

SIMULACION NUMERICA DE LA DINAMICA DE ABRILLANTAMIENTOS EN ARCOS MAGNETICOS DE LA BAJA CORONA SOLAR

Andrés M. Cimino^{a,b}, Andrea Costa^{a,b,c} y Sergio A. Elaskar^{a,b}

^a*Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Cordoba*

^b*CONICET*

^c*Instituto Astronómico Teorico Experimental IATE-CONICET*

Palabras Clave: Corona solar, MHD , Harten Yee

Resumen. Empleando un esquema numérico variación total disminuida (TVD) de Harten Yee estudiamos la dinámica de arcos magnéticos de la corona solar. Para ello empleamos un modelo magnetohidrodinámico (MHD) no ideal que incluye términos fuente en las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento. Dichos términos fuente incluyen efectos de conducción no lineal de calor, pérdidas por radiación térmica y efectos de deposición de energía para modelar correctamente la termodinámica de los arcos coronales, de acuerdo a la literatura específica. El esquema además incluye un modelo para las condiciones de borde basado en características y también un esquema de integración temporal implícito que conserva la propiedad TVD. Calibramos el modelo partiendo de soluciones analíticas hidrodinámicas e hidrostáticas para luego estudiar efectos en la dinámica introducidos por perturbaciones.

1. INTRODUCCION

La superficie del Sol presenta distintas regiones con diferentes propiedades. La cromósfera es la región más interna, posee temperaturas del orden de los $10^4 K$, la mayoría de la radiación que emite se encuentra dentro del espectro visible y la principal forma de almacenar energía es a través del campo magnético. Separada por una región de transición, se encuentra la región de la corona solar. En esta región la densidad es mucho menor y las temperaturas del orden de los $10^6 K$, la mayoría de la información que se conoce de esta región se obtuvo a través de radiotelescopios que filtran las frecuencias más altas del espectro ultravioleta (EUV) y las más bajas de los rayos X (Soft X Ray).

El parámetro $\beta = \frac{p}{B^2/\mu_0}$ provee de una forma simple de cuantificar la importancia relativa entre la energía interna térmica y la energía almacenada en el campo magnético. En la cromósfera, este parámetro toma valores mayores a 1, y para la corona del orden de 10^{-3} .

Los arcos de la corona solar son estructuras curvilíneas dominadas magnéticamente cuyas bases se encuentran en la cromósfera. Consisten de líneas de campo magnético que conectan dos regiones de distinta polaridad, y que encapsulan el flujo de plasma, actuando como tubos de flujo. En general tienen tamaños que van desde los $4 \cdot 10^6 m$ a los $400 \cdot 10^6 m$, y una dinámica energética bastante compleja, que involucra fuentes y sumideros de energía.

Existen diferentes modelos en la literatura para analizar la dinámica de los arcos corales: los primeros fueron hidrostáticos (Rosner et al., 1978), (Serio et al., 1981), (Aschwanden y Tsiklauri, 2009), existen otros modelos basados en las ecuaciones de Euler, tanto analíticos (Cargill y Priest, 1980) como numéricos (Muller et al., 2003). En el grupo de trabajo se ha usado un modelo MHD ideal para simular la dinámica de los arcos corales (Fernandez et al., 2009). En general todos ellos analizan al arco como un tubo de flujo unidimensional en el que es despreciable su curvatura. En la figura 1, tomada de la referencia citada, se esquematiza el modelo.

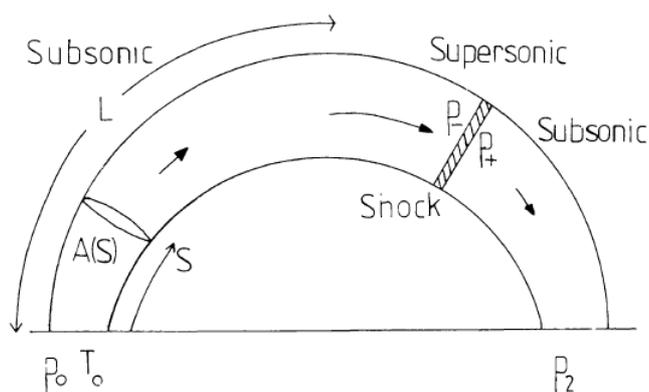


Figura 1: Esquema del modelo del arco de Cargill y Priest (1980)

2. MODELO MHD CON TERMINOS FUENTE

El modelo magnetohidrodinámico (MHD) es un modelo sencillo para analizar la dinámica de plasmas empleando la mecánica del continuo. Posee la ventaja de considerar al plasma como un conjunto homogéneo de partículas en estado de cuasi neutralidad, lo que permite reducir el número de ecuaciones a resolver e ignorar los efectos de las oscilaciones de alta frecuencia. En el caso de un plasma, en general pueden existir partículas con diferente carga eléctrica neta y la

interacción entre partículas de distinta carga.

Dicho modelo surge de una combinación de el sistema de ecuaciones de Euler acopladas a las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, que luego de una serie de hipótesis simplificativas y de trabajo algebraico, permite obtener un nuevo sistema de 8 ecuaciones escalares:

- una de conservación de la masa
- tres de conservación de cantidad de movimiento en cada dirección de los ejes de coordenadas
- tres de inducción electromagnética
- una de conservación de la energía

más la ecuación de la divergencia nula de \mathbf{B} , que se establece como condición inicial.

