

FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO FINITO EN COORDENADAS CURVILINEAS ARBITRARIAS PARA EL ESTUDIO DINÁMICO DE LÁMINAS MODERADAMENTE GRUESAS

J.M. Martínez Valle

Departamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, jmvalle@uco.es

Palabras Clave: Vibraciones, elementos finitos, láminas.

Resumen. Hasta la fecha, una gran cantidad de elementos finitos se han formulado para estudiar las estructuras laminares en régimen dinámico. En publicaciones anteriores se ha comentado que la mayoría de los estudios se han realizado para láminas de pendiente suave y sin la inclusión de la deformación por corte. Además, se analizaron las ventajas de los elementos finitos tridimensionales para su estudio. En esta publicación formulamos un elemento finito tipo lámina en coordenadas curvilíneas arbitrarias libre del bloqueo por corte y que ha dado muy buenos resultados en los casos prácticos propuestos.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio dinámico de estructuras laminares sigue siendo un foco de interés para investigadores e ingenieros. Fenómenos como el viento, sismos, impactos etc., pueden inducir movimientos oscilatorios en las estructuras, las cuales deben estar calculadas teniendo en cuenta este aspecto.

En publicaciones anteriores hemos puesto de manifiesto la complejidad del problema, [Martinez \(2013\)](#), y la dificultad, en el estado actual del conocimiento, de obtener soluciones analíticas al problema propuesto, [Alhazza \(2004\)](#) y [Leissa \(1993\)](#).

Dentro de la gran variedad de elementos finitos propuestos hasta la fecha, la mayoría de ellos son los llamados elementos de sólido degenerado, propuestos originalmente por [Ahmad \(1970\)](#). En este sentido, no son muchas las publicaciones que estudian las estructuras laminares en régimen dinámico para láminas con inclusión de la deformación por corte y para grandes curvaturas, [Liew \(1995, 1996\)](#) o [Stavridis \(1988, 1998\)](#).

En este trabajo presentamos un elemento lámina basado en una teoría de láminas consistente y formulada en coordenadas curvilíneas no necesariamente ortogonales. Por la construcción de la matriz de rigidez y de la matriz de masas, el elemento finito propuesto es válido para cualquier superficie, ya que se incluyen en estas matrices las características geométricas de las superficies lo que hace al elemento muy versátil.

Con objeto de aliviar el bloqueo por corte y de membrana de la matriz de rigidez para láminas esbeltas, hemos optado por el método de la interpolación mixta de componentes tensoriales (MITC), introducido originalmente por [Bathe y Dvorkin \(1986\)](#) y que se adapta con comodidad a la formulación propuesta.

En los ejemplos propuestos, comparamos la solución obtenida, con los resultados obtenidos mediante la formulación del elemento finito serendípito de 20 nodos en su versión dinámica que fue presentada en detalle en una publicación [Martinez \(2013\)](#).

2 GEOMETRÍA DE LÁMINAS.

Para el posterior desarrollo de las matrices de rigidez y de masas vamos a recordar algunos conceptos importantes referentes a la geometría de láminas.

Como sabemos, en la posición indeformada la posición de un punto de la lámina la podemos escribir como,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha^3 \mathbf{n}, \quad (1)$$

donde \mathbf{r}_0 es el vector de posición de un punto genérico de la lámina referido a la superficie media, α^3 es la coordenada normal a la superficie media y \mathbf{n} es el vector normal.

Si derivamos esta expresión, tenemos,

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = (\mathbf{r}_0 + \alpha^3 \mathbf{a}_3)_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \alpha^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} = (\delta_\alpha^\rho - \alpha^3 \cdot b_\alpha^\rho) \mathbf{a}_\rho, \quad (2)$$

donde \mathbf{g}_α son los vectores tangentes a una superficie cualquiera de la lámina y b_α^ρ son las componentes del tensor de curvatura de la lámina en su forma contra – covariante.

