

## CARACTERIZAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE FALHA OBTIDA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

Guilherme Schumacher da Silva<sup>a</sup>, Luis E. Kostaski<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo Mecânica Aplicada, Engenharia mecânica, Universidade Federal do Pampa (Unipampa) - Campus Alegrete. Av. Tiarajú, 810 - Alegrete - RS - CEP: 97546-550 Fone/Fax: (55) 3421-8400.*

**Palavras Chave:** Método dos elementos discretos, superfície de falha, ruptura frágil, estado multiaxial de tensões.

**Resumo.** Neste trabalho se apresenta o estudo da superfície de falha obtida no Método dos Elementos Discretos formado por barras (do inglês DEM). O DEM formado por barras é um método que consiste em representar o meio contínuo por meio de um arranjo regular de barras de treliça. As massas são concentradas em nós e a rigidez das barras representa o comportamento da porção do contínuo que se deseja modelar. O balanço energético é levado em conta durante todo o processo de fratura. A lei constitutiva das barras leva em conta a energia de fratura do material e é utilizada uma função de variação espacial desta propriedade para levar em conta possível heterogeneidade do material simulado. Assim, neste trabalho, se estuda como influencia a variação dos parâmetros que regulam a lei constitutiva e a distribuição espacial da energia de fratura na superfície de falha gerada. Esta superfície é comparada com os critérios de falha conhecidos. Finalmente, dado um material que tem falha conhecida, ou se ajusta melhor a certo critério teórico, e se definem qual a combinação de parâmetros, e seu valores, que se devem usar para ajustar a superfície obtida com a desejada.

**Abstract.** This paper presents the study of the failure surface obtained in the truss-like Discrete Element Method (DEM). The DEM consists in representing the continuous medium through a regular arrangement of the lattice elements. The masses are concentrated on the nodes and stiffness of the elements represents the behavior of the continuous portion of the solid. All the energy balance is taken into account throughout the process of fracture. The element's constitutive law considers the fracture energy of the material and its spatial variation is used to take into account the heterogeneity of the simulated materials. In this work, we study the influence of the parameters governing the constitutive law and the spatial distribution of fracture energy on the failure surface obtained by DEM. This surface is compared with the known failure criteria. Finally, is compared the DEM failure criteria with the concrete and rock failure and are defined the best combination of DEM parameters that fit the results to obtain the failure surface desired.

## 1. INTRODUÇÃO

A falha frágil sempre foi um causador de catástrofes na engenharia, por isso, evitá-la é crucial. Contudo, a falha, ainda é um parâmetro de difícil determinação, pois depende de diversos fatores como: tamanho da trinca pré-existente, modo de propagação, velocidade de propagação, entre outros.

Os métodos numéricos utilizado para predizer dano podem ser considerados divididos nos baseados na mecânica do contínuo, métodos clássicos, e os modelos discretos que não se baseiam nessa teoria. Como comenta [Krajcinovic \(1996\)](#), nos modelos clássicos a teoria da plasticidade é estendida para estudar os processos de dano, levando a procedimentos que encontram sérias dificuldades ao lidar com quase materiais frágeis. Já que em estes materiais ocorre efeito de escala, dano anisotrópico e comportamento associativo entre os defeitos.

Por outro lado, nos modelos discretos se perde a versatilidade dos elementos finitos, mas em compensação, problemas como localização, evolução de dano anisotrópico e efeitos associativos entre diferentes partes dos corpos podem se realizar sem grandes dificuldades.

Desta forma, o método dos elementos discretos formados por barras (DEM), utilizado neste trabalho, que pertence ao grupo dos modelos discretos, é uma boa opção quando se tenta determinar a falha de materiais. Em este método se considera as massas como sendo pontuais e para ligá-las utiliza elementos que formam uma treliça espacial regular. Quando a tensão de falha for atingida por algum elemento, este simplesmente é apagado pelo programa. Em todo este processo é levado em conta a energia elástica armazenada no elemento assim como a energia de fratura liberada no processo de ruptura.

Neste trabalho iremos apresentar a influência de dois parâmetros da lei constitutiva bilinear do DEM, na caracterização da superfície de falha.

## 2. INTRODUÇÃO AOS CRITERIOS DE FALHA

Quando um elemento estrutural está submetido a tensão uniaxial é muito simples definir se ele falhará ou não. Somente se compara a tensão com a tensão de escoamento ou de ruptura do material que o compõe. Quando o elemento estrutural estiver sujeito a tensões biaxiais ou triaxiais é necessário definir um critério de falha.

Existem diferentes teorias ou critérios de falha que podem depender tanto do tipo de material como do seu comportamento, da temperatura, taxa de carregamento, ambiente químico ou até do processo de fabricação utilizado.

Nos critérios mais utilizados para materiais dúcteis, se diz que o material falha quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta ou a energia de distorção máxima se igualam a tensão de cisalhamento de um ensaio de tração uniaxial no instante da ruptura (ou escoamento) ou a energia de distorção em esse instante. Estes critérios são conhecidos como de Tresca e von Mises, respectivamente. A forma desses dois critérios de falha está mostrada na [Figura 1](#) tanto no espaço de tensões principais quanto no plano de tensões. ([Popov, 1998](#))

Caso o estado tensional seja multiaxial, é possível representar o critério de falha de Tresca e de von Mises no sistema triaxial de tensões principais. Em este caso os critérios representam uma superfície no espaço que é conhecido como superfície de falha. ([Popov, 1998](#))

Quando se tem um material frágil, os critérios de Tresca e Von Mises não dão bons resultados. Dentre os critérios de falha para materiais frágeis, se encontra o critério de Rankine ou de tensão normal máxima, onde a falha ocorre quando a tensão principal alcança a tensão de ruptura ou falha do material ([Figura 2a](#)).

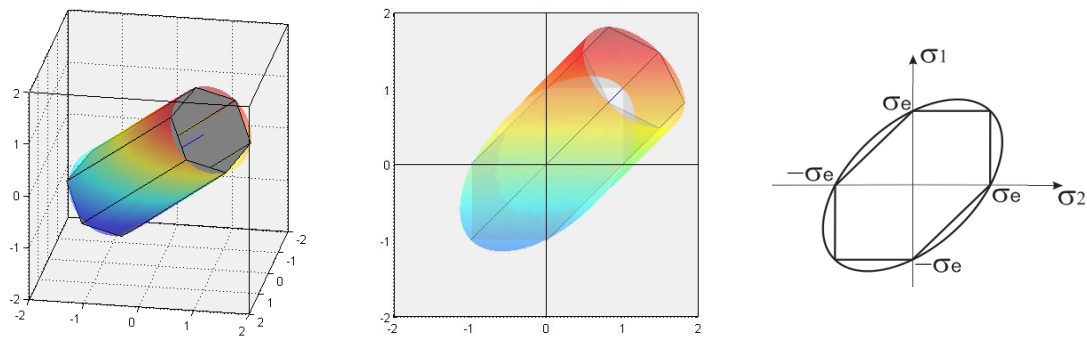


Figura 1: Comparação entre Tresca e Von Mises.

