediante la solución completa del sistema acoplado. Teniendo en cuenta estas problemáticas, reviste gran importancia disponer un modelo robusto y estable, capaz de reproducir la interacción entre el estado actual del medio y el transporte a través del mismo.

En la literatura, el tema de transporte de fluidos en medios porosos fisurados o en proceso de fisuración ha sido tratado de diferentes maneras: [Boone y Ingraffea \(1990\)](#) presentaron un procedimiento numérico para la simulación de la propagación de fisuras por causas hidráulicas en materiales poroelásticos, combinando el MEF con el método de diferencias finitas; [Schrefler \(1995\)](#) y [Secchi et al. \(2007\)](#) modelaron el crecimiento de fisuras cohesivas en medios porosos totalmente saturados usando el MEF con mallas adaptativas; [Segura y Carol \(2008\)](#) propusieron una formulación hidromecánica para materiales totalmente saturados con discontinuidades pre-existentes basadas en el MEF con elementos de interfaz de espesor cero. Con el objeto de simular la presencia de una discontinuidad o fisura en el medio continuo, se han desarrollado métodos más apropiados como son el Embedded Finite Element Method (EFEM) ([Armero y Linder, 2009](#)) y el eXtended Finite Element Method (XFEM) ([Moes et al., 1999](#)). EFEM modela la falla de sólidos discretamente a través de la disipación local a lo largo de las discontinuidades. XFEM considera una cinemática enriquecida, en donde las variables de estado son interpoladas a través de funciones regulares y funciones de enriquecimiento en términos de funciones del tipo *level set*, las cuales permiten describir un campo a través de un elemento más general. Este método permite el modelado de la geometría de la discontinuidad de forma independiente de la malla, y evita por completo la necesidad de regenerar la malla a medida que la fisura crece. La extensión de XFEM al caso de medios porosos puede encontrarse en [de Borst et al. \(2009\)](#), [Mohammadnejad y Khoei \(2013\)](#) y es el método utilizado a continuación.

En este trabajo se presenta un modelo hidro-mecánico para medios porosos saturados discontinuos. Las ecuaciones que gobiernan el problema se discretizan espacialmente mediante la técnica XFEM, utilizando y analizando diversas funciones de enriquecimiento. La integración en el tiempo es resuelta a través del método de Euler implícito. Se considera un flujo darciano para la matriz permeable y para la discontinuidad. El problema resultante es de tipo no lineal, y se resuelve mediante el método de Newton Raphson. El modelo se utiliza en la resolución de problemas mecánicos y poromecánicos lineales, los que se resuelven de forma analítica y se estudia las funciones de enriquecimiento y su participación de la solución global. Se complementa con un ejemplo de un problema bidimensional en presencia de una fisura. Se analiza el

acoplamiento entre el campo mecánico y el flujo a través de la fisura.

## 2. ECUACIONES DE BALANCE

### 2.1. Ecuaciones que gobiernan el flujo en un medio poroso saturado

Un medio poroso saturado  $\Omega$  está constituido por un esqueleto o fase sólida deformable y por un espacio poroso ocupado completamente por fluido. Asumiendo pequeñas deformaciones, procesos isotérmicos y desprecio de términos gravitatorios, convectivos y aceleraciones, la ecuación de conservación de momentum se escribe como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy. La ecuación de balance de masa del medio poroso se expresan como:

$$\frac{\partial \rho_\pi}{\partial t} + \rho_\pi \nabla \cdot \mathbf{v}_\pi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con } \pi = s, f \quad (2.2)$$

donde los subíndices  $s$  y  $f$  identifican la fase sólida y fluída, respectivamente. Empleando la condición  $n_s + n_f = 1$ , donde  $n_s$  y  $n_f$  representan las fracciones de volumen de la fase sólida y fluída, e introduciendo en (2.1) las expresiones que relacionan los cambios de densidad de masa sólida con el cambio de volumen de la fase sólida y el cambio de densidad de masa del fluido con la presión del fluido  $p$  (Ver (Coussy, 2010) para mas detalles de la deducción) se obtiene la siguiente expresión de la conservación de masa en  $\Omega$

$$\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_s + n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v}_f$  son las velocidades de la fase sólida y fluída respectivamente y  $K_f$  es el módulo de compresibilidad o de Biot.

La descripción del problema se complementa adicionando las condiciones de borde de tipo Dirichlet (para desplazamientos y presiones) y de tipo Neumann (para fuerzas y flujos de fluido). Las condiciones para la fase solida se escriben en términos de fuerzas y desplazamientos

$$\mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_p \quad \text{en } \Gamma_t \quad \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.4)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ ,  $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ ,  $\mathbf{n}_\Gamma$  es la normal exterior al contorno (Figura 1). Las condiciones de borde para la fase de fluido se escriben en terminos de flujos y presiones

$$n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{q}_p \quad \text{en } \Gamma_q \quad p = p_p \quad \text{en } \Gamma_p \quad (2.5)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$  y  $\Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset$ , y las condiciones iniciales en el tiempo  $t = 0$ , con  $\pi = s, f$ .

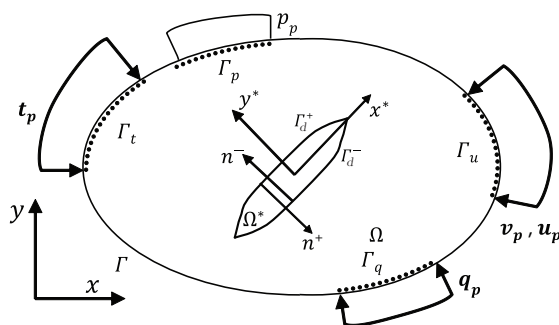
$$\mathbf{u}_\pi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_\pi^0 \quad p(\mathbf{x}, 0) = p^0 \quad (2.6)$$

Como se muestra en la Figura 1, el dominio contiene una discontinuidad  $\Gamma_d$  donde se pueden generar fuerzas cohesivas tales que:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d^+} = \mathbf{t}^+ \quad \text{en } \Gamma_d^+ \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d^-} = \mathbf{t}^- \quad \text{en } \Gamma_d^- \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{t}^+$  y  $\mathbf{t}^-$  son las fuerzas cohesivas actuando sobre las caras opuestas de la fisura  $\Gamma_d^+$  y  $\Gamma_d^-$ , respectivamente. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{n}_{\Gamma^+} = -\mathbf{n}_{\Gamma^-}$ , se puede escribir

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^+ = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^- = \mathbf{t}^+ = \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_c - p \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} \quad \text{en } \Gamma_d \quad (2.8)$$

Figura 1: Dominio  $\Omega$  en presencia de una discontinuidad  $\Gamma_d$ .