En el caso de tratarse de un modelo unidimensional, la ecuación de la divergencia nula se reduce a $B_x = 0$ y la ecuación de la inducción en x se hace idénticamente nula, por lo tanto se obtiene un sistema de 7 ecuaciones.

Siendo ρ y p la densidad y presión respectivamente, u, v, w las componentes del vector velocidad \mathbf{V} , B_x, B_y, B_z las componentes del campo magnético \mathbf{B} , e introduciendo la definición de energía total $e_t(t, x)$ como la suma de la energías interna, cinética y magnética por unidad de volumen:

$$e_t = \rho e_i + \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \tag{1}$$

el problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de la MHD para un dominio Ω puede ser escrito en la forma compacta como ley de conservación vectorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{U}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables conservativas, \mathbf{F} es el vector de flujos a través de las interfases, y \mathbf{S} el vector de términos fuente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} - \frac{B_x^2}{\mu_0} \\ \rho uv - \frac{B_x B_y}{\mu_0} \\ \rho uw - \frac{B_x B_z}{\mu_0} \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ \left(e_t + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) u + B_x (B_x u + B_y v + B_z w) \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Una ecuación de estado (EOS) dada por relaciones termodinámicas provee la ecuación adicional necesaria para la clausura del sistema . Si se considera en todos los casos que el fluido es una mezcla de gases térmicamente perfectos, puede emplearse la ecuación de estado calórica :

$$\rho e_i = \frac{p}{\gamma - 1} \tag{4}$$

donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ es el exponente isoentrópico para el gas o mezcla de gases considerados.

3. TERMINOS FUENTE

Se ha comprobado a través de observaciones y modelos teóricos que los arcos coronales intercambian masa y energía con la corona y la cromósfera. Este intercambio se realiza a través de difusión térmica por conducción de calor a través de sus bases, y por radiación hacia el exterior a lo largo del arco. Además, existe un incremento de energía dentro de la corona cuyas causas aún no están del todo claras, pero que también cumple un rol crucial en la dinámica energética. Dichos efectos tienen gran importancia en la dinámica de los arcos coronales, y a su vez permitieron que se obtuvieran soluciones analíticas para casos simplificados, proporcionando leyes de escala y estabilidad para distintos parámetros del problema (Serio et al., 1981). En el presente trabajo se tuvieron en cuenta dichos efectos como términos fuente. Se aplican sobre la ecuación de la energía, mediante funciones simples basadas en observaciones o propuestas en la literatura. Además, para las soluciones hidrostáticas o los casos en los que la longitud del arco fuera suficientemente grande fue necesario agregar los efectos de la gravedad en la ec. de cantidad de movimiento y en la de la energía.

3.1. Pérdidas de calor por radiación hacia la corona

Se usa un modelo semiempírico de gran aceptación en la literatura (Aschwanden, 2004), que expresa a las pérdidas radiativas como función de la densidad de partículas n y una función $\Lambda(T)$ obtenida de correlaciones de observaciones mediante radiotelescopios en espectro ultravioleta y de rayos X. Mediante el uso de ciertos filtros en los radiotelescopios es posible obtener imágenes en las que la intensidad de rayos mostrada es proporcional a la densidad de energía en el arco. Luego, en base a consideraciones de equilibrio de energía, es posible expresar las pérdidas por radiación como función de la densidad de partículas $n = [part/m^3]$ y una función empírica $\Lambda(T)$. Dicha función fue obtenida por (Rosner et al., 1978) como una correlación de las observaciones de varios autores. En la Fig. 2 se reprodujo el gráfico de dicha función.

$$L_{rad} = n^2 \Lambda(T) \quad (5)$$

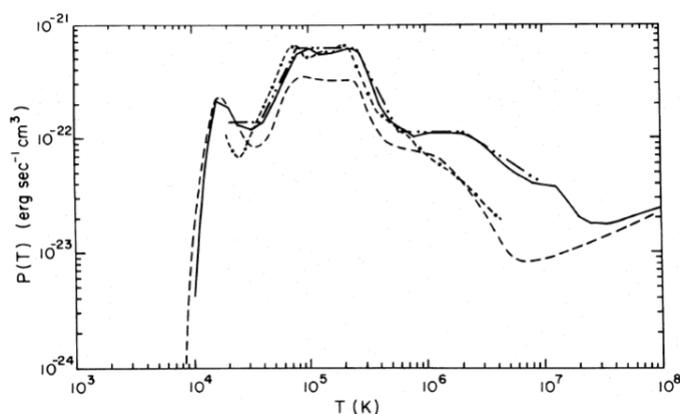


Figura 2: Función $\Lambda(T)$ de pérdidas radiativas en función de la temperatura.

Las funciones de correlación para $\Lambda(T)$ se presentan a continuación:

$$\Lambda(T) = 10^{-58,70} T^{8,81} \quad 10^{4,0} < T < 10^{4,2} \quad (6a)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-21,68} \quad 10^{4,2} < T < 10^{4,3} \quad (6b)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-21,85} \quad 10^{4,3} < T < 10^{4,6} \quad (6c)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-31} T^2 \quad 10^{4,6} < T < 10^{4,9} \quad (6d)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-21,2} \quad 10^{4,9} < T < 10^{5,4} \quad (6e)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-10,4} T^{-2} \quad 10^{5,4} < T < 10^{5,75} \quad (6f)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-21,94} \quad 10^{5,75} < T < 10^{6,3} \quad (6g)$$

$$\Lambda(T) = 10^{-17,73} T^{-2/3} \quad 10^{6,3} < T < 10^7 \quad (6h)$$

3.2. Conducción de calor

Para el flujo de calor se empleó el modelo de Spitzer, basado en el modelo desarrollado por el mismo autor para obtener la conductividad eléctrica. Dicho modelo propone la siguiente relación no lineal para calcular el flujo de calor en la dirección paralela a las líneas del campo magnético \mathbf{B} .

