

## **ESTUDIO DEL PANDEO DE ESTRUCTURAS LAMINARES Y TIPO PLACA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONALES DE ALTO ORDEN**

**J.M. Martínez Valle**

*Departamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad  
de Córdoba, 14071, Córdoba, España, jmvalle@uco.es*

**Palabras Clave:** Pandeo, elementos finitos, láminas.

**Resumen.** El estudio de los fenómenos de inestabilidad en estructuras laminares es un tema que ha suscitado un interés notable en las últimas décadas. La complejidad del problema ha llevado a formular elementos finitos complejos que estén libres de los problemas del bloqueo de la matriz de rigidez. Debido a las ventajas que el autor ha comprobado con los elementos finitos tridimensionales de alto orden en el estudio de estructuras laminares en régimen dinámico lineal, se propone la validación de estos elementos para el estudio de inestabilidades en este tipo de estructuras mediante distintos casos prácticos.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las estructuras laminares son estructuras que bien diseñadas pueden suponer un gran ahorro de material debido a que pueden resistir grandes cargas por su curvatura. Por el contrario pequeñas modificaciones en sus condiciones de sustentación o una mala resolución constructiva de las uniones pueden resultar en un colapso de la estructura debido a su gran sensibilidad ante el fenómeno del pandeo.

El tema del pandeo es un tema complejo que se engloba dentro del análisis geoméricamente no lineal de estructuras y que ha necesitado para su comprensión incluso de ensayos experimentales que han podido orientar la teoría que lo sustentaba. Una de las particularidades que ofrece respecto a las estructuras laminares es que, bajo cargas de compresión, éstas ofrecen un comportamiento no lineal incluso en etapas previas al pandeo, [Brebbia \(1971\)](#). Por tanto, para poder estudiar este fenómeno, necesitamos conocer una teoría de láminas consistente aplicable en régimen no lineal.

Si ya de por sí, el estudio de las teorías de láminas en régimen lineal es un tema complejo, en el rango no lineal y considerando deformación por cortante, éste se complica de tal forma que las ecuaciones deducidas no son tratables de manera directa por métodos numéricos. El célebre trabajo de [Koiter \(1960\)](#) inicia el estudio de las láminas delgadas en régimen geoméricamente no lineal con deformaciones moderadas. Si incluimos la deformación por corte nos remitimos, entre otros, a los estudios de [Pietraszkiewicz \(1984,1989\)](#) para teorías de 1° orden, y [Reddy \(1985\)](#) y el compendio de [Kienzler \(2004\)](#) para teorías de orden superior.

Los elementos finitos geoméricamente no lineales basados directa o indirectamente en estas teorías de láminas son muy costosos y complejos. Las primeras investigaciones con ellos fue a cargo de [Turner \(1960\)](#).

[Navaratna \(1967\)](#), [Gallagher \(1967\)](#) y [Yao \(1968\)](#) continuaron estos estudios enfocándolos a problemas de estabilidad estructural utilizando una “linealización” de las ecuaciones de estas teorías de láminas no lineales. El primer autor analizó el pandeo de láminas de revolución mediante elementos lineales o curvos con simetría axial. Los otros dos autores analizaron el pandeo de láminas delgadas para una geometría cualquiera.

A partir de entonces se han sucedido una gran cantidad de complicados elementos finitos dedicados al estudio del pandeo pero al igual que en temas de vibraciones, la mayoría de los estudios se refieren a láminas sin inclusión de la deformación por corte y de pequeña curvatura. Además estos estudios se centran en geometrías muy particulares.

Las ventajas que ofrecen los elementos finitos 3D respecto a los basados en teorías de láminas son que se basan directamente en la teoría de la elasticidad y que por lo tanto no dependen de la teoría de láminas elegida.

Como se ha comentado en una publicación anterior, [Martínez \(2013\)](#), los elementos finitos tridimensionales sufren de distintos tipo de bloqueo de la matriz de rigidez, de los cuales el de membrana y de cortante se manifiestan con mayor intensidad para espesores delgados. Igualmente, en [Martínez \(2013\)](#) se estudiaron las posibilidades del elemento finito serendípito de 20 nodos para el estudio dinámico de láminas de doble curvatura que ofrecía buenos resultados incluso para mallas poco tupidas.