## 2.2. Leyes constitutivas

En la mecánica de medios porosos saturados, la tensión es expresada en términos de la tensión efectiva para tener en cuenta la compresibilidad de las partículas sólidas, mediante la forma incremental

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \alpha \mathbf{I} \dot{p} \quad \dot{\phi} = \alpha \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{K_f} \dot{p} \quad (2.9)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})/2$  es el tensor de deformaciones,  $\phi$  es la porosidad,  $\alpha$  es la constante de Biot,  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad y  $K_f$  es el módulo de Biot.

Para la descripción del flujo a través del medio poroso, se adopta la ley de Darcy

$$n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -k_f \nabla p \quad (2.10)$$

donde  $k_f$  es la permeabilidad del medio poroso,  $n_f$  es la fracción de volumen fluido respecto al volumen total,  $\nabla p$  es el gradiente de presión.

## 2.3. Forma débil de las ecuaciones que gobiernan el problema

Para la obtención de la forma débil de las ecuaciones de balance, se multiplican el balance de momentum (2.1) y el balance de masa (2.3) por funciones de prueba cinemáticamente admisibles con el campo de desplazamientos,  $\delta \mathbf{u}$ , y con el campo de presiones,  $\delta p$ , como sigue

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \delta \mathbf{u} \, dv = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_s \delta p \, dv + \int_{\Omega} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \delta p \, dv + \int_{\Omega} \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, dv = 0$$

Aplicando el teorema de divergencia, y las condiciones de borde (2.4), (2.5) y (2.7), las ecuaciones (2.11)<sub>1</sub> y (2.11)<sub>2</sub> pueden reescribirse como sigue

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \mathbf{u}) \, dv - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_p \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_{\Gamma_d} (\mathbf{t}_c - p \mathbf{n}_{\Gamma_d}) [\delta \mathbf{u}] \, da = 0$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_s \delta p \, dv + \int_{\Omega} \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p \, dv - \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{v}_r \, dv + \int_{\Gamma_q} \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_q \delta p \, da + \int_{\Gamma_d} [\mathbf{v}_r] \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} \delta p \, da = 0 \quad (2.12)$$

donde  $[[\delta \mathbf{u}]] = (\delta \mathbf{u}^- - \delta \mathbf{u}^+)$  es el salto del campo desplazamientos en las caras opuestas de la fisura, y  $\mathbf{v}_r = n_f(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$  la velocidad relativa entre el fluido y matriz sólida. El último término de la ecuación (2.12)<sub>2</sub> representa el salto en el flujo que pasa a través de las caras de la fisura o discontinuidad, el cual puede describirse como  $\int_{\Gamma} [[\mathbf{v}_r \delta p]] \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} da$ , ya que la presión se supone constante en el espesor de la fisura. En este trabajo se supondrán nulas las fuerzas cohesivas, es decir  $\mathbf{t}_c = \mathbf{0}$ , ya que sólo se tendrá en cuenta la presión de fluido aplicada a ambos lados de la fisura o discontinuidad.

**2.4. Balance de masa en la discontinuidad**

Para la integración del flujo dentro de la fisura, se recurre a plantear el balance de masa en el dominio  $\Omega^*$  complementario al dominio  $\Omega$  (Figura 1). Suponiendo que en  $\Omega^*$  el coeficiente de Biot vale  $\alpha = 1$  y  $n_f = 1$ , es decir que dentro de la fisura el volumen de fluido ocupa todo el volumen. De esta forma, el balance de masa en  $\Omega^*$  resulta

$$\int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v}_s \delta p dv + \int_{\Omega^*} \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \delta p dv + \int_{\Omega^*} \delta p \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{2.13}$$

Aplicando nuevamente el teorema de divergencia e introduciendo la Ley de Darcy (2.10) se obtiene

$$\int_{\Gamma} [[\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s]] \cdot \mathbf{n}^{\Gamma} \delta p da = - \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v}_s \delta p dv + \int_{\Omega^*} \nabla \cdot (k_d p) \cdot \nabla \delta p dv - \int_{\Omega^*} \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p dv. \tag{2.14}$$

Considerando que la apertura de la fisura es mucho menor que la longitud de la misma y suponiendo que la componente tangencial de la velocidad  $v_{sx^*}$  varía linealmente con la dirección  $y^*$ , la primera integral sobre  $\Omega^*$  de (2.13) se calcula

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v}_s \delta p dv &= \int_{\Gamma_d} \int_{-h}^h \left( \frac{\partial v_{sx^*}}{\partial x^*} + \frac{\partial v_{sy^*}}{\partial y^*} \right) \delta p dy^* da \\ &= \int_{\Gamma_d} \left( 2h \left\langle \frac{\partial v_{sx^*}}{\partial x^*} \right\rangle + [[v_{sy^*}]] \right) \delta p da \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde el símbolo  $\langle \cdot \rangle$  representa el valor medio de la función. De forma similar, la derivada tangencial de la presión no varía con la dirección  $y^*$  y la derivada normal desaparece ya que la presión es considerada constante en la altura de la fisura, por lo cual la segunda integral de (2.13) se escribe

$$\int_{\Omega^*} \nabla \cdot (k_d p) \cdot \nabla \delta p dv = \int_{\Gamma_d} \int_{-h}^h k_d \nabla p \cdot \nabla \delta p dy^* da = \int_{\Gamma_d} 2h k_d \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\partial \delta p}{\partial x^*} da \tag{2.16}$$

De forma similar, la tercera integral se resuelve como

$$\int_{\Gamma_d} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p dv = \int_{\Gamma_d} 2h \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p da \tag{2.17}$$

y el flujo dentro de la fisura se escribe como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s]] \cdot \mathbf{n}^{\Gamma} \delta p da &= - \int_{\Gamma_d} 2h \left\langle \frac{\partial v_{sx^*}}{\partial x^*} \right\rangle \delta p da - \int_{\Gamma_d} [[v_{sy^*}]] \delta p da \\ &+ \int_{\Gamma_d} 2h k_d \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\partial \delta p}{\partial x^*} da - \int_{\Gamma_d} 2h \frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p da \end{aligned} \tag{2.18}$$