$$\mathbf{q} = -\kappa_{sp} T^{5/2} \nabla T \quad (7)$$

De manera que el término de difusión puede expresarse como

$$\dot{Q}_{cond} = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{d}{dx} \left(\kappa_{sp} T^{5/2} \frac{dT}{dx} \right) = \frac{2}{7} \kappa_{sp} \frac{d^2 T^{7/2}}{dx^2} \quad (8)$$

3.3. Función de Calentamiento

De acuerdo a observaciones mediante telescopios de Raxos X y UV, la temperatura aumenta drásticamente desde la zona de la fotosfera (donde $T < 10^4$ K) hacia la Corona (donde $T \approx 10^6$ K) a través de una pequeña zona de transición. Debido a que no se conoce con certeza la causa de dicho incremento, el efecto del calentamiento se modela mediante funciones simples con un sólo máximo en toda la longitud del arco. En el presente trabajo se empleó una función de calentamiento simétrica, definida para la mitad del arco como:

$$E_H(x, t) = \frac{FM_0}{H_{cal}} e^{\left(\frac{x-x_0}{H_{cal}}\right)} e^{\left(\frac{(t-t_0)^2}{\tau_{cal}^2}\right)} \quad \text{para } 0 < X < L/2 \quad (9)$$

Este tipo de funciones de calentamiento se han empleado para obtener soluciones analíticas en varios trabajos, como (Rosner et al., 1978), (Serio et al., 1981), (Aschwanden y Tsiklauri, 2009); así como en soluciones numéricas (Muller et al., 2003) En este trabajo se analizaron casos para distintos valores de la constante espacial H_{cal} y para tiempos característicos τ_{cal} que tienden a infinito, es decir para calentamiento uniforme en el tiempo.

4. ESQUEMA NUMERICO

4.1. Discretización en Volúmenes finitos

En el esquema de volúmenes finitos, se discretiza el dominio Ω del problema en un número finito N de celdas $\Omega_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right]$, ($j = 1, 2, \dots, N$).

Dentro de cada celda Ω_j se propone una interpolación a las variables del vector de estado por funciones constantes a trozos. Es decir, se asume que las variables conservativas toman un valor constante dentro de cada celda, que se va actualizando conforme se avanza en el tiempo.

De esta manera la forma integral de una ley de un sistema no conservativo, dada por la Ec. 2 puede escribirse para cada celda Ω_j en la forma discreta como:

$$\frac{\Delta \mathbf{U}_j}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[\bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{S}(\mathbf{U})_j \quad (10)$$

donde $\Delta x = x_{j+1} - x_j > 0$, U es el vector de variables de estado, y $\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}$ es una función de flujo numérico, evaluada en la interfase de dos celdas contiguas, que debe aproximar de forma discreta la función de flujo del sistema hiperbólico continuo. Dicha función debe ser consistente con el flujo del sistema continuo, y además debe cumplir con otras propiedades matemáticas para garantizar la estabilidad y convergencia del esquema.

4.2. Esquema numérico de Harten-Yee

Para evaluar los flujos numéricos en las interfases es necesario resolver un problema de Riemann para así obtener los vectores propios $\mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^l$, valores propios $\lambda_{j+\frac{1}{2}}^l$ y coeficientes de expansión espectral $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l$ asociados a la cara $j + \frac{1}{2}$.

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_{i+1/2}^l = \lambda_{i+1/2}^l \mathbf{R}_{i+1/2}^l \quad (11)$$

Como para el sistema MHD no existe una solución analítica a dicho problema para el caso general, se emplean en general *solvers* de Riemann aproximados. Uno de los más exitosos de estos solvers es el llamado solver de Roe (1981), que además de garantizar la hiperbolicidad de la solución aproximada, tiene la propiedad de cumplir con la condición de Rankine Hugoniot de conservación a través de las discontinuidades. Esto permite al esquema resolver discontinuidades de forma exacta.

En el presente trabajo empleamos el *solver* de Riemann aproximado de tipo Roe desarrollado por Cargo y Gallice (1997), que posee la propiedad de resolver de forma exacta un sistema MHD 1D de 7 ondas para cualquier valor del exponente isoentrópico γ .

La función de flujo numérico empleada en el presente trabajo es la de *Harten Yee*, un esquema de variación total disminuida (TVD) de segundo orden desarrollado a partir del flujo numérico de Harten (1983) para una ley de conservación escalar. Un esquema TVD es aquel esquema cuya variación total de la solución, definida como:

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (12)$$

no aumenta en el tiempo

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (13)$$

El flujo de *Harten-Yee* se expresa para para sistemas de leyes de conservación como:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{i+1/2} \Phi_{i+1/2} \right] \quad (14)$$

Donde la función Φ es la función de viscosidad numérica, cuyas componentes se expresan como:

$$\phi_{i+1/2}^l = \sigma^l(\lambda_{i+1/2}^l)(g_{i+1}^l + g_i^l) - \psi(\lambda_{i+1/2}^l + \gamma_{i+1/2}^l)\alpha_{i+1/2}^l \quad (15)$$