En este trabajo formulamos este elemento finito en régimen no lineal y lo aplicamos al estudio de problemas de estabilidad de placas y láminas bajo cargas de compresión.

## 2 PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

En cualquier problema físico, lo deseable es conocer las soluciones analíticas al problema. Presentamos a continuación las ecuaciones de gobierno de placas y láminas sometidas a grandes desplazamientos.

Las ecuaciones de gobierno de placas para grandes desplazamientos con influencia del cortante son las denominadas ecuaciones de Von Karman y que tiene por expresión,

$$\nabla^4 w = \frac{h}{D} \left( \frac{q}{h} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) \quad (1)$$

con  $h$  como espesor,  $D$  la constante de la placa,  $q$  las cargas aplicadas,  $w$  el corrimiento vertical y  $F$  la denominada función de Airy o función de tensiones que cumple,

$$\nabla^4 F = E \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \quad (2)$$

Las soluciones analíticas al problema no son conocidas hasta la fecha, sin embargo, en el caso de placas delgadas las ecuaciones anteriores toman la forma,

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3)$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son las fuerzas coplanarias aplicadas a la placa y de la cual si se tienen soluciones conocidas.

Por ejemplo, en el caso de una placa articulada en los 4 extremos y sometida a un axil de compresión en los lados menores, la solución en corrimientos obtenida mediante un desarrollo del tipo,

$$w = A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

es, Timoshenko (1959),

$$w = \frac{\pi^2 D}{\frac{m^2}{a^2}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (5)$$

Si tal como hemos visto, las ecuaciones de gobierno para placas son complejas y sin solución analítica excepto para placas de Kirchhoff, para láminas sometidas a grandes desplazamientos y con influencia del cortante son solo abordables mediante métodos numéricos como el método de los elementos finitos. El desarrollo teórico de estas ecuaciones lo podemos encontrar, por ejemplo, en el tratado de [Wempner \(1982\)](#) y no vamos a reproducirlas en este artículo.

## 3 FORMULACION DEL PROBLEMA MEDIANTE DEL ELEMENTO SERENDÍPITO DE 20 NODOS. MATRIZ DE RIGIDEZ.

Para estudiar el problema del pandeo de estructuras mediante el MEF debemos resolver el sistema:

$$|K + \lambda K_g| = 0 \quad (6)$$

Donde  $K$  es la matriz de rigidez lineal y  $K_g$  la matriz de rigidez geométrica. A cada uno de los autovalores de resolver este problema los denominamos cargas críticas de pandeo y a los vectores propios asociados, los modos de pandeo.

Como se ha comentado, estudiaremos el comportamiento del elemento finito serendípito de 20 nodos formulado en desplazamientos puros.

Las funciones de forma, si usamos la formulación isoparamétrica, expresadas en un sistema de coordenadas con origen en el centro del elemento (ver Figura 1) adoptan la forma ya conocida,

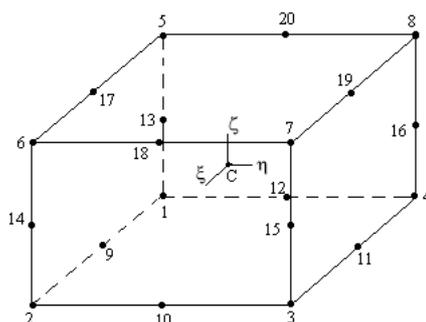


Figura 1. Elemento finito de 20 nodos.

$$N_j = \frac{1}{8}(1 + \xi_j\xi)(1 + \eta_j\eta)(1 + \zeta_j\zeta)(\xi_j\xi + \eta_j\eta + \zeta_j\zeta - 2), \quad (7)$$

para los nodos de los vertices del hexaedro,  $j=1, \dots, 8$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_j\eta)(1 + \zeta_j\zeta), \quad (8)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=10, 12, 14, 16$ .

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_j\xi)(1 + \zeta_j\zeta), \quad (9)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=9, 11, 13, 15$ .

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_j\xi)(1 + \eta_j\eta), \quad (10)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=17, 18, 19, 20$ .