## 2.5. Discretización espacial y temporal de las ecuaciones de balance en forma débil

Para la discretización espacial, el dominio  $\Omega$  se divide en elementos finitos en donde los campos de desplazamiento y presión son interpolados. Para considerar la presencia de discontinuidades en los elementos, siguiendo la propuesta de [Moes et al. \(1999\)](#) se enriquece la aproximación standard de elementos finitos empleando la propiedad de la partición de la unidad de las funciones de forma. Usando el método de Galerkin, se aproximan por lo tanto los campos de desplazamiento  $\mathbf{u}$ , de presión  $p$  y las respectivas funciones de prueba de desplazamiento y presión,  $\delta\mathbf{u}$  y  $\delta p$  como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{u1}^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1^i + \sum_{j \in J} N_{u2}^j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_2^j + \sum_{k \in K} N_{u3}^k(\mathbf{x}) \mathbf{u}_3^k \\ p(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^i(\mathbf{x}) p_1^i + \sum_{j \in J} N_{p2}^j(\mathbf{x}) p_2^j + \sum_{k \in K} N_{p3}^k(\mathbf{x}) p_3^k \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{u1}^i(\mathbf{x}) \delta\mathbf{u}_1^i + \sum_{j \in J} N_{u2}^j(\mathbf{x}) \delta\mathbf{u}_2^j + \sum_{k \in K} N_{u3}^k(\mathbf{x}) \delta\mathbf{u}_3^k \\ \delta p(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} N_{p1}^i(\mathbf{x}) \delta p_1^i + \sum_{j \in J} N_{p2}^j(\mathbf{x}) \delta p_2^j + \sum_{k \in K} N_{p3}^k(\mathbf{x}) \delta p_3^k \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $I, J, K$  denotan el conjunto de nodos estándar, nodos enriquecidos por la función Heaviside y nodos enriquecidos por funciones asintóticas alrededor de la cabeza de la fisura respectivamente,  $(\mathbf{u}_1^i, p_1^i)$  con  $i \in I$  denotan los valores nodales de desplazamiento y presión correspondientes a la interpolación estándar de dichos campos, mientras que  $(\mathbf{u}_2^j, p_2^j)$  y  $(\mathbf{u}_3^k, p_3^k)$  con  $j \in J, k \in K$ , representan los valores nodales de desplazamiento y presión enriquecidos. Las funciones de forma estándar y enriquecidas para los campos de desplazamientos y presión se denominan  $N_{u1}^i, N_{u2}^j, N_{u3}^k, N_{p1}^i, N_{p2}^j$  y  $N_{p3}^k$  respectivamente.

En el presente trabajo se utilizan las funciones de forma enriquecidas propuestas en [Moes et al. \(1999\)](#) y [de Borst et al. \(2009\)](#), las cuales se escriben a continuación

$$\begin{aligned} N_{u2}^j(\mathbf{x}) &= N_{u1}^j H(\mathbf{x}) & N_{u3}^k(\mathbf{x}) &= N_{u1}^k F(\mathbf{x}) \\ N_{p2}^j(\mathbf{x}) &= N_{p1}^j Z(\mathbf{x}) & N_{p3}^k(\mathbf{x}) &= N_{p1}^k G(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $H$  y  $Z$  son las funciones de Heaviside y de distancia, centradas en la discontinuidad,  $F$  y  $G$  son funciones asintóticas en el entorno de la cabeza de la fisura, definidas como las bases de las soluciones analíticas para los campos de desplazamiento y presión,

$$H = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} ; Z = \begin{cases} d & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ -d & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \{F(r, \theta)\}_{l=1}^4 &= \{\sqrt{r} \cos \theta/2, \sqrt{r} \sin \theta/2, \sqrt{r} \sin \theta/2 \sin \theta, \sqrt{r} \cos \theta/2 \sin \theta\} \\ G(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin \theta/2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

con  $r$  la distancia hasta la cabeza de la fisura y  $\theta$  el ángulo con la dirección de la fisura. En [Mohammadnejad y Khoei \(2013\)](#) se propone una variante para el enriquecimiento anterior, el cual lo denominaremos con  $*$ , como sigue

$$\begin{aligned} N_{u2}^{*j}(\mathbf{x}) &= N_{u1}^j (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)) & N_{u3}^{*k}(\mathbf{x}) &= N_{u1}^k (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_k)) \\ N_{p2}^{*j}(\mathbf{x}) &= N_{p1}^j (Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}_j)) & N_{p3}^{*k}(\mathbf{x}) &= N_{p1}^k (G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}_k)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $\mathbf{x}_j$  es la coordenada del nodo  $j$ . La ventaja de esta variante a diferencia de la anterior es que las variables nodales de desplazamiento y presión globales equivalen a las variables nodales



standard, y ello debido a que  $N_{u1}^j (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)) = N_{p1}^j (Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}_j)) = 0$ . Para el campo de desplazamiento, se deben integrar únicamente los elementos que contienen la fisura. Para el campo de presión, se deben integrar además los elementos adyacentes a estos elementos.

En Cordero y Diez (2008) se propone introducir una función arista para el enriquecimiento, debido a que dicha función se anula en todos los elementos que no contienen la fisura y, en los elementos que sí la contienen, resulta nula en los nodos. Las funciones de forma enriquecidas se identifican con  $\ddagger$ , y escriben como sigue

$$\begin{aligned} N_{u2}^{\ddagger j}(\mathbf{x}) &= N_{u1}^j (\sum_{r \in J} (N_{a1}^r H(\mathbf{x}_r)) - H(\mathbf{x})) & N_{u3}^{\ddagger k}(\mathbf{x}) &= N_{u1}^k (\sum_{r \in J} (N_{a1}^r \mathbf{F}(\mathbf{x}_r)) - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ N_{p2}^{\ddagger j}(\mathbf{x}) &= N_{p1}^j (\sum_{r \in J} (N_{a1}^r Z(\mathbf{x}_r)) - Z(\mathbf{x})) & N_{p3}^{\ddagger k}(\mathbf{x}) &= N_{p1}^k (\sum_{r \in J} (N_{a1}^r G(\mathbf{x}_r)) - G(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2.24)$$

La forma discretizada de las ecuaciones que gobiernan el problema, ecuación de equilibrio (2.12)<sub>1</sub> y de continuidad (2.12)<sub>2</sub> en forma débil resulta como sigue sss

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{a(i)}^T : \boldsymbol{\sigma} \, dv - \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{B}}_{a(i)}^T (\mathbf{t}^{\Gamma} - p \mathbf{n}^{\Gamma}) \, da + \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}_{a(i)}^T \cdot \mathbf{t}^N \, da &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_{p(i)}^T \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_s \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{N}_{p(i)}^T \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{K_f} \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{B}_{p(i)}^T \cdot \mathbf{v}_r \, dv + & (2.25) \\ + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_{p(i)}^T \mathbf{v}_r \, da + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_{p(i)}^T \mathbf{v}_r \, da &= 0 \end{aligned}$$

con  $i = 1, 2, 3$  y  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}$  denotan las funciones de formas y sus gradientes respectivamente. La discretización temporal se realiza utilizando el método de Euler implícito, en dónde:

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{t^{n+1} - t^n} \quad (2.26)$$

### 3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan distintos ejemplos numéricos de verificación en los cuales se analizan las distintas funciones de enriquecimiento encontradas en la literatura y detalladas en la sección anterior.