Y donde g_i^l es la función limitadora *minmod* aplicada a cada una de las componentes del sistema de leyes:

$$g_i^l = S.max \{ [0, \min((\lambda_{i+1/2}^l)|\alpha_{i+1/2}^l|, (\lambda_{i-1/2}^l)\alpha_{i-1/2}^l S_{i+1/2}))] \} \quad (16)$$

$$S = sign(\alpha_{i+1/2}^l) \quad (17)$$

Y los coeficientes $\gamma_{j+1/2}^l$ se expresan como:

$$\gamma_{j+1/2}^l = \begin{cases} \frac{g_{j+1}^l - g_j^l}{\alpha_{j+1/2}^l} & \text{si } \alpha_{j+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{j+1/2}^l = 0 \end{cases} \quad (18)$$

La función $\sigma(\lambda)$, para retener el segundo orden de precisión en la integración temporal explícita con Euler (Yee, 1989), se define como:

$$\sigma^l(\lambda_{i+1/2}^l) = \frac{1}{2} \left(\psi(\lambda_{i+1/2}^l) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_{i+1/2}^l)^2 \right) \quad (19)$$

Y la función $\psi(\lambda_{i+1/2}^l)$ es la función encargada de introducir la disipación numérica propiamente dicha. Para respetar la condición de entropía en ondas de expansión y lograr la convergencia a una solución físicamente correcta (Harten y Hyman, 1983), esta función se define como:

$$\psi(\lambda_{i+1/2}^l) = \begin{cases} |\lambda_{i+1/2}^l| & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^l| \geq \delta_1 \\ \left((\lambda_{i+1/2}^l)^2 + \delta_1^2 \right) / 2\delta_1 & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^l| < \delta_1 \end{cases} \quad (20)$$

donde δ_1 es un número real pequeño.

5. INTEGRACIÓN TEMPORAL

En el presente trabajo implementamos un esquema de integración implícito TVD tipo *Backward Euler*, con jacobianos evaluados numéricamente para los términos fuente y las condiciones de contorno. Este esquema, para el caso convectivo puro, es estable para valores del número de Courant Friedrichs (*CFL*) mucho mayores a 1. Sin embargo, con la adición de términos fuente y condiciones de contorno más sofisticadas el margen de estabilidad resulta menor.

5.1. Esquema Implícito de Yee-Warming-Harten

Para implementar un esquema implícito que tenga segundo orden de precisión en la integración espacial sin presentar oscilaciones, debe verificarse que los términos convectivos cumplan la propiedad TVD. Yee et al. (1985) desarrollaron el siguiente esquema de integración implícito tipo *Backward Euler* que para un sistema de leyes de conservación:

Definiendo la variable d_j , que representa el cambio de la variable de estado entre dos pasos sucesivos de tiempo

$$d_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \quad (21)$$

Puede escribirse el esquema de la forma

$$\mathbf{E}_1 d_{j-1} + \mathbf{E}_2 d_j + \mathbf{E}_3 d_{j+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] \quad (22)$$

donde los coeficientes E_i se expresan mediante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n \\ \mathbf{E}_2 &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n + \mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \\ \mathbf{E}_3 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \end{aligned} \quad (23)$$

Donde

$$\mathbf{J}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{R}_{j+1/2}^n \text{diag}(C^\pm(\lambda^l + \gamma^l)_{j+1/2}^n)(\mathbf{R}^{-1})_{j+1/2}^n \quad (24)$$

Donde para el flujo de Harten los términos C^- y C^+ se expresan como:

$$C_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2} [\psi(\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}) \pm (\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2})] \quad (25)$$

Donde las expresiones de λ , γ y g_j están dadas por las Ecs. 11, 18 y 16 respectivamente.

Con la diferencia que la función $\sigma(\lambda)$, en caso de buscar un esquema de segundo orden en la integración temporal, se expresa como:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\psi(\lambda) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda^2 \right]$$

Cuando se desee un esquema para encontrar soluciones estacionarias puede emplearse:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} [\psi(\lambda)]$$

debido a que el esquema es más estable, permitiendo pasos de integración mayores.

6. CONDICIONES DE CONTORNO

Un modelado consistente y físicamente correcto de las condiciones de contorno (BC) es fundamental para lograr la estabilidad numérica del modelo, así como para lograr que converja a una solución físicamente correcta. En el presente trabajo implementamos un modelo de condiciones de contorno basadas en características desarrollada por Thompson (1987) y luego generalizado en el trabajo Thompson (1990).

El presente método propone resolver un sistema de ecuaciones en variables características para una ley de conservación de la forma 2 en el contorno, para así poder identificar qué ondas entran y salen del dominio, y de esta forma calcular con mayor precisión los gradientes e integrar las variables en las celdas del contorno de manera consistente con la integración de las mismas en el dominio.

Para determinar cuáles ondas son entrantes y cuáles salientes, basta con evaluar su velocidad característica en el contorno considerado proyectada en la dirección a la normal a dicho contorno.

Para ello, analizando el sistema de ecuaciones en variables características, se define para cada onda un operador \mathcal{L} que define su amplitud. Si la onda es saliente del dominio, el operador \mathcal{L} toma el valor físico de la amplitud de la onda. Si la onda es entrante al dominio, dicho operador toma valor igual a 0 en caso de que se desee una condición de no reflexión, u otro valor de acuerdo a la condición de contorno física que se desee imponer. Luego, estas ecuaciones se

integran en el tiempo para obtener los valores de las variables en el contorno. Definiendo el operador \mathcal{L}_i

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} \lambda_i l_i \frac{\partial V}{\partial x} & \text{si la onda es saliente} \\ 0 \text{ u otro valor definido} & \text{para las demas ondas} \end{cases} \quad (26)$$

Puede escribirse el sistema en variables características como:

$$l_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_i + l_i C = 0 \quad (27)$$

Donde \mathbf{V} es el vector de variables primitivas del sistema. λ_i y l_i son el valor propio y el vector propio izquierdo asociados a la onda analizada.