Las coordenadas dentro del elemento, en función de las funciones de forma las podemos escribir:

$$x = \sum_{i=1}^{20} N_i x_i \quad (11)$$

$$y = \sum_{i=1}^{20} N_i y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^{20} N_i z_i$$

donde  $(x_i, y_i, z_i)$  son las coordenadas de los 20 nodos del elemento.

Definidas las funciones de forma del elemento, la matriz de rigidez lineal  $[k_e]$  del elemento en coordenadas locales la podemos expresar como, [Zienkiewicz \(2000\)](#):

$$[k_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta, \tag{12}$$

donde la matriz  $B$  es la relación entre deformaciones y desplazamientos en coordenadas cartesianas,  $\det[J]$  es el determinante de la matriz jacobiana y  $D$  es la matriz constitutiva.

La expresión de la matriz  $B$  fue desarrollada anteriormente, [Martínez \(2013\)](#), y tiene la forma

$$\{B\} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & \dots & N_{20,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{20,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & \dots & 0 & 0 & N_{20,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{20,y} & N_{20,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & N_{2,z} & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{20,z} & N_{20,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{2,z} & 0 & N_{2,x} & \dots & N_{20,z} & 0 & N_{20,x} \end{pmatrix}$$

donde  $\Gamma_{ij}$  son las componentes de la matriz inversa de la matriz jacobiana, la cual se define como,

$$\{J\} = \sum_{i=1}^{20} \begin{pmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{20,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{20,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

donde  $(x_i, y_i, z_i)$  son las coordenadas de los 20 nodos del elemento.

Como nuestro objetivo es estudiar el pandeo de placas y láminas, hemos de tener en cuenta las deformaciones en régimen no lineal, las cuales las pasamos a estudiar en el próximo epígrafe.

#### 4 DEFORMACIONES EN RÉGIMEN NO LINEAL.

La expresión del tensor de Green Lagrange en coordenadas cartesianas teniendo en cuenta tanto las componentes lineales como las no lineales es,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{Bmatrix}, \tag{15}$$

la primera de estas matrices es la matriz lineal de deformaciones  $\{\varepsilon_0\}$  y la segunda es conocida como matriz no lineal de deformaciones  $\{\varepsilon_L\}$ . Por comodidad podemos expresar la parte no lineal de la deformación como

$$\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_y & v_y & w_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z \\ u_y & v_y & w_y & u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z & u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z & 0 & 0 & 0 & u_x & v_x & w_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \\ u_y \\ v_y \\ w_y \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix}. \tag{16}$$

A la primera de estas matrices se le llama  $A$  y a la segunda  $\vartheta$

$$A = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_y & v_y & w_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z \\ u_y & v_y & w_y & u_x & v_x & w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_z & v_z & w_z & u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z & 0 & 0 & 0 & u_x & v_x & w_x \end{pmatrix} \vartheta = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \\ u_y \\ v_y \\ w_y \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix}, \tag{17}$$

con lo que  $\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2}A\vartheta$ . Por tanto queda,

$$\{\varepsilon\} = B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}A\vartheta. \quad (18)$$

### 5 ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN.

El trabajo virtual de deformación en función de tensiones y deformaciones se expresa por

$$U = \iiint_{volumen} \delta\varepsilon^T S dv, \quad (19)$$

donde  $S$  es el 2° tensor de Piola Kirchhoff. La variación de las deformaciones se obtiene de la ecuación (18) mediante

$$\delta\varepsilon = \delta\left\{B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}A\vartheta\right\} = B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}\delta A\vartheta + \frac{1}{2}A\delta\vartheta. \quad (20)$$