En el primer ejemplo se resuelve el problema de una barra sujeta a un desplazamiento impuesto y que presenta una discontinuidad geométrica en el interior del mismo. En el segundo ejemplo se resuelve un flujo de fluido a través de un medio poroso uniaxial con discontinuidad material. Como último ejemplo, se estudia un elemento bidimensional que presenta una discontinuidad o fisura en su interior, analizando el flujo de fluido y su acoplamiento poromecánico.

#### 3.1. Ejemplo uniaxial con discontinuidad cinemática

En el primer ejemplo, se considera una barra de longitud  $4L$  que presenta de una discontinuidad geométrica en  $x_d = 3L/2$  como se muestra en la Figura 2(a). El comportamiento mecánico del medio es elástico lineal con Módulo de Young  $E$ . Como condiciones de borde, se considera nulo el desplazamiento en el extremo izquierdo ( $x = 0$ ), y un desplazamiento impuesto  $\bar{u}$  en el extremo derecho  $x = 4L$ .

La discretización adoptada se muestra en la Figura 2(b), la cual está formada por dos elementos lineales ( $\Omega_1$  y  $\Omega_3$ ) y un elemento cuadrático ( $\Omega_2$ ). La función Heaviside, como se observa en la Figura 2(c) toma valor  $H = 1$  o  $H = -1$ , según esté del lado izquierdo o derecho de la discontinuidad. La función de forma  $N_{j,l}^i$  se refiere a la función de forma del elemento  $i$ , asociada al

grado de libertad  $u_j$  correspondiente al nodo  $j$ . En las Figuras 2(d) y 2(e) se muestran las funciones de formas standard y enriquecidas del elemento  $\Omega_2$  cuando las funciones enriquecidas son (2.20) y (2.23), respectivamente.

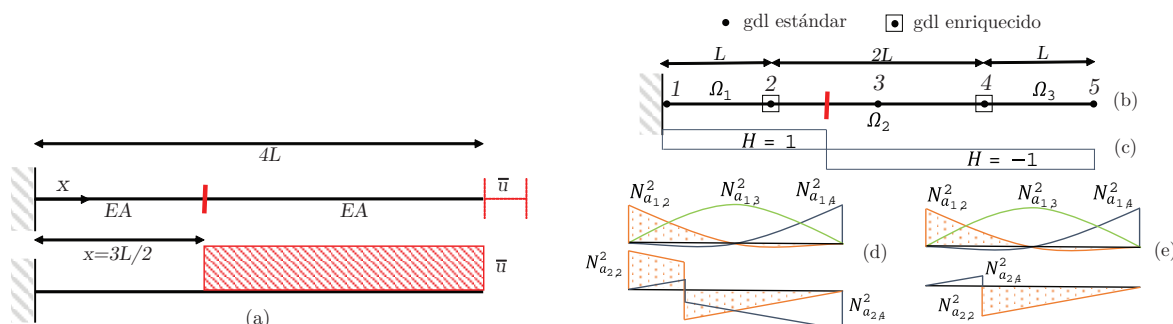


Figura 2: (a) Geometría del problema 1: elemento uniaxial con discontinuidad.(b) Discretización del problema 1. (c) Función Heaviside. Funciones de forma del elemento con discontinuidad utilizando enriquecimiento (d) estándar, (e) modificado.

Dada la presencia de una discontinuidad, el campo de desplazamiento se aproxima como sigue

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_{a_1}^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1^i + \sum_{j \in J} N_{a_2}^j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_2^j \tag{3.1}$$

donde  $I = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $J = 2, 4$  y para el caso (a):  $N_{a_2}(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})N_{p1}(\mathbf{x})$ , donde  $N_{p1}^2$  son las funciones de forma lineales del elemento  $\Omega_2$  (ver Figura 2(d)). Nótese que para un problema promecánico, estas funciones corresponden a la interpolación del campo de presión.

La matriz de rigidez de cada elemento, puede particionarse en

$$\mathbf{K}_{a(i)a(j)} = \int_0^L \mathbf{B}_{a(j)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{a(i)} dx \quad i, j = 1, 2 \tag{3.2}$$

**Elemento  $\Omega_1$ :** En todo el dominio, la función Heaviside vale  $H = 1$ . Los grados de libertad del elemento son:  $a_{1,1}$ ,  $a_{1,2}$  y  $a_{2,2}$ . Las funciones de forma se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{a_1}(x) &= \begin{bmatrix} 1 - x/L & x/L \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{a_1}(x) &= \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_{a_2}(x) &= H(x) \begin{bmatrix} x/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/L \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{a_2}(x) &= \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las particiones de la matriz de rigidez del elemento  $\Omega_1$  toman la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{a_1a_1} &= EA \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{a_1a_2} &= EA \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{a_2a_2} &= EA \int_0^L \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} [1] \end{aligned} \tag{3.4}$$



Sabiendo que  $\mathbf{K}_{a1a2} = \mathbf{K}_{a2a1}^T$ , la matriz de rigidez del elemento será:

$$\mathbf{K}_{\Omega_1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

**Elemento  $\Omega_2$ :** Los grados de libertad asociados al elemento son  $a_{1,2}$ ,  $a_{1,3}$ ,  $a_{1,4}$ ,  $a_{2,2}$  y  $a_{2,4}$ . El campo de desplazamiento resulta a partir de la interpolación cuadrática de los *gdl* regulares y de la interpolación lineal de los *gdl* estándar. En este caso, la función de enriquecimiento Heaviside toma valores distintos antes y después de la fisura. Para la resolución, puede separarse el dominio del elemento como sigue:

$$\mathbf{K}_{a(i)a(j)} = \int_0^L \mathbf{B}_{a(j)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{a(i)} dx = \int_0^{L/2} \mathbf{B}_{a(j)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{a(i)} dx + \int_{L/2}^{2L} \mathbf{B}_{a(j)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{a(i)} dx \quad (3.6)$$

donde en el dominio del primer integrando  $\Omega_2^+$ , la función Heaviside vale  $H = 1$ , y en el dominio  $\Omega_2^-$  vale  $H = -1$ . Entonces, los términos de la matriz de rigidez pueden calcularse como:

$$\mathbf{K}_{a(i)a(j)} = \mathbf{K}_{a(i)a(j)}^+ + \mathbf{K}_{a(i)a(j)}^- \quad (3.7)$$