El presente modelo permite el uso de distintos tipos de condiciones de contorno, entre ellas

- Presión, temperatura u otra variable termodinámica constante en el contorno
- Gradiente de fuerza nulo en el contorno
- Entrada con caudal másico constante

Para integrar temporalmente con el esquema implícito las variables en el contorno, es necesario evaluar las matrices jacobianas de los operadores \mathcal{L} respecto de las variables conservativas. Debido a la complejidad del sistema, dichas jacobianas debieron ser evaluadas numéricamente, mediante la metodología propuesta por [Knoll y Keyes \(2004\)](#).

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_k \approx \mathbf{J}^{(k)} = \frac{\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U} + \varepsilon_k \mathbf{e}_k) - \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U})}{\varepsilon_k} \quad (28)$$

Donde el parámetro ε_k se estima, de acuerdo a dichos autores, para cada variable $U_{k,j}$ como:

$$\varepsilon_k = b U_{k,j} + b \quad (29)$$

Donde $b = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_{comp}})$, para una computadora de 64 bits y doble precisión basta con hacer $b = 10^{-6}$.

7. CASOS ANALIZADOS

7.1. Solución Hidrostática

Para comprobar que el código calcula de forma correcta los términos fuente del problema astrofísico a estudiar, se empleó una solución hidrostática aproximada propuesta por [Aschwanden y Schrijver \(2002\)](#) para arcos de diversos tamaños y condiciones iniciales. El modelo tiene en cuenta:

- Efectos de gravedad variables a lo largo del arco
- conducción térmica de acuerdo al modelo de Spitzer, dado por 7
- disipación por radiación de acuerdo a la Ec. 5
- una ley de calentamiento de la forma

$$E_H = E_{H0} e^{-\frac{(s-s_0)}{s_H}}$$

Para el caso general de un arco con una distribución de temperatura, sección y una función de calentamiento generales no existe una solución analítica. Los autores obtuvieron soluciones aproximadas basadas en correlaciones estadísticas de un gran número de soluciones numéricas para distintos valores de los parámetros.

Este modelo sencillo permite validar los términos fuente para arcos de diferentes longitudes, con diferentes funciones de calentamiento y diferente ley de variación de sección. A continuación se presentan los resultados para un arco de sección constante con semilongitud $L = 400Mm$. Para este caso además existen gráficos de resultados de una simulación con un código hidrostático en el trabajo de los autores [Aschwanden y Schrijver \(2002\)](#), que también se emplearon para comparar resultados. Una vez obtenidas las soluciones hidrostáticas aproximadas para la presión y densidad, se emplearon éstas como condición inicial para el código de FVM desarrollado. De esta forma, comparamos los términos fuentes calculados por el código de volúmenes finitos (FVM) para dichas condiciones como los calculados para obtener la solución hidrostática aproximada y los que estaban en el gráfico de resultados. En todos los casos se obtuvo una muy buena correlación.

Por otro lado, para la condición inicial planteada el código desarrollado dio como resultado velocidades casi nulas en todo el dominio (salvo pequeñas oscilaciones cerca de las bases, posiblemente debido a que la solución hidrostática propuesta es aproximada), y conservó esta configuración de presión, densidad y velocidad a lo largo del tiempo. En la figura 3 se presentan los resultados obtenidos para los términos fuente.

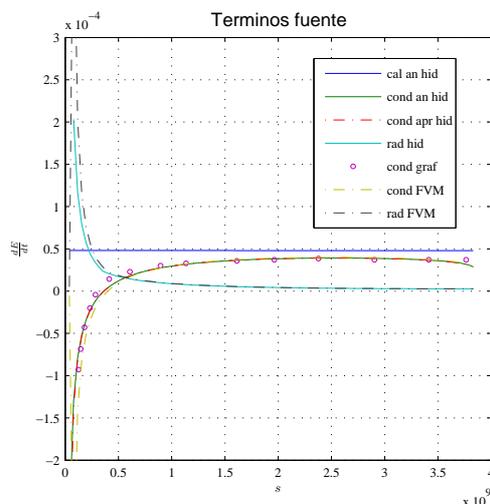


Figura 3: Comparación de las funciones de términos fuente para sol. analíticas y numéricas de un arco hidrostático

7.2. Modelo MHD con una perturbación

En el trabajo de [Fernandez et al. \(2009\)](#) se modeló un arco coronal de $L = 150 \cdot 10^6 m$ con MHD ideal, suponiendo que los términos fuente de la ecuación de energía se compensaban entre sí, garantizando la adiabaticidad. Las condiciones iniciales consistieron en tres estados constantes, como se muestra en la figura 4. Proponiendo distintas condiciones iniciales se llegó a reproducir velocidades de propagación de ondas observadas con los telescopios.