Esta última expresión la podemos escribir de una forma más ceñida como,

$$\mathbf{g}_\alpha = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a}_\alpha, \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el denominado tensor laminar y tiene por expresión,

$$\boldsymbol{\mu} = \delta_\alpha^\rho - \alpha^3 \cdot b_\alpha^\rho. \quad (4)$$

Este tensor contra-covariante tiene un papel fundamental en el desarrollo de las teorías de láminas ya que nos permite relacionar los vectores tangentes a la superficie media y los referidos a otra superficie cualquiera.

Con objeto de poder evaluar las distintas matrices de rigidez y de masas del elemento finito a desarrollar debemos conocer, a ser posible, una expresión de un elemento diferencial de volumen en función de cantidades conocidas de la superficie media.

Por definición, el diferencial de volumen lo podemos expresar como,

$$dV = g = \det g_{\alpha\beta} = [g_1 g_2 g_3], \quad (5)$$

y teniendo en cuenta la relación (3), tenemos,

$$\begin{aligned} dV = g = \det g_{\alpha\beta} &= [g_1 g_2 g_3] = & (6) \\ [(\delta_1^\rho - \alpha^3 \cdot b_1^\rho) \mathbf{a}_\rho \cdot (\delta_2^\gamma - \alpha^3 \cdot b_2^\gamma) \mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_3] &= \\ (\delta_1^\rho - \alpha^3 \cdot b_1^\rho) (\delta_2^\gamma - \alpha^3 \cdot b_2^\gamma) a e_{\rho\gamma 3} &= \\ a |\delta_\beta^\alpha - \alpha^3 b_\beta^\alpha| &= a [1 - 2\alpha^3 H + (\alpha^3)^2 \cdot K], \end{aligned}$$

donde H y K son la curvatura media y gaussiana de la superficie media, invariantes del tensor de curvatura en su forma contra-covariante.

Y por tanto podemos escribir,

$$dV = \mu dA = (1 - 2H\alpha^3 + K(\alpha^3)^2) dA \quad (7)$$

que nos relaciona los diferenciales de volumen y área en función de la curvatura media y gaussiana de la superficie media.

De modo similar, se pueden obtener las relaciones entre las distintas características geométricas de una superficie cualquiera de la lámina: tensores métricos, tensores de curvatura, símbolos de Christoffel de 1ª y 2ª especie, etc. y los de la superficie media a través del tensor laminar.

Así por ejemplo, los símbolos de Christoffel de 2ª especie los podemos expresar como:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = g_{\alpha,\beta} g^\gamma = (\mu_\alpha^\delta \mathbf{a}_\delta)_{,\beta} \cdot (\mu^{-1})_\xi^\gamma \mathbf{a}^\xi \quad (8)$$

Y desarrollando algo más esta expresión tenemos,

$$\tilde{\Gamma}_{33}^\gamma = \tilde{\Gamma}_{3\alpha}^3 = \tilde{\Gamma}_{\alpha 3}^3 = 0 \quad (9)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - t \zeta_\lambda^\gamma b_{\alpha|\beta}^\lambda \quad (10)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} - t c_{\alpha\beta} \quad (11)$$

$$\tilde{\Gamma}_{3\beta}^\alpha = -\zeta_\lambda^\alpha b_\beta^\lambda \quad (12)$$

con ζ_λ^α como el inverso del tensor laminar. Estas expresiones son muy interesantes para desarrollos concernientes a láminas gruesas o para aquellos concernientes a teorías de orden superior, donde no podemos asumir que las propiedades geométricas del espacio laminar no dependen del espesor.

3 CINEMÁTICA DE LÁMINAS.

La expresión de las componentes del tensor de Green Lagrange en régimen lineal, las podemos escribir en la forma, [Wempner \(1982\)](#),

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha||\beta} + V_{\beta||\alpha}), \quad (13)$$

donde V son los corrimientos de un punto cualquiera de la lámina y la doble barra vertical expresa la derivada covariante respecto de una base de vectores que no tienen por qué corresponder a la superficie media.