A partir de la fórmula de interpolación de Lagrange, las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{a1}(x) &= \left[ \frac{(L-x)(2L-x)}{2L^2} \quad \frac{x(2L-x)}{L^2} \quad \frac{x(x-L)}{2L^2} \right] \quad \text{en } \Omega_2 \\ \mathbf{B}_{a1}(x) &= \left[ \frac{(x-2L)}{2L^2} + \frac{x-L}{2L^2} \quad \frac{(2L-x)}{L^2} - \frac{x}{L^2} \quad \frac{(x-L)}{2L^2} + \frac{x}{2L^2} \right] \quad \text{en } \Omega_2 \\ \mathbf{N}_{a2}(x) &= H(x) \left[ 1 - \frac{x}{2L} \quad \frac{x}{2L} \right] \quad \text{en } \Omega_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{a2}^+(x) &= \left[ 1 - \frac{x}{2L} \quad \frac{x}{2L} \right] \quad \text{en } \Omega_2^+; \quad \mathbf{B}_{a2}^+(x) = \left[ \frac{1}{2L} \quad \frac{1}{2L} \right] \quad \text{en } \Omega_2^+ \\ \mathbf{N}_{a2}^-(x) &= - \left[ 1 - \frac{x}{2L} \quad \frac{x}{2L} \right] \quad \text{en } \Omega_2^-; \quad \mathbf{B}_{a2}^-(x) = \left[ -\frac{1}{2L} \quad -\frac{1}{2L} \right] \quad \text{en } \Omega_2^- \end{aligned}$$

Las particiones de la matriz de rigidez del elemento puede calcularse como,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{a1a1} &= EA \int_0^{2L} \mathbf{B}_{a1}^T \mathbf{B}_{a1} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7/6 & -4/3 & 1/6 \\ -4/3 & 8/3 & -4/3 \\ 1/6 & -4/3 & 7/6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{a1a2} &= EA \left[ \int_0^{L/2} (\mathbf{B}_{a2}^+)^T \mathbf{B}_{a1} dx + \int_{L/2}^{2L} (\mathbf{B}_{a2}^-)^T \mathbf{B}_{a1} dx \right] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/8 & -3/4 & 5/8 \\ -1/8 & 3/4 & -5/8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{a2a2} &= EA \left[ \int_0^{L/2} (\mathbf{B}_{a2}^+)^T \mathbf{B}_{a2}^+ dx + \int_{L/2}^{2L} (\mathbf{B}_{a2}^-)^T \mathbf{B}_{a2}^- dx \right] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La matriz de rigidez del elemento  $\Omega_2$  es

$$\mathbf{K}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 7/6 & -4/3 & -1/6 & 1/8 & -1/8 \\ & 8/3 & -4/3 & -3/4 & 3/4 \\ & & 7/6 & 5/8 & -5/8 \\ & & & 1/2 & -1/2 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix}^{sim} \quad (3.10)$$

**Elemento**  $\Omega_3$ : En todo el dominio, la función Heaviside vale  $H = -1$ . Las funciones de formas enriquecidas serán en este caso:

$$\mathbf{N}_{a2}(x) = H(x) [ 1 - x/L ] = [ x/L - 1 ] \quad \mathbf{B}_{a2}(x) = [ 1/L ] \quad (3.11)$$

por lo que matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{\Omega_3} = \mathbf{K}_{\Omega_1}$ . Realizando el ensamblaje de la matriz y teniendo en cuenta las condiciones de bordes planteadas, los desplazamientos regulares y enriquecidos son:

$$a_{1,2} = \bar{u}/2 \quad a_{1,3} = \bar{u}/2 \quad a_{1,4} = \bar{u}/2 \quad a_{2,2} = -\bar{u}/2 \quad a_{2,2} = -\bar{u}/2 \quad (3.12)$$

Los desplazamientos nodales finales se calculan según la ecuación 3.1, resultando

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{1,1} && \rightarrow u_1 = 0 \\ u_2 &= a_{1,2} + N_{a2}^2(x_2) a_{2,2} && \rightarrow u_2 = 0 \\ u_3 &= a_{1,3} + N_{a2}^2(x_3) a_{2,2} + N_{a2}^4(x_3) a_{2,2} && \rightarrow u_3 = \bar{u} \\ u_4 &= a_{1,4} + N_{a2}^4(x_4) a_{2,2} && \rightarrow u_4 = \bar{u} \\ u_5 &= a_{1,5} && \rightarrow u_5 = \bar{u} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A través de las funciones de forma y desplazamientos nodales regulares y enriquecidos, se aproxima el desplazamiento del medio y se representan la composición en la Figura 3(a). Con este enriquecimiento, se observa que el desplazamiento nodal  $u_i$  no corresponde al desplazamiento regular del nodo  $i$ :  $a_{i,1}$ . En cambio, usando el enriquecimiento propuesto en (2.23):

$$\mathbf{N}_{a2}(\mathbf{x}) = (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \mathbf{N}_{p1}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

donde  $H(\mathbf{x}_i)$  son los valores de la función Heaviside en los nodos, el desplazamiento nodal  $u_i = a_{i,1}$ , ya que  $N_{a2}(\mathbf{x}_i) = 0$  para todos los nodos.

Siguiendo la misma metodología que en el caso anterior, para el elemento  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$ , se cumple que  $\mathbf{K}_{a1a2} = \mathbf{K}_{a2a1} = \mathbf{K}_{a2a2} = 0$  ya que en todo el dominio del elemento,  $H(x) = H(x_i)$ , por lo que  $N_{a2} = 0$  para todo  $x$ .