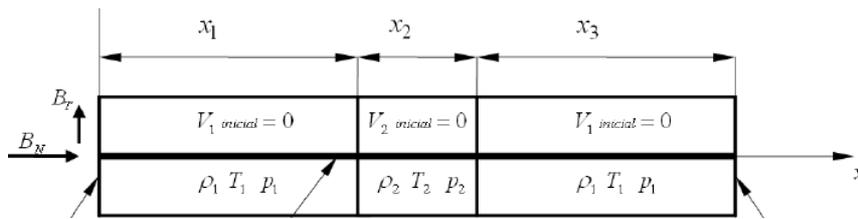


Figura 4: Esquema del modelo utilizado en el trabajo de [Fernandez et al. \(2009\)](#)

Tomando un caso simétrico de los analizados en el trabajo mencionado, con condiciones:

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1,6723 \cdot 10^{-11} \frac{kg}{m^3} \\ u_1 = u_2 = u_3 = 0 \frac{m}{s} \\ p_1 = p_3 = 0,318 Pa \quad p_2 = 3,18 Pa \end{cases}$$

Se tomó la componente normal del campo magnético $B_x = 20 G$ y las demás componentes nulas.

Para esta condición se obtuvieron dos ondas de choque que viajan desde el centro del arco hacia abajo, cuya velocidad de frente de onda coincidía con la de observaciones. Este resultado permitió sugerir que los abrillantamientos observados podrían explicarse como ondas de choque descendentes. En la figura 5 se reproducen los resultados obtenidos.

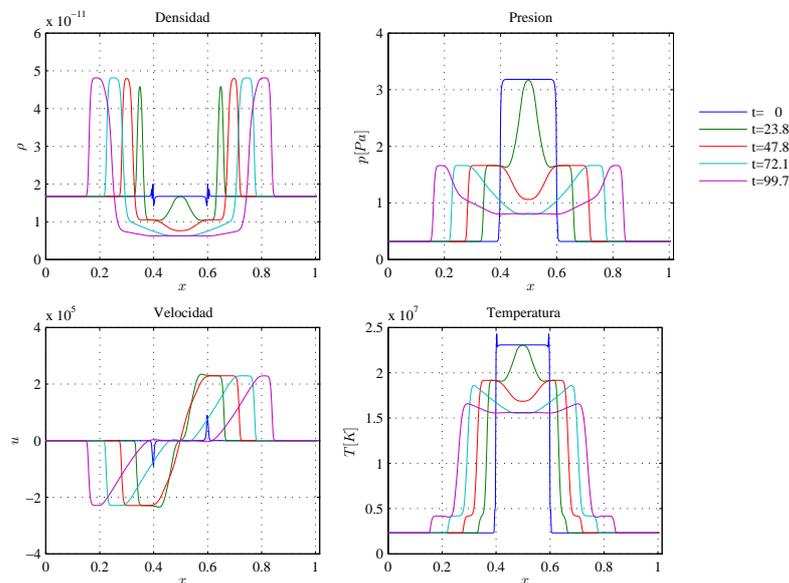


Figura 5: Resultados para el caso ideal

Como primera medida analizamos la influencia de la conducción térmica en el modelo. Agregando esta condición, el modelo deja de ser isoentrópico pero sigue siendo adiabático, ya que la conducción distribuye la energía dentro del arco, sin disiparla hacia afuera. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.

Se observa que la conducción térmica es un mecanismo mucho más eficiente que la convección para este caso, debido al elevado valor del coeficiente de conductividad térmica. La difusión térmica además penaliza mucho el valor del paso de tiempo, y a pesar de emplearse un

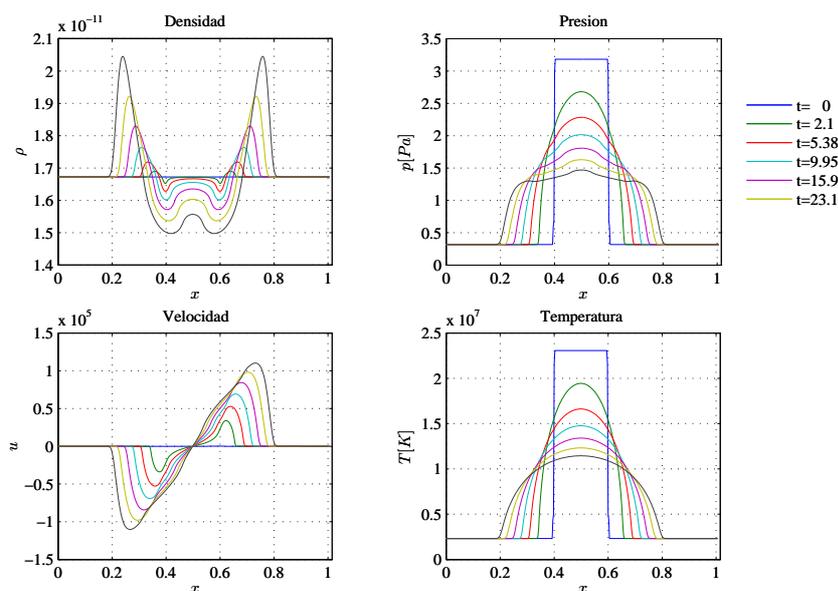


Figura 6: Resultados incluyendo efectos de difusión

esquema implícito existieron oscilaciones en las primeras iteraciones. La difusión, al aumentar la temperatura de los alrededores de la zona de la perturbación produce incrementos de presión, que producen a su vez velocidades que descienden desde el ápice del arco.

Sin embargo, los incrementos de densidad para este caso fueron mucho menores que para el caso ideal. Pero curiosamente la velocidad de propagación de los frentes de onda fue mayor.