Como hemos visto anteriormente, los vectores del espacio tangente de una superficie de la lámina V_α y los de la superficie media v_β están relacionados a través del tensor laminar en la forma:

$$V_\alpha = \mu_\alpha^\beta v_\beta \quad (14)$$

$$V_3 = v_3 \quad (15)$$

En este punto, podemos expresar las derivadas covariantes de los corrimientos respecto de la base de vectores tangentes de la superficie media como,

$$V_{\alpha||\beta} = \mu_\alpha^\lambda (v_{\lambda|\beta} - b_{\lambda\beta} v_3) \quad (16)$$

Por lo que se puede reescribir la expresión (13) en la forma,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mu_\alpha^\lambda (v_{\lambda|\beta} - b_{\lambda\beta} v_3) + \mu_\beta^\lambda (v_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} v_3)) \quad (17)$$

donde las derivadas covariantes ya se expresan respecto a la base de vectores tangente a la superficie media.

Teniendo en cuenta la expresión del tensor laminar,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} v_3 \right) + \left(c_{\alpha\beta} v_3 - \frac{1}{2}(b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} + b_\beta^\lambda v_{\lambda|\alpha}) \right) (\alpha^3) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(V_{\alpha||3} + V_{3||\alpha}) = \frac{1}{2}(\mu_\alpha^\lambda v_{\lambda,3} + v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda) \quad (19)$$

$$\varepsilon_{33} = v_{3,3} \quad (20)$$

En este punto hemos de introducir la hipótesis cinemática correspondiente. En nuestro caso es una teoría con efectos de cortante de 1° orden.

$$v_\alpha = u_\alpha + \alpha^3 \theta \quad (21)$$

que físicamente indica que tras el proceso de deformación, las fibras normales a la superficie media permanecen rectas pero no necesariamente normales.

Después de un cálculo más o menos largo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3 \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_{\beta}^{\lambda}u_{\lambda|\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda|\beta}) + c_{\alpha\beta}u_3 \right) (\alpha^3) \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\theta_{\alpha} + u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda}) \right) (\alpha^3)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Por lo que se pueden expresar las componentes del tensor de Green Lagrange, E_{ij} , de la siguiente forma,

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & \varepsilon_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{3\alpha} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta} + \theta^3 \rho_{\alpha\beta} & \frac{1}{2} \zeta_{\alpha} \\ \frac{1}{2} \zeta_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Las ecuaciones deducidas son las más utilizadas en teoría de láminas con efectos de cortante de 1° orden. No obstante, hemos de advertir que existen distintas variantes a estas ecuaciones por la supresión de uno u otros términos en el desarrollo, que a veces se ha hecho con más o menos fundamento físico.

3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Existen distintas formas de llegar a las ecuaciones de gobierno del problema dinámico ya sea para obtener soluciones analíticas o aproximadas. Nosotros en esta publicación hemos optado por el principio de Hamilton.

Nuestro problema a resolver se reduce a determinar:

$$\delta \int_{\text{tiempo}} \iint_A L^* \sqrt{a} d\xi d\eta dt = 0 \quad (24)$$

donde L^* es la denominada función de densidad lagrangiana que se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía interna de deformación, π^{int} , los parámetros ξ y η son los parámetros gaussianos adimensionales que parametrizan el elemento finito, a es el determinante del tensor métrico correspondiente a la superficie de referencia, usualmente la superficie media.

Derivando la energía interna de deformación y la energía cinética, llegamos al problema clásico de autovalores,

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (25)$$

donde K es la matriz de rigidez y M la matriz de masas.

3.1 Energía interna de deformación del elemento finito tipo lámina con inclusión de deformación por corte en coordenadas curvilíneas arbitrarias.

Para poder formular la matriz de rigidez del elemento finito, debemos desarrollar la expresión de la energía interna de deformación del mismo.

De manera general, podemos escribir,

$$\pi^{int} = \frac{1}{2} \int_V \tau^{ij} E_{ij} dV, \quad (26)$$

donde τ^{ij} es el tensor de tensiones y E_{ij} es el tensor de Green Lagrange.