Para el elemento  $\Omega_2$ , las funciones de forma enriquecidas se representadan en la Figura 2(e). y valen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{a2}^*(x) &= [ 0 \quad x/L ] && \text{en } \Omega_2^+ & \quad \mathbf{B}_{a2}^*(x) &= [ 0 \quad 1/L ] && \text{en } \Omega_2^+ \\ \mathbf{N}_{a2}^*(x) &= [ -2 + x/L \quad 0 ] && \text{en } \Omega_2^- & \quad \mathbf{B}_{a2}^*(x) &= [ 1/L \quad 0 ] && \text{en } \Omega_2^- \end{aligned} \quad (3.15)$$

Resolviendo el sistema de forma análoga, los desplazamiento nodales regulares y enriquecidos son:

$$a_{1,2} = 0 \quad a_{1,3} = \bar{u}/2 \quad a_{1,4} = \bar{u} \quad a_{2,2} = -\bar{u}/2 \quad a_{2,2} = -\bar{u}/2 \quad (3.16)$$

Los desplazamientos nodales finales corresponden al desplazamiento regular del nodo  $i$

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{1,1} && \rightarrow u_1 = 0 \\ u_2 &= a_{1,2} + N_{a2}^2(x_2) a_{2,2} && \rightarrow u_2 = 0 \\ u_3 &= a_{1,3} + N_{a2}^2(x_3) a_{2,2} + N_{a2}^4(x_3) a_{2,2} && \rightarrow u_3 = \bar{u} \\ u_4 &= a_{1,4} + N_{a2}^4(x_4) a_{2,2} && \rightarrow u_4 = \bar{u} \\ u_5 &= a_{1,5} && \rightarrow u_5 = \bar{u} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En la Figura 3(b), se grafican las composiciones de los desplazamientos regulares y enriquecidos.

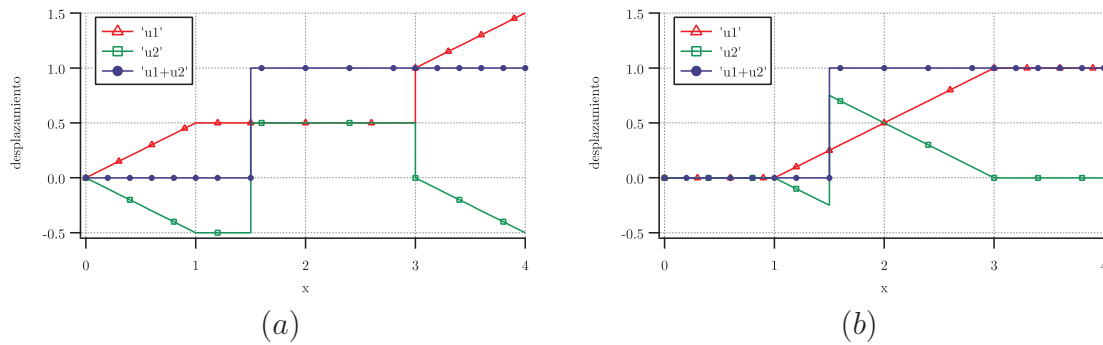


Figura 3: Desplazamientos regulares, enriquecidos y totales usando enriquecimiento (a)  $N_2$  y (b)  $N_2^*$

### 3.2. Flujo en un medio uniaxial con discontinuidad material

En el segundo ejemplo, se considera un medio uniaxial de longitud  $3L$  en presencia de una discontinuidad material ubicada en la mitad de la barra, como se muestra en la Figura 4. El medio se caracteriza por las permeabilidades  $k_1$  y  $k_2$  desde la fisura hacia la izquierda, y hacia la derecha respectivamente. Como condiciones de bordes, se prescribe nula la presión en el extremo izquierdo (nodo 4) y se inyecta un flujo sobre el borde izquierdo (nodo 1) de  $q_1 = \bar{q}$ .

Con el objeto de obtener la distribución de presiones en el dominio que presenta una disconti-

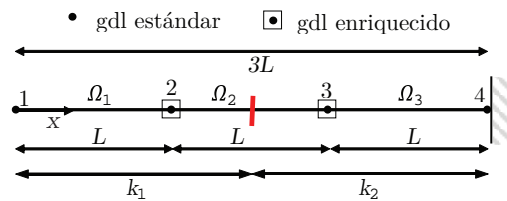


Figura 4: Geometría y discretización del problema 2.

nidad en su interior y cuya discretización es independiente de la posición de dicha discontinuidad, se considera en una primera instancia tres elementos lineales  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Las funciones de forma regulares son las mismas que las desarrolladas en el ejemplo anterior. Las funciones de enriquecimiento empleadas para discontinuidades materiales en este caso son

$$N_{p2}^{*j}(\mathbf{x}) = N_{p1}^j(Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}_j)) \tag{3.18}$$

donde  $Z(\mathbf{x})$  es la distancia entre la fisura y la coordenada  $\mathbf{x}$ ,  $Z(\mathbf{x}_i)$  es la distancia entre la fisura y los nodos del elemento en estudio y  $N_{p1}$  son las funciones de forma regulares lineales. A continuación, se analizan cada elemento.

**Elemento  $\Omega_1$ :** La función distancia entre la fisura y cualquier punto  $x$  perteneciente al dominio  $\Omega_1$ , se puede calcular como  $Z = 3L/2 - x$ . El término queda  $(Z(x) - Z(x_i)) = [-x; L - x]$ . Se puede escribir entonces,

$$N_{p2}(x) = \begin{bmatrix} -x + x^2/L \\ -(-x + x^2/L) \end{bmatrix} \quad B_{p2}(x) = \begin{bmatrix} 2x/L - 1 \\ -(2x/L - 1) \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_1 \tag{3.19}$$

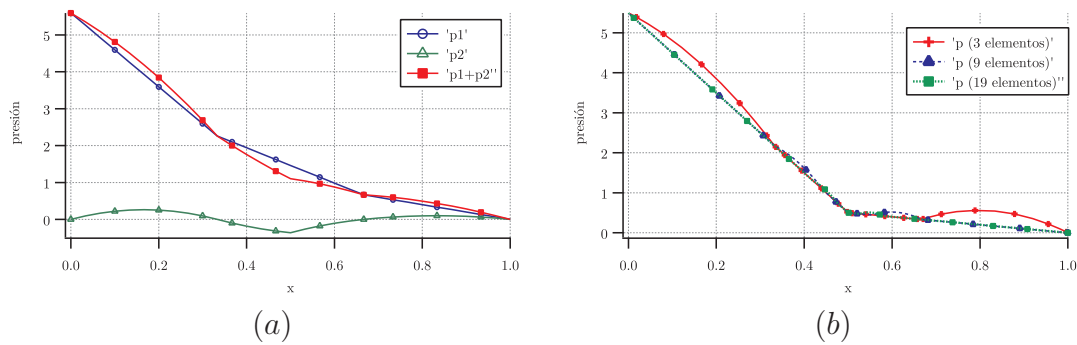


Figura 5: (a) Distribución de presiones regulares, enriquecidas y totales para una discretización de 3 elementos. (b) Presiones totales para discretizaciones de 3, 9 y 19 elementos.