Todas as teorias até aqui mostradas supõem que as propriedades do material em tração e compressão são iguais. Mas tem materiais como a rocha, o ferro fundido, o concreto e os solos que tem propriedades marcadamente diferentes dependendo do sentido a aplicação dos esforços. Em 1885, Duguet (apud Popov, 1999) propôs um modelo que reconhece a maior resistência de materiais frágeis à compressão biaxial que à tensão. Portanto, a região de tração biaxial, no espaço de tensões principais, é menor que na compressão biaxial (Figura 2b). Nos outros dois quadrantes se supõe uma variação linear de tensões. Griffith refinou essa idéia introduzindo a energia superficial em trincas microscópicas do material e mostrou a importância dos esforços de tração comparados com os de compressão em relação à falha. Com esta teoria, uma trina existente propagará rapidamente se a energia de deformação elástica liberada é maior que o incremento na energia na energia superficial da trinca.

Outra tentativa importante para representar o comportamento na falha de materiais com propriedades diferentes a tração e compressão foi realizada por Mohr. Em este critério devem ser realizados vários testes diferentes com o mesmo material. Realizando três ensaios (compressão, tração e cisalhamento) e construindo a envolvente dos mesmos se define o estado de esforços na ruptura do material. O critério de Mohr pode-se denotar de maneiras diferentes na parte onde existem carregamentos combinados de tração e compressão. As vezes pode ser parabólico ou reto, depende das propriedades do material, mas o limite mínimo é uma reta (coincidente com o modelo de Duguet).

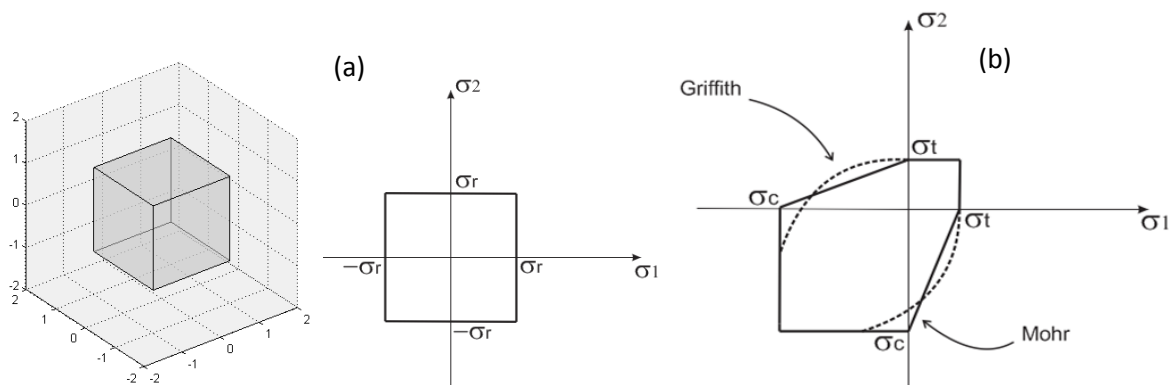


Figura 2: a) Critério da tensão normal máxima no espaço e no plano de tensões, b) diferencia entre critérios para matérias com diferente comportamento a tração e compressão.

## 2.1 Superfícies de falha para materiais frágeis

No espaço de tensões principais os critérios de falha para materiais frágeis são similares à superfície de fluência do critério de Von Mises (Malvern, 1977; Popov, 1999) com uma importante diferencia. O limite se torna um cone em vez de um tubo como no critério de Von

Mises. A superfície de falha do concreto modificada de William e Warnke (William e Warnke, 1975; Balan et al., 1997) que serve para materiais frágeis é descrita por:

$$\tau_0(\sigma_0, \theta) = \tau_c \frac{a\eta + b\sqrt{a(\eta^2 - 1) + b^2}}{a\eta^2 + b^2} \quad (1)$$

onde

$$a = \tau_c^2 - \tau_t^2; b = 2\tau_t - \tau_c; \eta = 2\cos\theta \quad (2)$$

e  $\sigma_0$  é o esforço hidrostático e  $\theta$  o ângulo de Lode (Popov, 1999).

A Eq. (1) define a forma da superfície de falha no plano desviador  $\sigma_0 = \text{constante}$  e descreve uma curva suave convexa (elíptica), mostrada na Figura 3. Os parâmetros  $\tau_c$  e  $\tau_t$  da Eq. (2) são funções do esforço hidrostático e das resistências uniaxiais a tração e compressão.

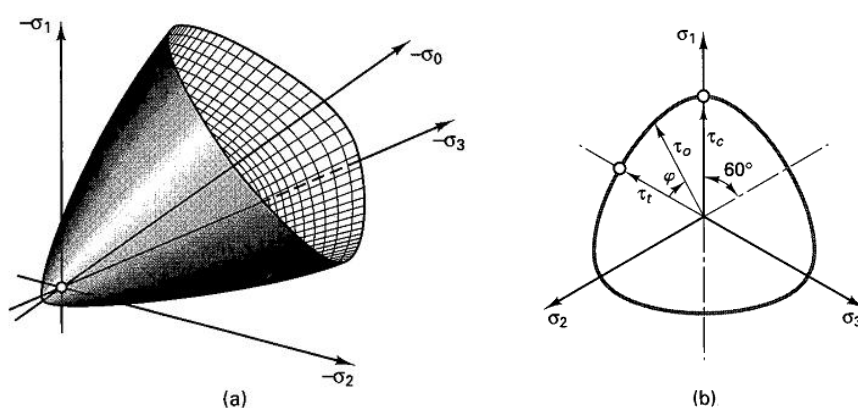


Figura 3: Superfícies de falha: (a) vista geral e (b) vista da secção.

Na Figura 4a se mostra uma comparação da superfície de falha para o concreto no plano com resultados experimentais encontrados por Kupfer et al. (1969). Pouco tempo depois Kupfer e Gerstle(1973) encontraram a superfície de falha para o estado biaxial de três tipos de concreto diferentes. A envolvente desses resultados são mostrados na Figura 4b comparados com algumas simulações feitas com o DEM formado por barras, Puglia (2013).