Teniendo en cuenta la expresión (7) se puede escribir,

$$\pi^{int} = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{2} \tau^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha 3} E_{\alpha 3} \right) \sqrt{a} (1 - 2H\alpha^3 + K(\alpha^3)^2) d\alpha^1 d\alpha^2 \quad (27)$$

Si asumimos que la lámina es moderadamente gruesa, se puede reescribir la ecuación anterior,

$$\pi^{int} \cong \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{2} \tau^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha 3} E_{\alpha 3} \right) \sqrt{a} \mu d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (28)$$

En este punto debemos introducir las ecuaciones constitutivas que relacionan deformaciones y tensiones. Para un material elástico lineal tenemos,

$$\tau^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} \quad \tau^{\alpha 3} = C^{\alpha 3\beta 3} E_{\beta 3}, \quad (29)$$

donde $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el conocido tensor de las constantes elásticas, definido como:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1-\nu}{2} \left(a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma} + a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} \right) \quad (30)$$

con ν el coeficiente de Poisson.

Finalmente, la energía elástica de deformación la podemos escribir,

$$\pi^{int} = \frac{1}{2} \int_A \left(C^{\alpha\beta\gamma\delta} h e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} + \frac{h^3}{12} C^{\alpha\beta\gamma\delta} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\gamma\delta} + C^{\alpha 3\beta 3} h E_{\alpha 3} E_{\beta 3} \right) \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (31)$$

donde las expresiones de los distintos tensores se dedujeron en el apartado anterior y vienen dados por las ecuaciones (22) y (23).

3.2 Energía cinética del elemento finito tipo lámina en coordenadas curvilíneas. Matriz de masas consistente y concentrada.

La matriz de masas del elemento finito es necesaria para estudiar el problema dinámico. Las matrices de masas concentrada y consistente, son las formulaciones alternativas que se pueden utilizar. En este caso, nos proponemos desarrollar la matriz de masas consistente, utilizando las mismas funciones de forma para su discretización que para la geometría. Al ser elementos de bajo orden los que vamos a utilizar para la interpolación de las variables, las soluciones aportadas con la matriz de masas concentrada son muy pobres, y es por ello por lo que nos hemos decantado por esta opción que la mayoría de los autores coinciden en destacar por sus mayores bondades, [Zienkiewicz \(2000\)](#).

El desarrollo de la matriz de masas para un elemento finito en coordenadas curvilíneas es más complejo que en otro tipo de elementos, como los elementos tridimensionales, pero conceptualmente se desarrolla de la misma forma, a través de la energía cinética.

Nuestro punto de partida es la definición de la energía cinética,

$$dT = \int_A \int_{\alpha^3} \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} \mu d\alpha^3 dA, \quad (32)$$

donde \mathbf{R} es el vector de posición de un punto de la lámina referido a la superficie media. Si tenemos en cuenta que la teoría de láminas subyacente es de cortante de 1º orden podemos escribir:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{R}_0 + \alpha^3 d\mathbf{N} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \alpha^3 \ddot{\mathbf{N}} \end{aligned} \quad (33)$$

Por lo que el funcional de la energía cinética es:

$$\begin{aligned} dT = \int_A [& (\ddot{\mathbf{R}}_0 \cdot \delta \mathbf{R}_0) \underbrace{\int_{\alpha^3} \rho \mu dA d\alpha^3}_{\substack{\text{Término Constante} \\ \text{T.C.}}} + (\ddot{\mathbf{N}} \cdot \delta \mathbf{R}_0 + \ddot{\mathbf{R}}_0 \cdot \delta \mathbf{N}) \underbrace{\int_{\alpha^3} \rho \alpha^3 \mu dA d\alpha^3}_{\substack{\text{Término Lineal} \\ \text{T.L.}}} \\ & + (\ddot{\mathbf{N}} \cdot \delta \mathbf{N}) \underbrace{\int_{\alpha^3} \rho (\alpha^3)^2 \mu dA d\alpha^3}_{\substack{\text{Término Cuadrático} \\ \text{T.Cuad.}}}] \end{aligned} \quad (34)$$

En este punto procede la interpolación de las variables que intervienen. Interpolaremos tanto las componentes del vector desplazamiento y giro como sus derivadas.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_0 &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) \delta R_{0i} \\ \ddot{\mathbf{R}}_0 &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) \ddot{R}_{0i} \\ \delta \mathbf{N} &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) \delta N_i \\ \ddot{\mathbf{N}} &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) \ddot{N}_i \end{aligned} \quad (35)$$