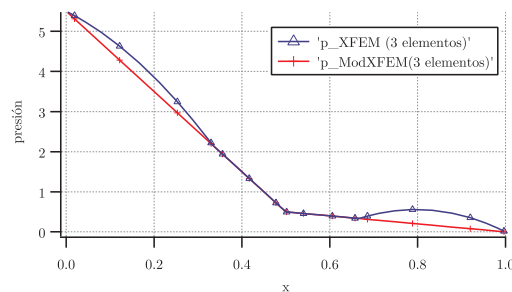


Figura 6: Distribución de presiones resueltas analíticamente y con enriquecimiento modificado.

**Elemento  $\Omega_2$ :** La función distancia entre la fisura y cualquier punto  $x$  ubicado desde la fisura hacia la izquierda ( $\Omega_2^+$ ), se puede calcular como  $Z = L/2 - x$  y el término como  $(Z(x) - Z(x_i)) = [-x; -x]$ , mientras que para un punto ubicado hacia la derecha ( $\Omega_2^-$ ),  $Z = x - L/2$  y  $(Z(x) - Z(x_i)) = [x - L; x - L]$  (recordar que siempre la función distancia  $Z \geq 0$ ). Las funciones de forma y gradientes se escriben como:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{p2}(x) &= \begin{bmatrix} -x - x^2/L \\ -x^2/L \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{p2}(x) &= \begin{bmatrix} 2x/L - 1 \\ -(2x/L - 1) \end{bmatrix} & \text{en } \Omega_2^+ \\ \mathbf{N}_{p2}(x) &= \begin{bmatrix} 2x - L - x^2/L \\ x^2/L - x \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{p2}(x) &= \begin{bmatrix} 2 - 2x/L \\ -1 + 2x/L \end{bmatrix} & \text{en } \Omega_2^- \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Elemento  $\Omega_3$ :** Similar a  $\Omega_1$ , la distancia se define como  $Z = x + L/2$ , y el término de enriquecimiento queda como  $(Z(x) - Z(x_i)) = [x; x - L]$ , y las funciones de forma como

$$\mathbf{N}_{p2}(x) = \begin{bmatrix} x - x^2/L \\ -(x - x^2/L) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{p2}(x) = \begin{bmatrix} 1 - 2x/L \\ -(1 - 2x/L) \end{bmatrix} \quad \text{en } \Omega_3 \quad (3.21)$$

Las matrices de los elementos  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  quedan como:

$$\mathbf{K}_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} k_1/L & -k_1/L & 0 \\ -k_1/L & k_1/L & 0 \\ 0 & 0 & k_1 L/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\Omega_3} = \begin{bmatrix} k_1/L & -k_1/L & 0 \\ -k_1/L & k_1/L & 0 \\ 0 & 0 & k_1 L/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_2} = k_1 \begin{bmatrix} 1/2L & -1/2L & 1/4 & 1/4 \\ -1/2L & 1/2L & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & L/6 & L/12 \\ 1/4 & -1/4 & L/12 & L/6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1/2L & -1/2L & -1/4 & -1/4 \\ -1/2L & 1/2L & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & L/6 & L/12 \\ -1/4 & 1/4 & L/12 & L/6 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Ensamblando la matriz de rigidez global y realizando un proceso similar al ejercicio anterior, se determinan la distribución de presiones. En la Figura 5(a), se representa la parte regular, enriquecida y global de la presión a lo largo del medio. La distribución real es bilineal. Se observa una perturbación del campo global en los elementos adyacentes al que contiene la fisura. En la Figura 5(b) se muestran las distribuciones de presión globales para mayores discretizaciones (3, 9 y 19 elementos). Se observa la convergencia con el aumento de la discretización.

A posterior, se calcula el mismo ejemplo con el enriquecimiento modificado propuesto por Cordeiro (2.24),

$$\mathbf{N}_{p2}^{\dagger j}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{p1}^j \left( \sum_{r \in J} (\mathbf{N}_{a1}^r Z(\mathbf{x}_r)) - Z(\mathbf{x}) \right) \quad (3.23)$$

La comparación se muestra en la Figura 5(c). Se observa una respuesta mas regular y uniforme comparada con la modificación de las funciones de enriquecimiento.

### 3.3. Flujo tipo Poiseuille dentro de una fisura interna de un medio bidimensional

En el tercer ejemplo, se considera una matriz sólida permeable de dimensiones  $L_x = 6$  y  $L_y = 6$ , con una permeabilidad uniforme isotrópica de  $k_m = 1$ , coeficiente de biot  $\alpha = 1$  y módulo de compresibilidad  $K_f = 1e18GPa$ , con el fin de simular la cuasi-incompresibilidad del fluido. El medio tiene una fisura central de longitud  $a = 2$  como se muestra en la Figura 7(a). El comportamiento mecánico del sólido es elástico lineal con módulo de Young de  $E = 30$  y módulo de Poisson de  $\mu = 0,2$ . Se impone un gradiente de presiones unitario en la dirección  $y$ , resultando una presión  $p = 6$  en la cara superior y nula en la cara inferior. En las caras laterales queda impedido el flujo. En cuanto al campo de desplazamiento, para evitar el movimiento de cuerpo rígido, se restringe el desplazamiento vertical de la cara inferior, y horizontal de la cara lateral izquierda. El modelo basado en XFEM esta formado por 380 elementos mixtos con funciones de formas bicuadráticas para el campo de desplazamiento y bilineales para el campo de presión. La integración de los elementos es resuelta a través de la Cuadratura de Gauss, tomando entre 36 y 100 puntos de integración con el objetivo de reproducir el campo discontinuo de desplazamiento.

En la Figura 7(b), 7(c) y 7(d), se muestran la distribución de presiones para diferentes valores de permeabilidades:  $k_d = 6,28, 0,628, 0,0628$ , o  $\lambda = 1, 0,1, 0,01$ , con. En la Figura 8(a), se presenta las presiones calculadas sobre un eje central que coincide con la fisura. Debido al acoplamiento entre el campo de presiones y el de desplazamiento, se produce una apertura adicional de fisura cuando circula el fluido. En la Figura 8(b), (c) y (d) se representa los desplazamientos de los puntos de Gauss cercanos a la fisura.