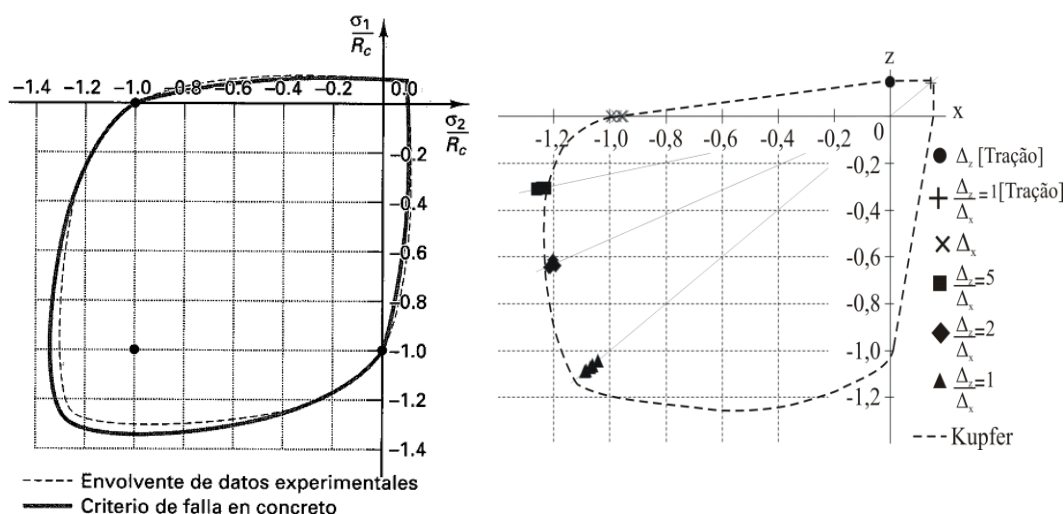


Figura 4: (a) Comparação entre resultados experimentais com pressuposições teóricas (b) carregamento biaxial para três tipos de concreto, Puglia (2013).

### 3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

O Método dos Elementos Discretos formado por barras é baseado na representação do sólido por intermédio de uma treliça espacial (ver Figura 5) com barras que suportam somente cargas axiais. As massas estão concentradas nos nós, desta forma modelos com elementos discretos permitem resolver problemas de dinâmica estrutural por meio de integração numérica explícita das equações de movimento. O módulo básico é construído interconectando 20 elementos de barra e nove nós. Cada nó do arranjo 3D tem três graus de liberdade, correspondentes às três componentes do vetor deslocamento em coordenadas globais. As equações que relacionam as propriedades dos elementos com as constantes elásticas de um meio contínuo e isotrópico são:

$$A_l = \frac{L^2}{2(1+\nu)}, \quad A_d = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\nu}{1-2\nu} A_l \quad (3)$$

onde  $\nu$  é o módulo de Poisson do sólido, e  $A_l$  e  $A_d$  representam as áreas da seção transversal do elemento longitudinal e diagonais respectivamente. É importante notar que, para  $\nu = 0,25$ , a equivalência com o contínuo isotrópico é completa. Por outro lado, aparecem pequenas diferenças nos termos de corte para  $\nu \neq 0,25$ . Os detalhes do cálculo da seção transversal equivalente por unidade de comprimento das barras longitudinais e diagonais das Eq. (3) podem ser encontradas em [Nayfeh e Hefzy \(1978\)](#) e [Dalguer et al \(2001\)](#).

O sistema de equações resultante de aplicar a segunda lei de Newton em cada nó tem a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{t}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}) = 0 \quad (4)$$

onde  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\ddot{\mathbf{x}}$  são os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, enquanto  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes de massa e amortecimento respectivamente. Os vetores  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  e  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  contêm as forças internas e externas que atuam nas massas nodais. Como as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são diagonais, as Eq. (4) não são acopladas. Para integrar as Eq. (4) no domínio do tempo, é utilizado um esquema de integração explícita de diferenças finitas. É interessante notar que, desde que as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos podem ser levados em conta naturalmente.

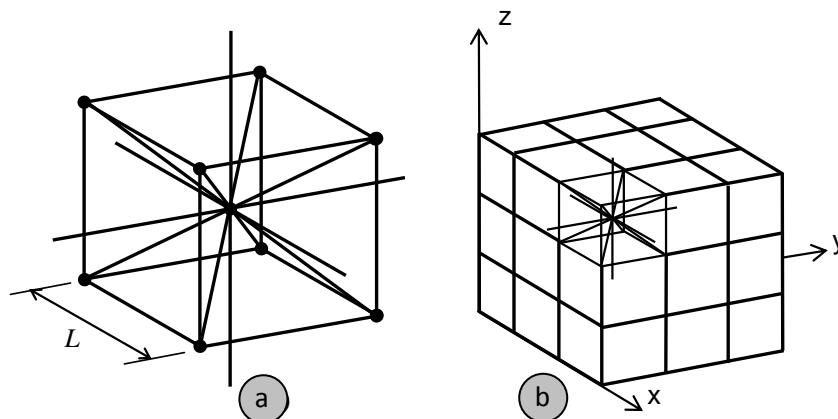


Figura 5: Discretização utilizada no DEM: a) modelo cúbico básico, b) geração do corpo prismático

A estabilidade do esquema de integração na região de comportamento físico linear é assegurada limitando o incremento de tempo  $\Delta t$  de modo que:

$$\Delta t \leq 0,6L/C_p \quad (5)$$

onde  $C_p$  é a velocidade de propagação da onda longitudinal,  $C_p = \sqrt{E/\rho}$ . A convergência das soluções do DEM para elasticidade linear e instabilidade elástica foi extensivamente verificada (ver, por exemplo, [Dalguer et al., 2003](#)).

### 3.1 Modelo constitutivo não-linear

Como explicado em [Maders et al. \(2012\)](#) este método leva em conta a energia de fratura dissipada no processo de ruptura, impondo-se como condição que a energia dissipada pela fratura do material contínuo e sua representação discreta sejam equivalentes. Assim, a fratura de um espécime cúbico de dimensões  $L \times L \times L$  (ver [Figura 6a](#)) terá uma energia dissipada devido a uma ruptura paralela a uma de suas faces:

$$\Gamma = G_f \Lambda = G_f L^2 \quad (6)$$

onde  $\Lambda$  é a área de fratura atual. Por outro lado, a energia dissipada quando o módulo do DEM de dimensões  $L \times L \times L$  é dividido em duas partes leva a contribuição de cinco elementos longitudinais (quatro coincidentes com os eixos do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais (sendo seu comprimento,  $L_d = 2/\sqrt{3}L$ ) (ver [Figura 6b](#)). Assim, a energia dissipada pelo módulo do DEM pode ser escrito como a seguir:

$$\Gamma_{\text{DEM}} = G_f \left( 4 \cdot 0,25 \cdot c_A + c_A + 4 \cdot c_A \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2 \quad (7)$$

onde o primeiro termo na soma considera os quatro elementos dos eixos (o coeficiente 0,25 é devido ao fato de que cada elemento é compartilhado por quatro módulos), o segundo termo considera o elemento longitudinal interno, e o terceiro termo considera a contribuição dos quatro elementos diagonais.