Siendo R_{0i} las componentes del vector desplazamiento de la superficie media y N_i las componentes del vector giro (no confundir con las funciones de forma que las precede en la interpolación). Los términos que aparecen en la ecuación (34) se pueden integrar sin dificultad teniendo en cuenta la ecuación (7). Démosles cuenta que en su integración los términos de la matriz de masas dependen de la curvatura media y gaussiana y el espesor de la lámina, a

diferencia, por ejemplo de un elemento placa donde todas estas cantidades salvo el espesor valen 0.

En este punto, ya podemos resolver nuestra ecuación de partida:

$$\delta \int_{\text{tiempo}} \iint_A (T - \pi^{int}) \sqrt{a} d\xi d\eta dt = 0 \quad (36)$$

4 BLOQUEO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ. INTERPOLACIÓN MIXTA DE COMPONENTES TENSORIALES.

Deducida la expresión de la energía interna de deformación para una estructura laminar con efectos de cortante de 1° orden y de la energía cinética, necesarias para la formulación dinámica del problema, necesitamos discretizar la superficie media de la lámina mediante la formulación isoparamétrica, para posteriormente integrar en el espesor.

Para la discretización de los desplazamientos, se han utilizado funciones de forma bilineales,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) \boldsymbol{\delta}_i, \quad (37)$$

Donde $\boldsymbol{\delta}_i$ representa el vector de desplazamientos generalizados nodales, es decir, $\boldsymbol{\delta}_i = (u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2)$.

Una de las ventajas que ofrece la formulación propuesta es que los vectores naturales, normales y demás parámetros geométricos de la superficie son conocidos de manera exacta.

Como se ha comentado en la introducción, las estructuras laminares al hacerse más esbeltas adolecen del llamado bloqueo por corte (y de membrana si el elemento presenta curvatura), por el que se produce una sobrerigidización de la matriz de rigidez.

Con objeto de soslayar este inconveniente, acudimos a una técnica bien conocida y propuesta originalmente por [Bathe y Dvorkin \(1986\)](#) para elementos de bajo orden, y por [Bucalem y Bathe \(1993\)](#) para elementos de orden superior, denominada Interpolación Mixta de Componentes Tensoriales (MITC) y que se puede englobar dentro de las llamadas técnicas de deformaciones asumidas. En este caso, hacemos una interpolación diferente para cada una de las componentes covariantes del tensor de Green Lagrange, de forma que:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{AS} = \sum_{k=1}^p \Lambda_k^{ij}(\xi_1, \xi_2) \tilde{\varepsilon}_{ij}^{DI}(\xi_p, \xi_p, t) \quad (38)$$

En esta fórmula, las deformaciones impuestas $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{AS}$ se calculan a partir de las deformaciones interpoladas directamente a través de unas funciones de forma que hemos denominado $\Lambda_k^{ij}(\xi_1, \xi_2)$. Estas funciones de forma dependen de las coordenadas locales (ξ_1, ξ_2) y se corresponden con la componente de la deformación (i,j) evaluada en el punto (k) . Los puntos donde evaluamos estas deformaciones son los llamados “tying points”. En consecuencia, las funciones de forma cumplen:

$$N_k^{ij}|^l = N_k^{ij}(\xi_l, \xi_l) = \delta_{kl} \quad (39)$$

Para más detalles respecto a esta formulación, nos referimos a los trabajos anteriormente citados.

En nuestro caso las componentes del tensor de Green Lagrange están dadas por las ecuaciones (22) y (23). Por ejemplo si desarrollamos las ecuaciones del tensor de membrana, relación entre deformación y desplazamiento, tenemos,

$$B_{membrana} = \begin{pmatrix} (\partial_1 - \Gamma_{11}^1)N_I & -\Gamma_{11}^2 N_I & -b_{11}N_I & 0 & 0 \\ (-\Gamma_{22}^1)N_I & (\partial_2 - \Gamma_{22}^2)N_I & -b_{22}N_I & 0 & 0 \\ (\partial_2 - 2\Gamma_{12}^1)N_I & (\partial_1 - 2\Gamma_{12}^2)N_I & -2b_{12}N_I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

que serían interpoladas adecuadamente mediante las funciones de forma consideradas.