Ahora bien, de las ecuaciones (16) y (17) fácilmente se puede comprobar que  $\delta A\vartheta = A\delta\vartheta$  con lo que la variación de las deformaciones queda

$$\delta\varepsilon = B_0\{d_{elemento}\} + A\delta\vartheta. \quad (21)$$

Considerando la relación entre las derivadas de los corrimientos en el sistema cartesiano y el isoparamétrico,

$$\delta\vartheta = \delta \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,x} \\ w_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,y} \\ w_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,z} \\ w_{,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \cdot \delta \cdot \begin{pmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

y si invertimos esta relación,

$$\delta \begin{pmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

con lo que sustituyendo queda

$$\delta\vartheta = G\delta d_{elemento}, \quad (24)$$

siendo  $G$

$$G = \begin{pmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & \dots & N_{20,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & 0 & N_{20,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & \dots & 0 & 0 & N_{20,x} \\ N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & \dots & N_{20,y} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{20,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & 0 & N_{20,y} \\ N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 & \dots & N_{20,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & \dots & 0 & N_{20,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & \dots & 0 & 0 & N_{20,z} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

En definitiva, se obtiene

$$\delta\varepsilon = B_0 \cdot \delta\{d_{elemento}\} + A \cdot G \cdot \delta\{d_{elemento}\}, \quad (26)$$

que sustituida a su vez en la ecuación (19) da

$$U = \iiint_{volumen} \delta\varepsilon^T S dv = \delta\{d_{elemento}\}^T \iiint_{volumen} (B_0^T + G^T A^T) S dv, \quad (27)$$

en donde se ha tenido en cuenta que  $\delta\{d_{elemento}\}$  es independiente de la integración.

Igualando el trabajo interno de deformación al de las fuerzas externas tenemos,

$$\delta d_{elemento}^T p_{elemento} = \delta\{d_{elemento}\}^T \iiint_{volumen} (B_0^T + G^T A^T) S dv, \quad (28)$$

y como quiera que la igualdad debe verificarse *para cualquier movimiento virtual*, queda

$$p_{elemento} = \iiint_V (B_0^T + G^T A^T) S dv. \quad (29)$$

A la matriz  $G^T A^T$  se la designa por  $B_{nl}^T = G^T A^T$  con lo que la ecuación (29) se escribe,

$$p_{elemento} = \iiint_V (B_0^T + B_{nl}^T) S dv. \quad (30)$$

Si consideramos teoría de grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones, el tensor de las constantes elásticas lo podemos considerar constante en el proceso de deformación, por lo que se puede escribir,

$$\begin{aligned} \iiint_V (B_0^T + B_{nl}^T) S dv &= \iiint_V (B_0^T + B_{nl}^T) \cdot E \cdot \varepsilon dv \\ &= \iiint_V \left[ (B_0^T + B_{nl}^T) E (B_0 \{d_{elemento}\} + \frac{1}{2} A \vartheta) \right] dv = \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ (B_0^T + B^T_{nl})E(B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}AG\{d_{elemento}\}) \right] dv \\ &= \iiint_V \left[ (B_0^T + B^T_{nl})E(B_0 + \frac{1}{2}AG)dv \right] \{d_{elemento}\}. \end{aligned}$$

donde al tensor de las constantes elásticas lo hemos denominado por E. Finalmente queda,

$$p_{elemento} = \left\{ \iiint_V \left[ (B_0^T + B^T_{nl})E(B_0 + \frac{1}{2}AG)dv \right] \right\} \{d_{elemento}\}, \tag{32}$$

que se escribe como

$$p_{elemento} = \Psi_{elem}(d)\{d_{elemento}\}, \tag{33}$$

con

$$\Psi_{elem}(d) = \left\{ \iiint_V \left[ (B_0^T + B^T_{nl})E(B_0 + \frac{1}{2}AG)dv \right] \right\}. \tag{34}$$

Obviamente  $\Psi_{elem}(d)$ , a través de las matrices  $B^T_{nl}$ , A y G, depende de las incógnitas del problema, a saber, los corrimientos.

## 6 MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA Y TANGENTE.

La ecuación deducida en el apartado anterior es no lineal por lo que debemos acudir a algún método numérico para tratar de resolverla. En el contexto del cálculo de estructuras, uno de los métodos más utilizados para resolver el problema es el método de Newton Raphson.