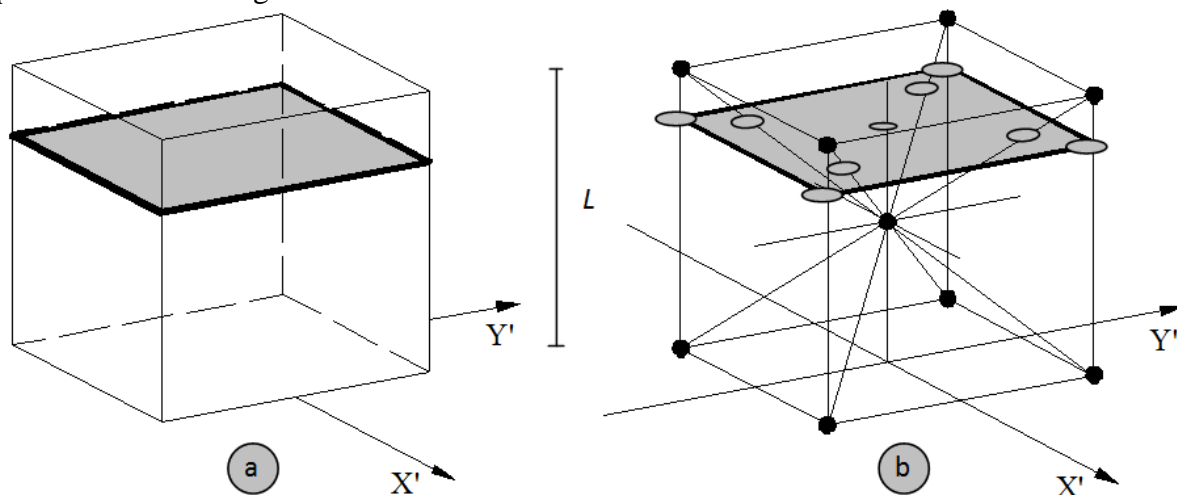


Figura 6: a) sólido cúbico de dimensões  $L \times L \times L$ , b) módulo do DEM de dimensões  $L \times L \times L$ .



O coeficiente  $c_A$  é um parâmetro de escala utilizado para fazer cumprir a equivalência entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_{\text{DEM}}$ . Assim, trabalhando as expressões (6) e (7) resulta:

$$G_f L^2 = G_f \left( \frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (8)$$

da qual pode-se deduzir facilmente que  $c_A = 3/22$  para que exista equivalência entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_{\text{DEM}}$ . Finalmente a *Área de fratura equivalente*,  $A_i^f = c_A L_i^2$ , para os longitudinais e diagonais é, respectivamente:

$$A_l^f = (3/22) L^2, \quad A_d^f = (4/22) L^2 \quad (9)$$

Resumindo, quando um elemento rompe, geram-se as áreas de fratura equivalentes indicadas na Eq. (9), liberando-se energia de fratura que depende da área da fratura e da equação constitutiva do material. Riera (1984) e Riera e Rocha (1991) adotaram a lei proposta por Hillerborg (1971) para materiais quase-frágeis como Relação Constitutiva Elementar (RCE), estendendo assim o Método dos Elementos Discretos para problemas de fratura frágil. A lei bi-linear, mostrada na Figura 7, foi extensamente utilizada para simular o comportamento de materiais quase-frágeis.

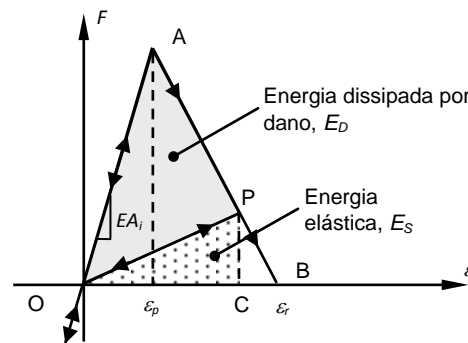


Figura 7: Relação constitutiva elementar utilizada no DEM, Modelo de Hillerborg.

No modelo,  $F$  é a força axial no elemento, função da deformação específica  $\varepsilon$  no mesmo. A relação entre  $F$  e  $\varepsilon$  é dada pelo produto do módulo de Young do material ( $E$ ) e a área da seção transversal ( $A_i$ ) da barra. O *Comprimento do módulo básico* é  $L$ . As áreas dos elementos longitudinais ou diagonais são  $A_l$  ou  $A_d$  segundo as Eqs. (3). Cabe esclarecer que cada elemento é caracterizado por duas áreas, uma indicada acima, relacionada à sua rigidez e outra a área de fratura equivalente. A energia específica de fratura,  $G_f$ , assim como o módulo de Young ( $E$ ), são características do material. A deformação limite  $\varepsilon_r$  é o valor de deformação axial para o qual o elemento perde sua capacidade de carga. Este valor deve ser calculado para satisfazer a condição que, quando o elemento falha, a densidade de energia dissipada seja igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento,  $A_i^f$ , vezes a energia específica de fratura  $G_f$ , dividida pelo comprimento do elemento; isto é:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} \quad (10)$$

onde o sub-índice  $i$  tem que ser substituído por  $l$  ou  $d$ , dependendo se o elemento é longitudinal ou diagonal, respectivamente.

Na presente formulação do DEM admitem-se falhas por tração unicamente. Mudando a forma da curva força-deformação que pode resistir cada elemento se terão diferentes modelos constitutivos. Mas a premissa fundamental para levar em conta a fratura é que a área debaixo da curva força-deformação deve ser igual à densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento (a área de fratura equivalente).

Em contrapartida, sob tensões de compressão, o material se comporta como elástico linear. Assim, a falha sob compressão acontece pela combinação do efeito de Poisson e a aleatoriedade introduzida na carga última à tração do material. Esta suposição é razoável para materiais quase frágeis para os quais a tensão última (máxima) sob compressão uniaxial é usualmente de cinco a dez vezes maior que sob tração uniaxial (ver [Kupfer e Gerstle, 1973](#)).