Se ha de notar que las características geométricas de la superficie se definen en los nodos del elemento y que debido a la invariancia de la energía interna de deformación podemos operar directamente en coordenadas tensoriales sin ser necesario acudir a las componentes físicas.

5 RESULTADOS OBTENIDOS

En publicaciones anteriores se han obtenido las frecuencias fundamentales de vibración para láminas con forma de paraboloides hiperbólico y elíptico, que son ejemplos de láminas de doble curvatura. Como se detalló en dicho artículo, [Martínez \(2013\)](#), las láminas de doble curvatura suponen tests muy rigurosos para validar soluciones ya sean de tipo estático o dinámico. En este trabajo se formularon la versión clásica del elemento finito de 20 nodos y otra en la que se tomaron las deformaciones del elemento en un sistema curvilíneo tangente a la superficie media.

En el presente artículo, se compara la solución obtenida entonces con la nueva formulación del elemento lámina propuesto. Comparamos igualmente las soluciones obtenidas con la de los trabajos de [Narita y Leissa \(1984\)](#) y [Chakravorty \(1995 a,b\)](#) que utilizaron elementos finitos denominados de sólido degenerado.

Los datos que hemos utilizado para el ejemplo son: Paraboloides hiperbólico de bordes curvos de planta cuadrada de $1 \cdot 1 \text{ m}$ de lado, espesor constante de 0.01 m , radios de curvatura iguales y de signo contrario de valor $R = 2 \text{ m}$ y 1 metro de flecha en las parábolas de los bordes, $E = 10.92 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson 0.30, densidad $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, sometida a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m^2 y articulado fijo en las cuatro esquinas, ([Figura 1](#)). En todos los casos hemos utilizado la matriz de masas consistente.

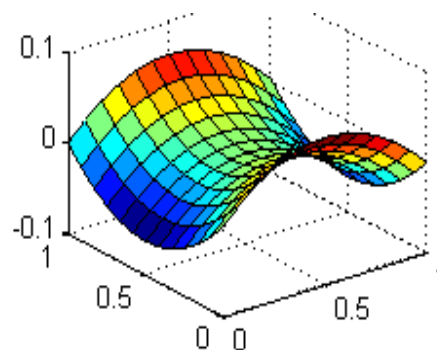


Figura 1: Representación del paraboloides hiperbólico.

La frecuencia asociada al primer modo de vibración del paraboloides hiperbólico según los distintos elementos son:

	Narita y Leissa (1984)	Chakravorty (1995b)	E.F. 20 nodos Sist. Cartesiano (2013)	E.F. 20 nodos Sist. Curvilíneo (2013)	E.F. Teoría Láminas de 1º orden
1º Modo de Vibración (rad/s)	17.16	17.25	17.53	17.05	17.22

Tabla 1: Frecuencias asociadas al 1º modo de vibración para el paraboloides hiperbólico.

Vistos los resultados, la eficiencia del elemento lámina propuesto es del orden de los otros elementos estudiados (menos de un 1% de error) en todos los casos. Una diferencia sustancial respecto a los elementos tridimensionales estudiados, es que en este caso la matriz de masas utilizada es la consistente.

Paraboloides elíptico de planta cuadrada de $10 \cdot 10 \text{ m}$ de lado con $2,5 \text{ m}$ de flecha en las parábolas de los bordes, espesor constante de 0.08 m , $E = 21000000 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson 0.30 , peso específico $\rho = 24 \text{ kN/m}^3$, sometida a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m^2 y condiciones mixtas de apoyo en sus bordes.

	E.F. 20 nodos Sist. Cartesiano	E.F. 20 nodos Sist. Curvilíneo	E.F. Teoría Láminas de 1º orden
1º Modo de Vibración (rad/s)	353.8396	310.9571	313.41

Tabla 2: Frecuencias asociadas al 1º modo de vibración para el paraboloides elíptico.