## 4. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha presentado el problema de flujos en medios porosos fisurados empleando XFEM. El acoplamiento hidromecánico en el medio poroso ha sido modelado mediante la

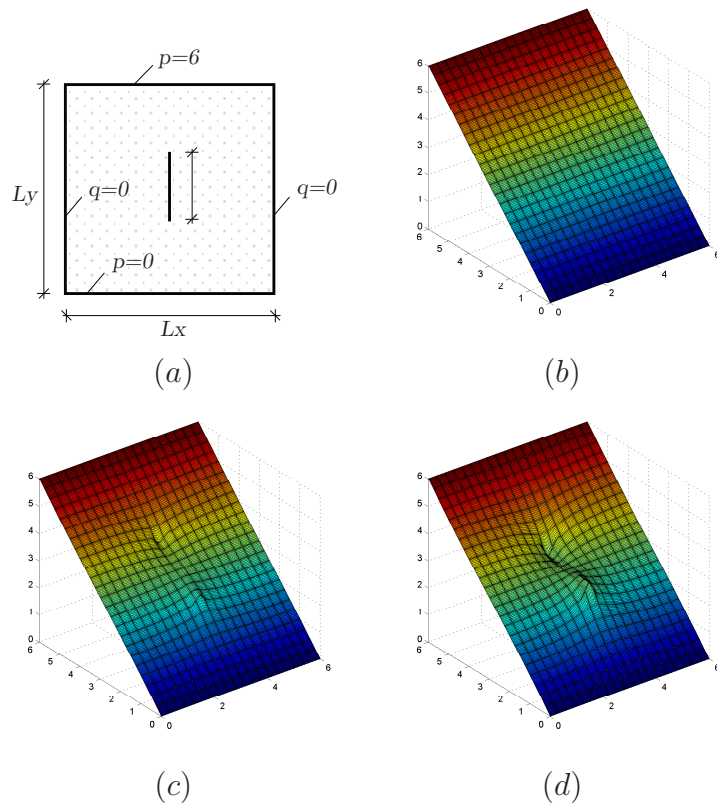


Figura 7: (a) Geometría del problema 3. (b),(c) y (d) Campo de presiones  $p(x, y)$  resultante para un gradiente uniforme de presiones paralelo a la fisura para  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0,1$  y  $\lambda = 0,01$ .

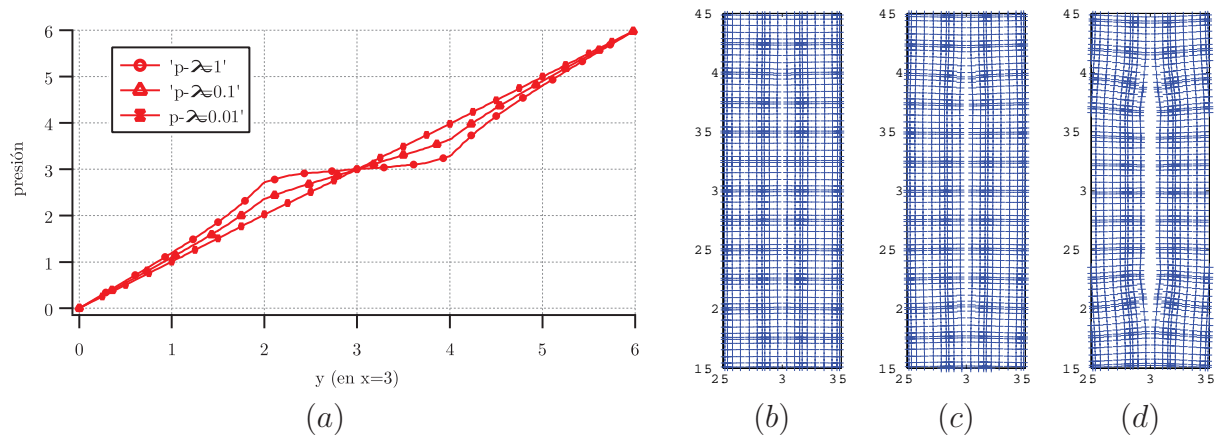


Figura 8: (a) Presión a lo largo de la fisura para diferentes valores de  $\lambda$ . Apertura de fisura debido a la circulación de fluido para (b)  $\lambda = 1$ , (c)  $\lambda = 0,1$  y (d)  $\lambda = 0,01$

teoría de Biot-Coussy. Para el flujo de fluido a través de una discontinuidad, se ha desarrollado una formulación utilizando una extensión de la ley de Poiseuille para flujos viscosos entre dos placas paralelas. Se emplearon elementos mixtos del tipo 9/4 para la obtención de soluciones estables para el problema acoplado. El modelo ha sido aplicado en problemas unidimensionales con discontinuidades geométricas y materiales con distintos tipos de enriquecimiento. Se han resuelto analíticamente las ecuaciones de balance en forma débil y se construyó de forma manual la solución global del problema en función a las variables de estado estándares y enriquecidas. Posteriormente, se ha simulado un medio bidimensional con una fisura central con permeabilidad dependiente de la apertura de fisura sometida a un flujo de fluido. Se ha puesto en evidencia las bondades del enriquecimiento modificado propuesto por (de Borst et al., 2009) para discontinuidades geométricas y el propuesto por (Cordero y Diez, 2008) para discontinuidades materiales. Se ha reproducido de manera correcta el acoplamiento entre el campo de desplazamiento y de presión en el medio y en la discontinuidad.

## 5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido soportado financieramente por CONICET, Proyecto Préstamo BID PICT PRH 30 N° 94, y Proyecto PIUNT E527.

## REFERENCIAS

- Armero F. y Linder C. Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements. *International Journal of Fracture Mechanics*, 160:119–141, 2009.
- Boone T. y Ingraffea A. A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media. *International Journal of Fracture Mechanics*, 14:27–47, 1990.
- Cordero F. y Diez P. Xfem+: Una modificación de xfem para mejorar la precisión de los flujos locales en problemas de difusión con conductividades muy distintas. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. UPC.*, 26:121–133, 2008.
- Coussy O. *Mechanics and physics of porous solids*, volumen I. Wiley, 2010.
- de Borst R., Rethore J., y Abellan M. A precis of two-scale approaches for fracture in porous media. *Lecture Notes on Composite Materials Solid Mechanics and its Applications*, I:149–171, 2009.
- Moes N., Dolbow J., y Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- Mohammadnejad T. y Khoei A. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73:77–95, 2013.
- Schrefler B. F.e. in environmental engineering: Coupled thermo-hydro-mechanical processes in porous media including pollutant transport. *Archives of Computational Methods in Engineering* 2, 3:1–54, 1995.
- Secchi S., Simoni L., y Schrefler B. Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.*, 31:331–345, 2007.
- Segura J. y Carol I. Coupled hm analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. part i: Theoretical model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.*, 32:2083–2101, 2008.