De manera muy simplificada, si tenemos que resolver una ecuación lineal del tipo:

$$P_{est} = \Phi_{est}(D) \cdot D_{est} \tag{35}$$

como es nuestro caso, siendo  $P_{est}$  las cargas aplicadas en los nodos de los distintos elementos finitos,  $\Phi_{est}(D)$  la matriz de rigidez de la estructura y  $D_{est}$  los corrimientos de los nodos de la estructura, nosotros desarrollamos la matriz de rigidez de la estructura que depende en si misma de los corrimientos mediante un desarrollo de Taylor de 1º orden:

$$\Phi(D^{n+1}) = \Phi(D^n) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial D} \right)_n \Delta D^n = \Phi(D^n) + K_T \Delta D^n \tag{36}$$

donde hemos denominado a la derivada de la matriz de rigidez respecto de los corrimientos matriz de rigidez tangente y la hemos denominado  $K_T$ , (ver Figura 2).

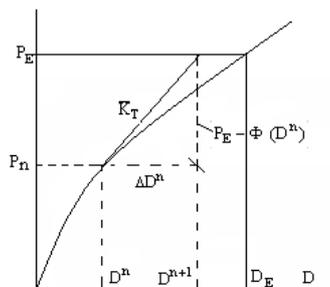


Figura 2: Método de Newton-Raphson para cálculos no lineales de estructuras

En nuestro caso particular, vamos a obtener una expresión explícita de la matriz de rigidez tangente. Si derivamos la ecuación (31) tenemos,

$$\delta p_{elemento} = \iiint_{volumen} \delta B_{nl}^T S dv + \iiint_{volumen} \cdot (B_0^T + G^T \cdot A^T) E (B_0 + A \cdot G) \{\delta d_{elemento}\} dv \quad (37)$$

Al primero de los términos lo denominamos matriz de rigidez geométrica y en este caso tiene por expresión,

$$\begin{aligned} \iiint_{volumen} \delta B_{nl}^T \cdot S dv &= \iiint_{volumen} G^T \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xz} & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xz} & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} G dv \delta d_{elemento} \\ &= k_N \delta d_{elemento} \end{aligned} \quad (38)$$

Mientras que el segundo, si lo desarrollamos un poco más, es:

$$\begin{aligned} \iiint_V (B_0^T + G^T A^T) \cdot E \cdot (B_0 + A \cdot G) \{\delta d_{elemento}\} dv &= \iiint_V B_0^T E B_0 \{\delta d_{elemento}\} dv + \\ \iiint_V (B_0^T \cdot E \cdot A \cdot G + G^T A^T \cdot E \cdot B_0 + G^T A^T \cdot E \cdot A \cdot G) \{\delta d_{elemento}\} dv & \end{aligned} \quad (39)$$

El primero de los términos es el correspondiente a la componente lineal de la deformación, mientras que el segundo es constituye la denominada matriz de grandes corrimientos.

Por tanto, podemos reescribir la derivada del vector de cargas del elemento como,

$$\delta p_{elemento} = (k + k_g + k_N) \delta d_{elemento} = K_T \cdot \delta d_{elemento}, \quad (40)$$

Donde  $K_T$  es la matriz de rigidez tangente, suma de la matriz de rigidez lineal, de la de grandes corrimientos y la geométrica. Llegados a este punto podemos estudiar el problema de autovalores que definía el problema en cuestión dado por la ecuación (6).

## 7 RESULTADOS OBTENIDOS

Los primeros ejemplos que hemos desarrollado están referidos al pandeo de placas. Para verificar los resultados obtenidos mediante el elemento finito de 20 nodos, los hemos comparado con las teorías de Kirchhoff y Reissner Mindlin (Teoría de Cortante de 1° orden). Como ya hemos comentado, la solución exacta al problema mediante la teoría de la elasticidad no es conocida. Los resultados se han expresado en función del parámetro adimensional,

$$N_{cr} = \frac{N_0 a^2}{E h^3}, \quad (41)$$

donde  $N_0$  es el axil aplicado a la placa y  $a$  es el lado mayor de la misma.

Como primer ejemplo, presentamos la carga crítica de pandeo para una placa simplemente apoyada sometida a compresión uniaxial, (ver Figura 3), cuadrada ( $a=b$ ), isotrópica y de propiedades de material que se corresponden con las de acero.