A continuación se propuso incorporar la función de pérdidas por radiación, una función de calentamiento constante a lo largo del arco que compensara globalmente dichas pérdidas. Una función que satisface tal condición de manera aproximada es:

$$E_H(x, t) = 8,59 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-6,77 \cdot 10^{-3} t} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Observamos que los resultados para este caso no difirieron casi de los resultados con sólo conducción, ya que como se muestra en la figura 7 el orden de magnitud de las pérdidas por radiación es mucho menor al del transporte de calor por conducción. En la misma figura se observa además que el modelo de discretización para la conducción satisface la condición de adiabaticidad. En la figura 8 se visualizan los resultados para el caso que incluye todos los términos fuente.

7.3. Perturbaciones a la solución hidrostática

Otra estrategia que propusimos para modelar las ondas que ocurren en los arcos coroneles es partir de una condición de equilibrio hidrostático, que ya de por sí satisface el equilibrio entre las funciones de términos fuente y posee una distribución de presiones y densidades dadas por el equilibrio hidrostático, e introducirle una perturbación de la misma naturaleza.

En la figura 9 se muestran los resultados obtenidos para una perturbación de 10 veces la temperatura en la zona central del arco.

En estos casos también verificamos que la difusión cumple un rol importante en el transporte de energía, y que la amplitud y velocidad de los frentes de onda que se propagan hacia abajo también se ven influenciadas por este efecto. Sin embargo, la magnitud de las velocidades en este caso son un orden de magnitud menores a las del caso anterior, y además no hubieron

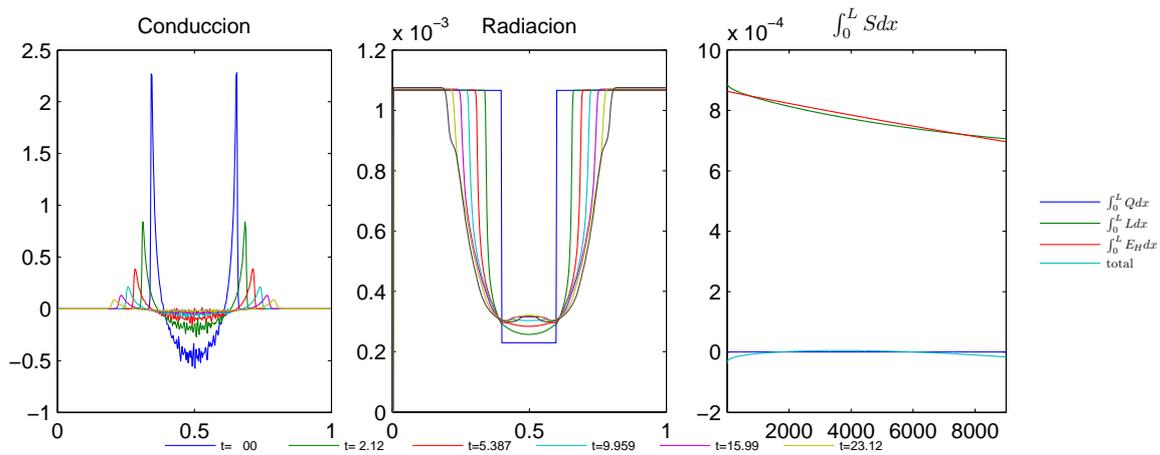


Figura 7: Conducción, pérdidas radiativas y balance de energía a lo largo del arco

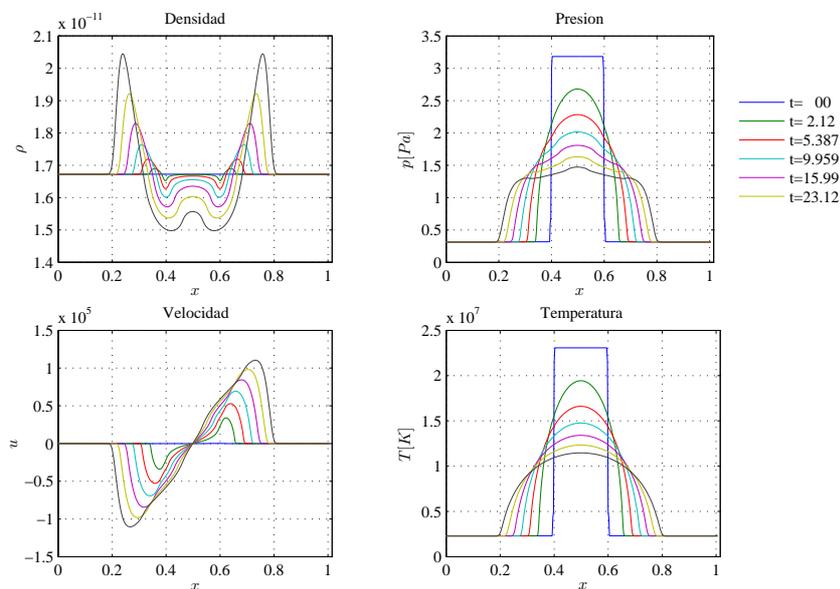


Figura 8: Resultados incluyendo todos los terminos fuente

cambios significativos en la densidad. Esto puede deberse a que, como se trata de un arco de gran longitud el efecto de estratificación debido a la gravedad es muy importante, lo que genera gradientes de presión en la dirección opuesta al flujo (descendente). Restaría entonces probar perturbaciones en soluciones hidrostáticas para arcos más cortos, donde los gradientes de presión debidos a la gravedad tienen menor influencia.