A continuación presentamos las 5 primeras frecuencias fundamentales de vibración comparándolas con las frecuencias obtenidas con el elemento finito serendípito de 20 nodos en coordenadas curvilíneas, [Martínez \(2013\)](#):

	Primeras Frecuencias de vibración (rad/s)				
	1º	2º	3º	4º	5º
Sist. Curvilíneo E.F. 20 nodos	310.9571	311.3424	324.4821	324.6731	380.4881
E.F. Teoría de Láminas	313,41	319.871	330.55	341.19	385.72

Tabla 3: Frecuencias asociadas a los primeros modos de vibración.

Como vemos, las diferencias en las frecuencias de vibración no son muy significativas. Se aprecia una buena convergencia hacia los resultados obtenidos con el elemento finito serendípito de 20 nodos en coordenadas curvilíneas. Los resultados obtenidos no presentan oscilaciones significativas respecto de los otros elementos, por lo que entendemos que el elemento propuesto es aceptable y válido para el estudio de láminas moderadamente gruesas con influencia de la deformación por corte.

6 CONCLUSIONES

La formulación del elemento lámina propuesto en régimen dinámico ha sido presentada. Pese a una formulación más compleja que otros elementos finitos dedicados a tal fin, la propuesta presenta una serie de ventajas como es su versatilidad, ya que se formula en coordenadas curvilíneas arbitrarias por lo que se puede adaptar a cualquier tipo de superficie parametrizable. Para este elemento, hemos utilizado la matriz de masas consistente en concordancia con el pensamiento de otros autores. Para evitar el conocido problema del bloqueo de la matriz de rigidez, nos hemos decantado por la interpolación mixta de las componentes tensoriales del tensor de Green Lagrange y los resultados obtenidos son óptimos. En cuanto a los resultados nos hemos centrado fundamentalmente en las láminas de doble curvatura que el autor ha estudiado con anterioridad en otras publicaciones.

REFERENCIAS

- Ahmad, S., Irons B., and Zienkiewicz, O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 419-451, 1970.
- Alhazza, K., and Alhazza, A, A review of the vibrations of plates and shells. *The Shock and Vibration Digest*; 36(5):377-395, 2004.
- Bathe, K.J., y Dvorkin, E.N., A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* , 22:697-722, 1986.
- Bucalem, M.L., y Bathe, K.J., Higher-order MITC general shells elements. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 36:3729-3754, 1993.
- Chakravorty, D., and Bandyopadhyay, J, On the free vibration of shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):673-684, 1995a.
- Chakravorty, D., Bandyopadhyay, J.N., and Sinha, P.K., Free vibration of point-supported laminated doubly curved shells-a finite element approach. *Comput Struct*, 54(2):191-8, 1995b.
- Leissa, A. W., Vibration of Shells. Acoustical Society of America. Sewickly, 1993.
- Liew, K., and Lim, C., Vibratory behaviour of doubly curved shallow shells of curvilinear planform. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(12):1277-1283, 1995.
- Liew, K., and Lim, C., Vibration of doubly-curved shallow shells. *Acta Mechanica*, 114:95-119, 1996.
- Martínez Valle J.M., Albanesi, A., y Fachinotti, V., Estudio dinámico de láminas moderadamente gruesas con forma de paraboloides elípticos mediante elementos finitos 3D. *Mecánica Computacional*, XXXII:129-14, 2013.
- Narita Y. and Leissa A.W. Vibrations of corner point supported shallow shells of rectangular planform. *Earthq Eng Struct D*, 12(5):651-61, 1984.
- Stavridis, L., Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base. *Journal of Sound and Vibration*, 218(5):861-882, 1998.
- Stavridis, L. and Armenakas, A., Analysis of shallow shells with rectangular projection. *Applications Journal of Engineering Mechanics*, 114(6):943-952, 1988.
- Wempner, G.A., *Mechanics of Solids, with Applications to thin Bodies*, Springer, 1982.
- Zienkiewicz, O. C, and Taylor, L.R., *El Método de los Elementos Finitos. Mecánica de Sólidos* McGraw-Hill, 2000.