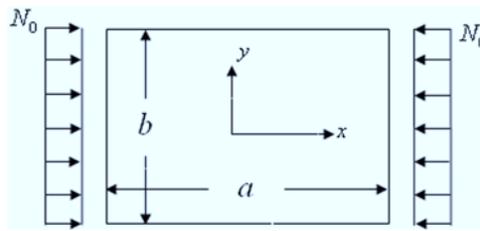


Figura 3: Compresión uniaxial de una placa rectangular.

Analizamos el 1° y 2° modo de pandeo y comparamos los resultados obtenidos con las teorías antes citadas, ver Tablas 1, 2 y 3.

Primer modo de pandeo:  $(m, n) = (1, 1)$

Teoría utilizada	Ratio ( $S = a/h$ )				
	5	10	20	50	100
Presente (E.F.)	2.9442	3.4213	3.5640	3.6069	3.6129
Reissner (FSDT)	2.9498	3.4222	3.5649	3.6071	3.6130
Kirchhoff	3.6152	3.6152	3.6152	3.6152	3.6152

Tabla 1: Carga crítica de pandeo. Comparación del parámetro adimensional ( $N_{cr}$ ) para una placa rectangular sometida a compresión uniaxial. ( $k=0$ ,  $E= 210$  GPa y  $\nu=0.3$ )

Primer modo de pandeo:  $(m, n) = (1, 1)$

Teoría utilizada	Ratio ( $S = a/h$ )				
	5	10	20	50	100
Presente (E.F.)	1.4702	1.7021	1.7817	1.8028	1.8065
Reissner (FSDT)	1.4749	1.7111	1.7825	1.8035	1.8065
Kirchhoff	1.8076	1.8076	1.8076	1.8076	1.8076

Tabla 2: Carga crítica de pandeo. Comparación del parámetro adimensional ( $N_{cr}$ ) para una placa rectangular sometida a tracción en el eje X y compresión en el eje Y ( $k=1$ ,  $E= 210$  GPa y  $\nu=0.3$ )

Segundo modo de pandeo:  $(m, n) = (1, 2)$

Teoría utilizada	Ratio ( $S = a/h$ )				
	5	10	20	50	100
Presente (E.F.)	4.8098	6.5933	7.2747	7.4888	7.5210
Reissner (FSDT)	4.8158	6.6010	7.2753	7.4895	7.5211
Kirchhoff	7.5317	7.5317	7.5317	7.5317	7.5317

Tabla 3: Carga crítica de pandeo. Comparación del parámetro adimensional ( $N_{cr}$ ) para una placa rectangular sometida a tracción en el eje X y compresión en el eje Y ( $k=1$ ,  $E= 210$  GPa y  $\nu=0.3$ )

Como ejemplos de estudio para láminas hemos escogido el paraboloide hiperbólico, la superficie cilíndrica (ver Figura 4) y el casquete esférico para estudiar las cargas de pandeo. Los resultados numéricos obtenidos los comparamos con los trabajos de Matsunaga (1999). Este autor utiliza un elemento tipo lámina (de sólido degenerado) pero utilizando hipótesis de lámina rebajada. En todos los ejemplos numéricos hemos tomado coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , superficies de planta cuadrada y módulo de Young  $E = 7 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

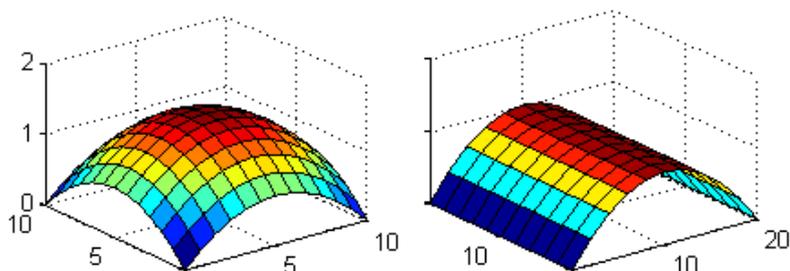


Figura 4: Representación del paraboloido elíptico y la lámina cilíndrica.