8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo demostramos que el código desarrollado es capaz de calcular adecuadamente los términos fuente y calcular la evolución temporal del sistema, a pesar de tratarse a veces de un problema gobernado por la difusión. Concluimos también que la velocidad de propagación de los frentes de onda depende fuertemente de la conducción térmica, siendo ésta quizás el término más influyente en la dinámica del arco. En los casos analizados las condiciones de contorno no tuvieron influencia, ya que en ningún momento las ondas llegaron a

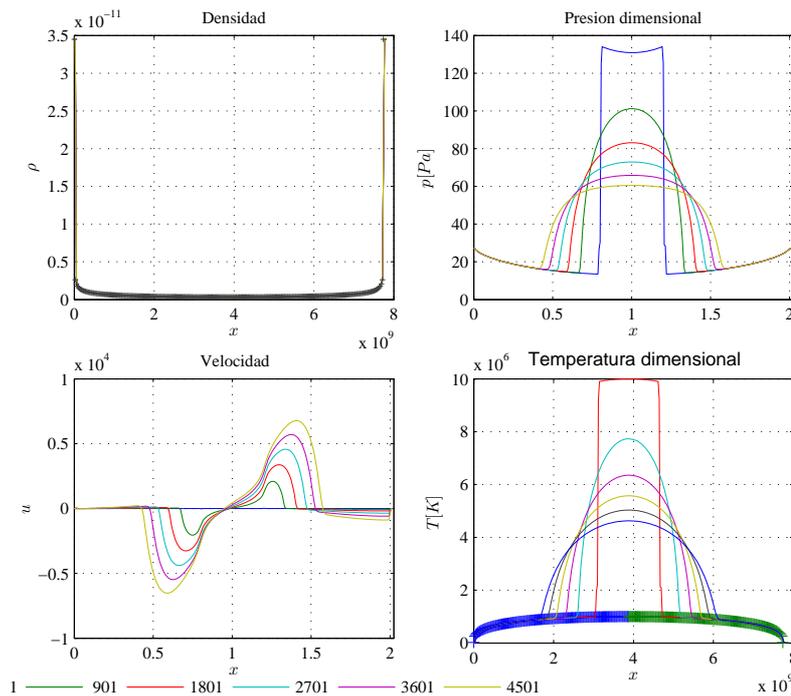


Figura 9: Resultados para una perturbación en la solución hidrostática

los contornos. Queda para otro trabajo futuro, una vez que hayamos calibrado el modelo con observaciones, determinar cómo interactúan las ondas con el contorno.

Resulta llamativo además que en los casos analizados las ondas asociadas al modelo MHD no tuvieron importancia, ya que en las soluciones sólo aparecen ondas del tipo gasdinámico. Además, las soluciones hidrostáticas empleadas en el presente trabajo están basadas en un modelo gasdinámico; sin embargo los resultados obtenidos con el código MHD para un campo magnético longitudinal $B_x = 20G$ no mostraron diferencias significativas con éstas. El modelo introducido anteriormente por el grupo basado en perturbaciones resultó muy influenciado por la conducción de calor, por lo que en el futuro se partirá de un estado constante con funciones de calentamiento concentradas en las bases o en el ápice del arco, para generar gradientes de presión y velocidad a través de desbalances de energía.

AGRADECIMIENTOS

Los autores deseamos agradecerle al Dr. José P. Tamagno por sus sugerencias y comentarios sobre el artículo. También agradecemos a CONICET por haber financiado el trabajo de investigación que posibilitó la redacción de este trabajo.

REFERENCIAS

- Aschwanden M. *Physics of the Solar Corona*. Springer-Verlag, 2004.
- Aschwanden M.K. y Schrijver C.J. Analytical Approximations to Hydrostatic Solutions and Scaling Laws of Coronal Loops. 142:269–283, 2002.
- Aschwanden M.K. y Tsiklauri D. The Hydrodynamic Evolution of Impulsively Heated Coronal Loops: Explicit Analytical Approximations. 185:171–185, 2009.
- Cargill P.J. y Priest E. Siphon flows in coronal loops. I - Adiabatic flow. *Solar Physics*, 65:251–269, 1980.
- Cargo P. y Gallice G. Roe Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe Matrices

- for Systems of Conservation Laws. 136:446–466, 1997.
- Fernandez C.A., Costa A., Elaskar S., y Schulz W. Numerical simulation of the interna plasma dynamics of post flare loops. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400:1821–1828, 2009.
- Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. 49:357–393, 1983.
- Harten A. y Hyman J.M. Self Adjusting Grid Methods for One–Dimensional Hyperbolic Conservation Laws. 50:235–269, 1983.
- Knoll D. y Keyes D. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications . *Journal of Computational Physics*, 193, 2004.
- Muller D.A.N., Hansteen V.H., y H. P. Dynamics of solar coronal loops. i. condensation in cool loops and its effect on transition region lines. 411:605–613, 2003.
- Roe P.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. 43:357–372, 1981.
- Rosner R., Tucker W., y Vaiana G. Dynamics of the Quiescent Solar Corona. 220:643–655, 1978.
- Serio S., Peres G., y Vaiana G. Closed coronal structures ii. generalized hydrostatic model. 243:288–300, 1981.
- Thompson K. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. 68:1–24, 1987.
- Thompson K. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II. 89:439–461, 1990.
- Yee H., Warming R., y Harten A. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady–State Calculations. 57:327–360, 1985.
- Yee H.C. A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock–Capturing Methods. 101088, 1989.