### **Modelo de Hillerborg**

A *Deformação crítica de falha*  $\varepsilon_p$  é a deformação atingida pelo elemento antes da iniciação do dano (ponto A na [Figura 7](#)). A relação entre  $\varepsilon_p$  e a energia específica de fratura  $G_f$  é dada em termos da Mecânica de Fratura elástica linear como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E}} \quad (11)$$

onde  $R_f$  é aqui denominado fator de falha, o qual leva em conta a presença de um defeito intrínseco de tamanho  $a$ , que pode ser expressado como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (12)$$

onde  $Y$  é um parâmetro adimensional que depende tanto das dimensões do espécime e da trinca. O parâmetro adimensional  $Y$  se pode entender também como uma função que depende de um defeito intrínseco do elemento com características representadas pelo produto de um coeficiente adimensional  $Y$  e pela raiz quadrada de um comprimento  $a$ . É interessante salientar que este produto ( $Ya^{1/2}$ ) poderia ser considerado como uma propriedade material.

O elemento perde sua capacidade de carregamento quando a deformação limite  $\varepsilon_r$  é atingida (ponto B na [Figura 7](#)). Utilizando a Eq. (10), obtém-se a deformação limite  $\varepsilon_r$ . Esta deformação limite pode ser relacionada com a deformação crítica de falha por intermédio da constante  $K_r$  da seguinte forma:

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (13)$$

Como foi mencionado, a Eq. (10) mostra que a área debaixo da curva força-deformação é igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento  $A_i^f$  vezes a energia específica de fratura  $G_f$  dividida pelo comprimento do elemento. Com ela, obtém-se uma importante relação dos parâmetros de fratura com a deformação limite  $\varepsilon_r$  ou o coeficiente  $K_r$

$$\frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_p EA_i}{2} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 EA_i}{2} \quad (14)$$

onde o sub-índice  $i$  tem que ser substituído por  $l$  ou  $d$ , segundo o elemento seja longitudinal ou diagonal, respectivamente. O coeficiente  $K_r$  é uma função das propriedades do material e do comprimento  $L_i$  do elemento:



$$K_r = \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \left( \frac{2}{L_i} \right) \tag{15}$$

Para garantir a estabilidade do algoritmo, deve-se cumprir a condição que  $K_r \geq 1$  (Riera e Rocha, 1991). Isto é, que  $\varepsilon_r$  é maior do que  $\varepsilon_p$ .

### 3.2 Inclusão do caráter aleatório do material no DEM

Rocha (1989) introduziu a tenacidade do material  $G_f$ , como uma variável aleatória considerando para a mesma uma distribuição de probabilidades tipo Weibull de dois parâmetros:

$$F(G_f) = 1 - e^{-(G_f/\beta)^\gamma} \tag{16}$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são os parâmetros de escala e de forma respectivamente. A função de densidade de probabilidade de  $G_f$  é dada pela derivada da expressão (16).

Como  $G_f$  pode ser escrito em função de  $\varepsilon_p$  (ver expressão 11) da seguinte forma:

$$G_f = c \varepsilon_p^2, \text{ com } c = E(1 - \nu^2)/R_f \tag{17}$$

Utilizando esta expressão, pode se achar a função de densidade de probabilidade de  $\varepsilon_p$  vinculada á de  $G_f$ .

A Figura 8 mostra o processo de incorporação da aleatoriedade na energia específica de fratura  $G_f$  para a relação constitutiva de Hillerborg. Note-se que para definir  $G_f$  como um campo aleatório é necessário especificar o valor médio, o coeficiente de variação e o comprimento de correlação. Adicionalmente é necessário definir como muda a forma da área encerrada pela lei constitutiva, proporcional a  $G_f$ . Essa energia, relacionada com a área da RCE, considera-se que tem uma variação espacial segundo uma distribuição tipo Weibull, como mostrada na parte superior da Figura 8. Assim, diferentes elementos terão diferentes RCE, com forma similar, como mostrado também na Figura 8, para o modelo de material não homogêneo.

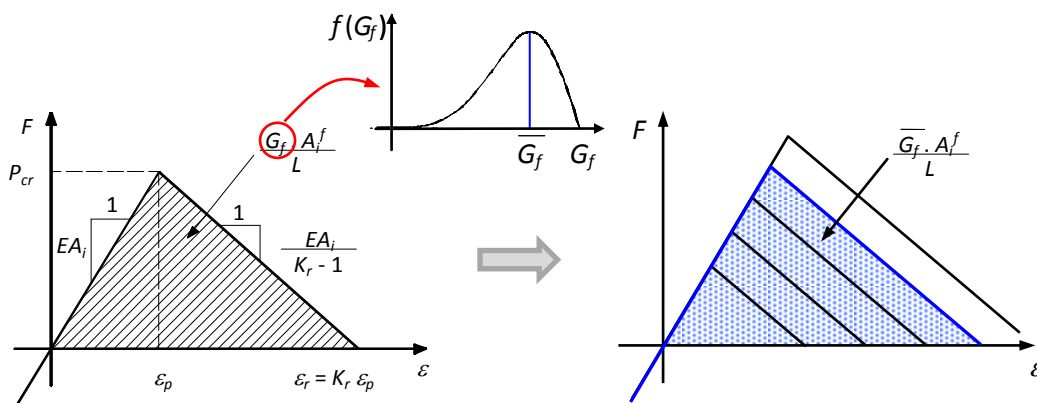


Figura 8: Esquema da incorporação da aleatoriedade no DEM usando o Modelo de Hillerborg e considerado  $G_f$  como um campo aleatório correlacionado com  $\varepsilon_p$ .

## ESTUDO DA FORMA DE FALHA

Na prática é impossível fazer dos corpos de prova exatamente iguais, mas com simulações isto sim é possível. Desta forma se pode submeter ao mesmo corpo de prova a diferentes estados de carregamento.

Para analisar a variação da forma da superfície de falha obtida com o DEM em função dos parâmetros do programa é estudada a resposta até a fratura de blocos de  $10 \times 10 \times 10$  módulos cúbicos. Estes blocos se encontram submetidos a vários estados de tensão biaxiais. Em todos os casos os nós na terceira direção foram deixados livres para garantir estados de tensão biaxial.

Da mesma forma que em [Maders et al. \(2012\)](#), o material estudado tem módulo de elasticidade de  $7,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>; densidade de 2700 kg/m<sup>3</sup>; coeficiente de Poisson de 0,25 e energia específica de fratura  $G_f = 1300$  N/m. Os valores de  $\varepsilon_p$  e  $K_r$  (vinculados por intermédio de Eq. 13) serão variados juntamente com o coeficiente de variação de  $G_f$  ( $CV(G_f)$ ) para analisar como estes parâmetros, influenciam na forma as superfície de falha obtida.

A [Figura 9](#) mostra a configuração do bloco estudado, juntamente com suas dimensões e condições de contorno.