En este caso, tomaremos el parámetro adimensional en la forma:

$$\lambda = \frac{N_0 a^2}{D}, \quad (42)$$

donde ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (43)$$

que es la constante de rigidez de la placa. Los resultados obtenidos para el primer modo de pandeo son los que se reflejan en la siguiente tabla, ver [Tabla 4](#).

a/h	a/R <sub>x</sub>	a/R <sub>y</sub>	Presente(E.F. de 20 nodos)	Matsunaga (E.F.Tipo Lámina)
10	0.2	0.2	40.05	41.08
	0	0.2	36.25	37.89
	-0.2	0.2	35.77	36.61
20	0.2	0.2	53.14	56.16
	0	0.2	41.83	43.06
	-0.2	0.2	35.38	38.50

Tabla 4: Carga crítica de pandeo en función del parámetro adimensional  $\lambda$ . Estudio de superficies cilíndrica, esférica y paraboloido hiperbólico.

Los resultados obtenidos, tal como se puede observar, son algo menores que los de [Matsunaga \(1999\)](#), pero se pueden entender al haber utilizado el autor un elemento de lámina rebajada.

Con respecto a la convergencia, para placas ha sido suficiente utilizar mallas de 20\*20 elementos alcanzando la convergencia con menos de 10 iteraciones y un solo elemento en el espesor, mientras que para láminas, para poder obtener resultados óptimos (menos de un 1% de error), hemos necesitado disponer dos elementos en el espesor y el tiempo de cálculo se ha duplicado, resultando algo más costoso que el propuesto por [Matsunaga \(1999\)](#).

## 8 CONCLUSIONES

En este artículo se ha estudiado el tema del pandeo de placas y láminas mediante el elemento finito serendípito de 20 nodos. Los resultados obtenidos en los ejemplos seleccionados, son acordes a los obtenidos mediante otras teorías o elementos. Se pone de manifiesto la validez de este elemento para cálculos geoméricamente no lineales incluso con

mallas poco tupidas. Extensiones de este trabajo para fenómenos que incluyan plasticidad o la intervención de fenómenos dinámicos no-lineales se estudiarán en próximas entregas.

## REFERENCIAS

- Brebbia, C.A., and Connor, J., Geometrically nonlinear finite element analysis. *Proc. ASCE*, 95: 463-483, 1971.
- Gallagher, R. H., Gellatly, R. A., Pedlog, J., and Mallet, R. H., A discrete element procedure for thin shell instability analysis. *ALAA J.*, S(1): 138-145, 1967.
- Kienzler, R., Altenbach, H., and Ott, I., *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*, Springer, 2004.
- Koiter, W.T., *A consistent first approximation in the general theory of shells*. In: The Theory of Thin Elastic Shells, Proceedings of the IUTAM Symposium, Amsterdam, pp. 12–33, 1960
- Timoshenko, S., and Woinowsky, and Krieger, S., *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, 1959.
- Martínez Valle, J.M., Albanesi, A., y Fachinotti, V., Estudio dinámico de láminas moderadamente gruesas con forma de paraboloide elíptico mediante elementos finitos 3D. *Mecánica Computacional*, XXXII: 129-14, 2013.
- Matsunaga, H., Vibration and stability of thick simply supported shallow shells subjected to in-plane stresses. *Journal of Sound and vibration*, 225: 41- 60, 1999.
- Navaratna, D. R., Analysis of elastic stability of shells of revolution by the Finite Element Method. *Proc. AIAA/ASME 8th Structural Dynamics and Materials Conf.*, Palm Springs, California, 175-183, 1967.
- Pietraszkiewicz, W., Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19 (2): 115–140, 1984.
- Pietraszkiewicz, W., Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells. *Advan. Mech.* 12 (1) 52-130, 1989.
- Reddy, J.N., Liu, C.F., A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Sciences*, 23:319–30, 1985.
- Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R.J., Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *J. Aerospace Sci*, 27, 1960.
- Wempner, G.A., *Mechanics of Solids, with Applications to thin Bodies*, Springer, 1982.
- Yao, F. C. C., *Analysis of shells by the finite element displacement method*. Ph.D. Thesis, Presented to the M.I.T. at Cambridge, Mass., 1968.
- Zienkiewicz, O. C, and Taylor, L.R., *El Método de los Elementos Finitos. Mecánica de Sólidos* McGraw-Hill, 2000.