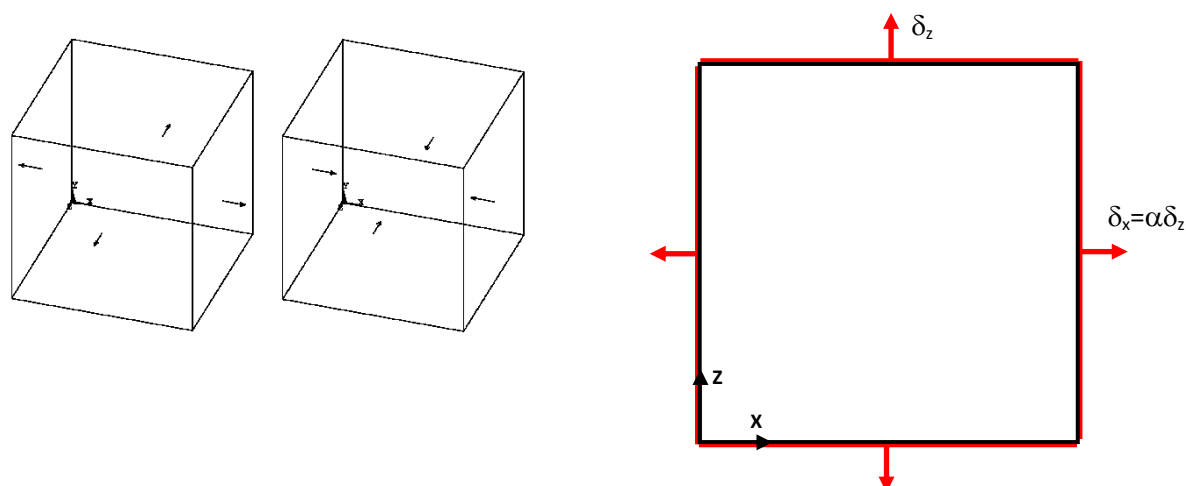


Figura 9: Combinações de carregamentos de tração e compressão e condições de contorno.

Quatro relações entre deslocamentos foram analisados,  $\alpha = 1; 0,5; 0,2$  e  $0,1$  além do estado uniaxial de carregamento, tanto a tração como a compressão.

Para explicar como é o procedimento utilizado na análise e apresentação dos dados obtidos, começa-se descrevendo detalhadamente como foram tratados os dados para um caso específico,  $K_r = 202,9$  ( $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f = 0,8$ ) e  $CV(G_f) = 40\%$ , para logo generalizar os resultados. Assim, na [Figura 10a](#) se apresentam as curvas tensão-deformação obtidas em 4 simulações o bloco submetido a compressão uniaxial. O valor médio é 0,583 GPa com uma variação de  $CV = 11,72\%$  nos resultados. Este valor será utilizado posteriormente como comparação pelo que será chamado de  $\sigma_c^*$ . Na [Figura 10b](#) são mostradas as curvas tensão-deformação para o caso de tração uniaxial e as [Figuras 10c e d](#) mostram as curvas tensão-deformação e tensão tempo para um estado de compressão biaxial com  $\alpha = 0,2$  na direção  $z$  e  $x$ . Na curva tensão tempo da [Figura 10c](#) se mostra que a ruptura se ta no mesmo instante, coisa que não fica simples de ver na curva tensão deformação. A tensão de ruptura na direção  $x$  foi considerada a tensão que tem nessa direção no tempo em que rompe na direção  $z$ . Isto foi feito com todas as relações tensão biaxial.

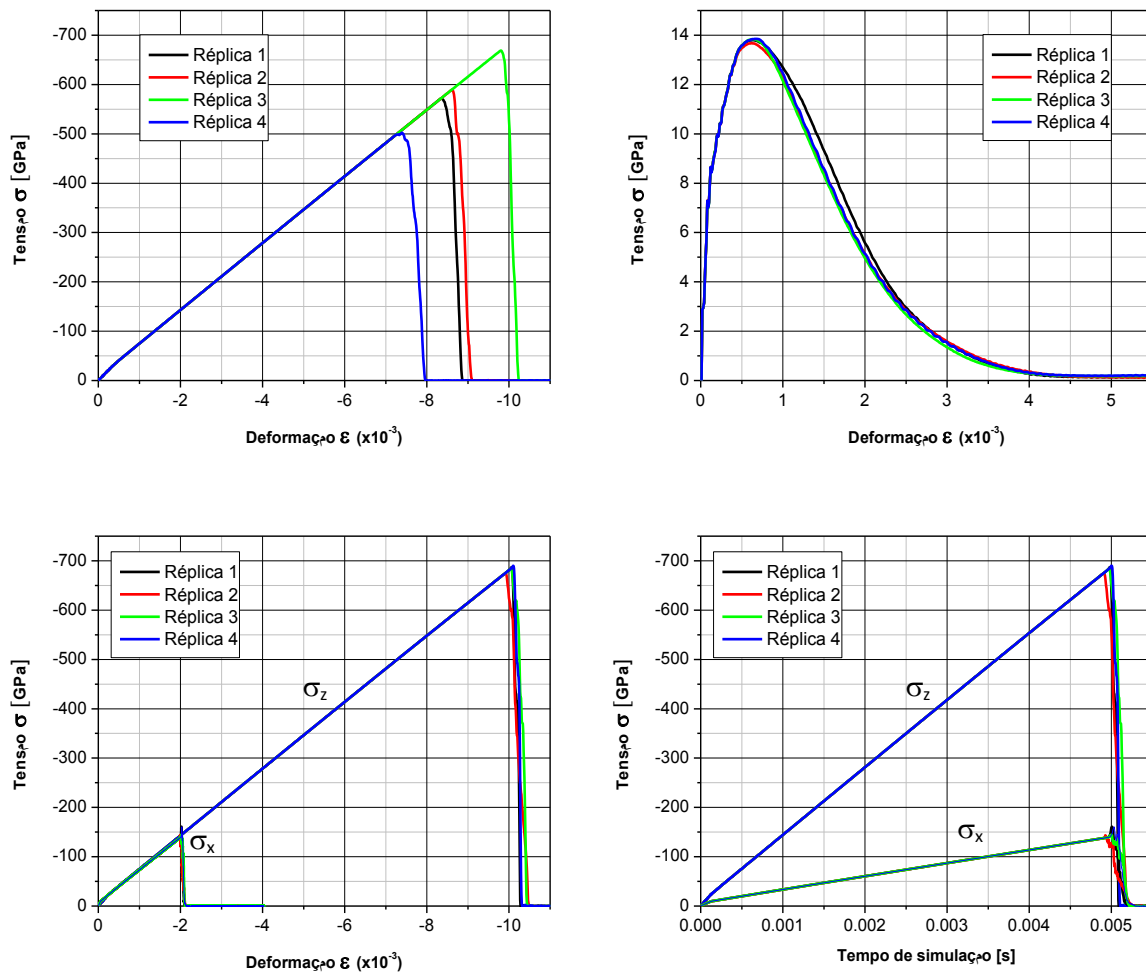


Figura 10: Curvas tensão-deformação para as quatro simulações a) com carregamento de compressão uniaxial, b) com carregamento de tração uniaxial e c) com carregamento de compressão biaxial com  $\alpha=0,2$ . d) curvas tensão-tempo para o carregamento biaxial da do item c.  $K_r=202,9$  ( $\varepsilon_p=1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f=0,8$ ) e  $CV(G_f)=40\%$ .

Na Figura 11 se mostram as quatro configurações de ruptura para o caso de compressão biaxial  $\alpha = 1$ , em perspectiva e a vista no plano de compressão biaxial. Em esta figura se pode ver que não existe grande variação na forma da configuração. O modo de ruptura é o mesmo, sempre por tração na direção perpendicular ao plano de aplicação do carregamento.

Na Figura 12 se mostra uma configuração de ruptura representativa para cada valor de  $\alpha$  analisado com  $K_r=202,9$  e  $CV(G_f)=40\%$  para carregamentos compressivos. As configurações de ruptura por compressão além estar em perspectiva tem uma vista para ajudar a interpretação da forma da falha. Já na Figura 13 se apresentam as configurações de ruptura representativa para cada valor de  $\alpha$  analisado com  $K_r=202,9$  e  $CV(G_f)=40\%$  para carregamentos de tração. Como mostrado na figura, a falha por tração biaxial fica mais fácil de ser interpretada na perspectiva.

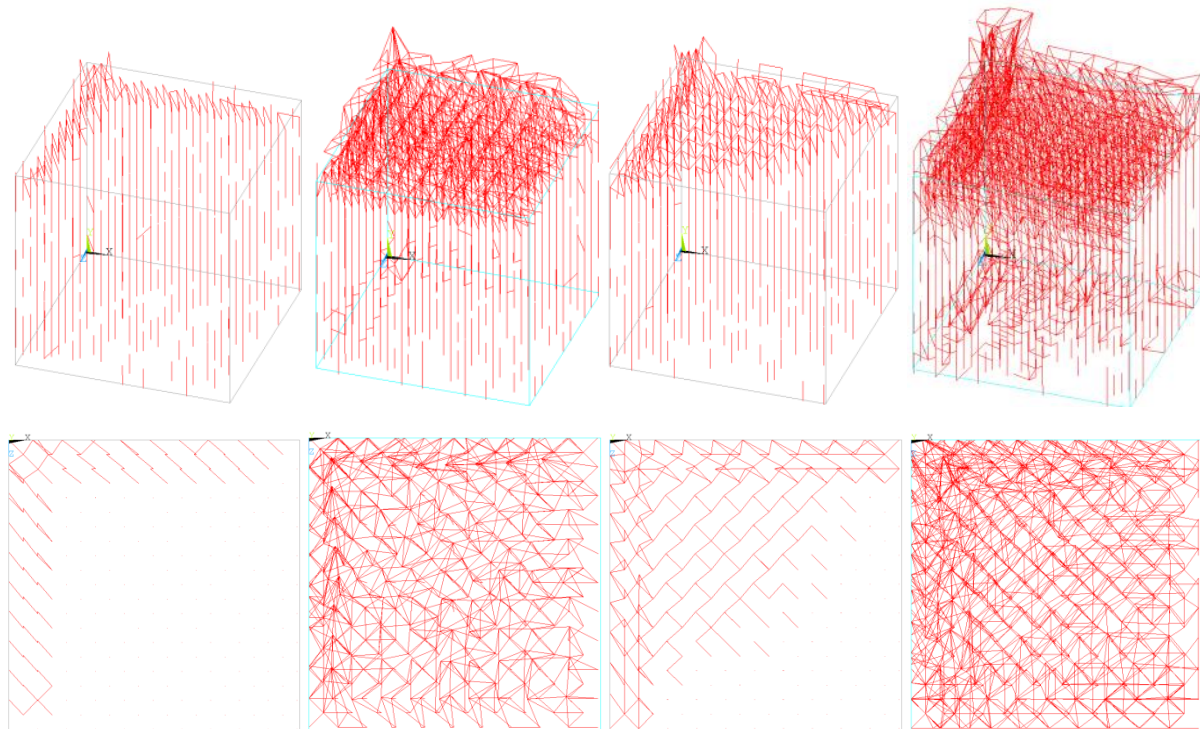


Figura 11: Configuração de ruptura das quatro réplicas com  $K_r=202,9$ ,  $CV(G_r)=40\%$  e carregamento de compressão biaxial com  $\alpha=1$ .

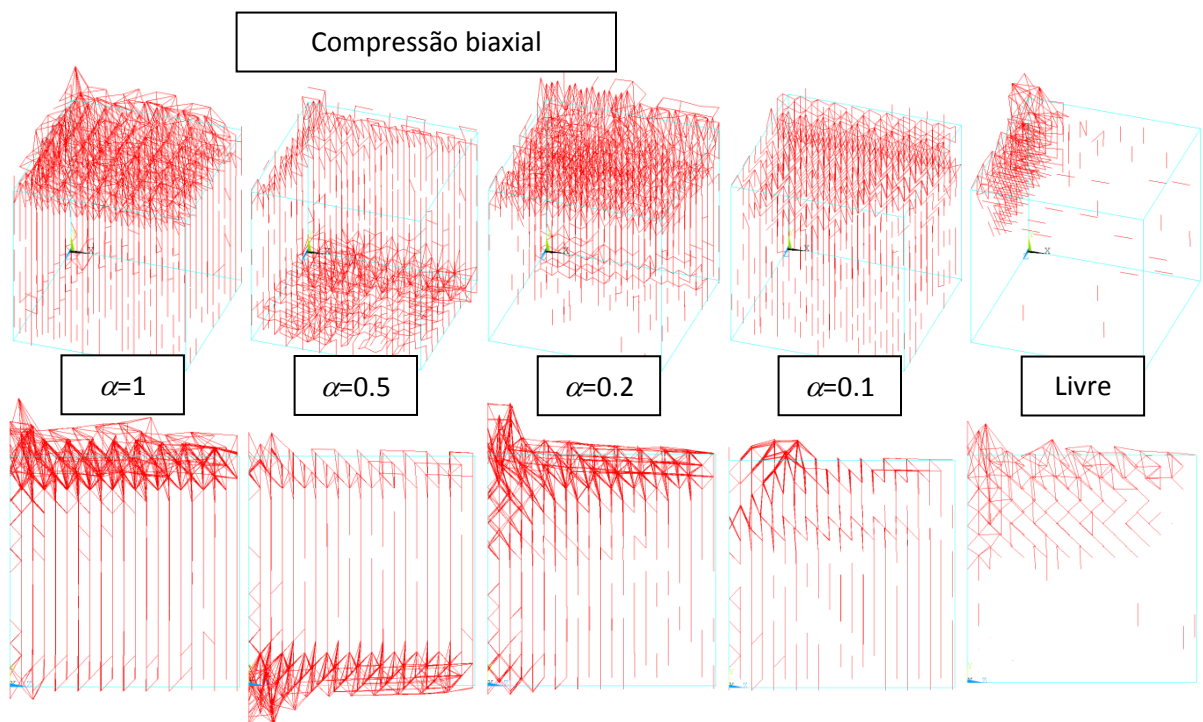


Figura 12: Configurações de ruptura representativa para cada combinação de carregamento analisada com  $K_r=202,9$ ,  $CV(G_r)=40\%$ .

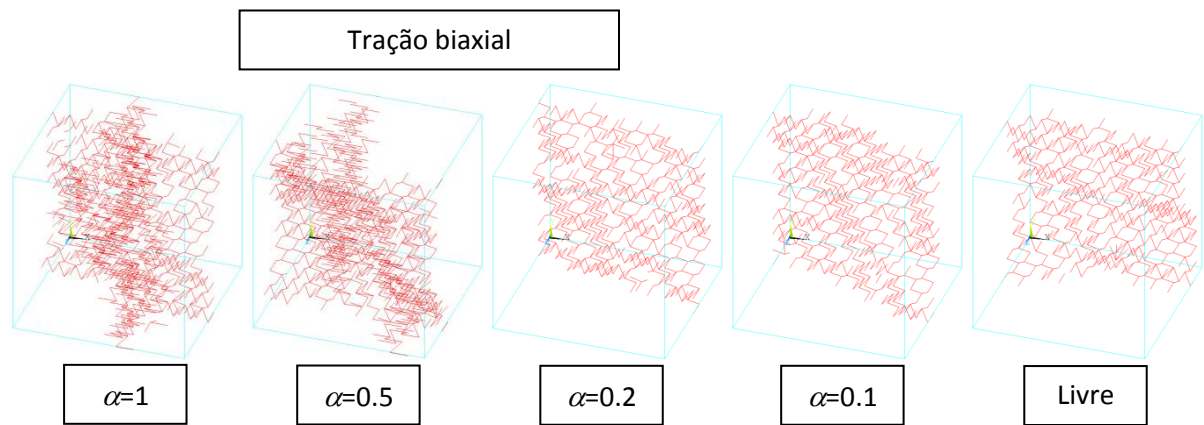


Figura 13: Configurações de ruptura representativa para cada combinação de carregamento analisada com  $K_r=202,9$ ,  $CV(G_f)=40\%$ .

Para cada uma das quatro réplicas realizada foi possível montar uma curva de falha. A Figura 14 mostra a superfície de falha, e detalhe no primeiro oitante, obtida para cada um dos quatro testes simulados com  $K_r=202,9$  ( $\varepsilon_p=1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f=0,8$ ) e coeficiente de variação da energia de fratura  $CV(G_f)=40\%$ .

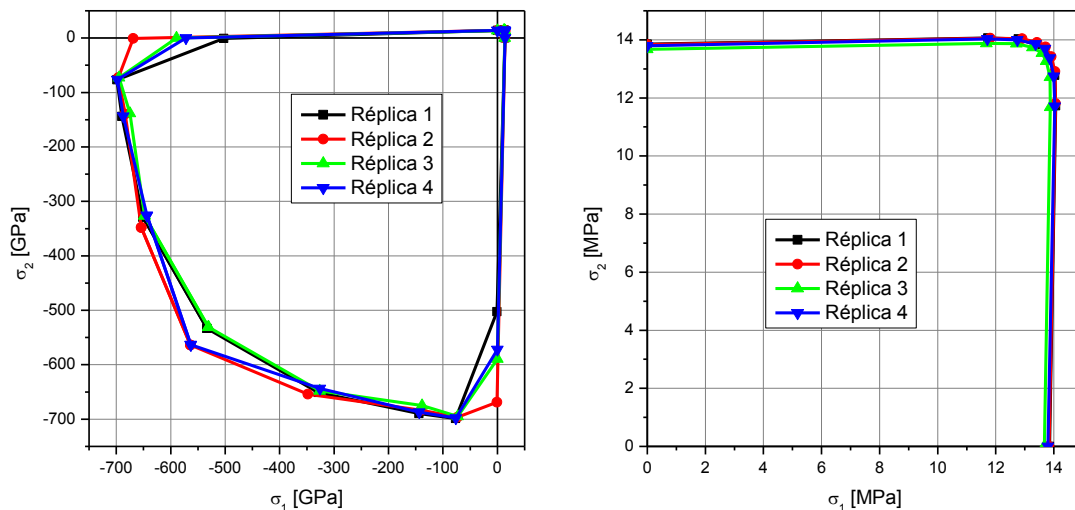


Figura 14: Superfície de falha e detalhe no primeiro oitante obtido para cada réplica simulada.  $K_r=202,9$  ( $\varepsilon_p=1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f=0,8$ ) e  $CV(G_f)=40\%$ .

A curva da Figura 14 foi normalizada em relação ao valor médio de compressão uniaxial dos quatro testes  $\sigma_c^* = 0,583$  GPa. A curva média normalizada é mostrada na Figura 15 junto com a variabilidade em forma de sombra. Aqui se observa claramente que a relação entre tração uniaxial e compressão uniaxial médias. Este valor é 0,0237 o que equivale a dizer que o a ruptura por compressão uniaxial é em média 42,3 vezes maior que a ruptura por tração uniaxial. Também se pode observar que a ruptura por compressão biaxial quando  $\alpha=0,1$  é um 20% superior á ruptura por compressão uniaxial. Mas a quando a relação entre as tensões de compressão é 1 a ruptura é 0,94 do valor de referencia. Na compressão uniaxial os valores apresentam um coeficiente de variação de 11,72%, já na região de compressão biaxial esta variação não ultrapassa 3,32% em nenhum dos pontos. Tanto na tração uniaxial quanto na tração biaxial o coeficiente de variação dos resultados é no máximo 0,67%, o que mostra pouca variabilidade nos resultados em esta região.

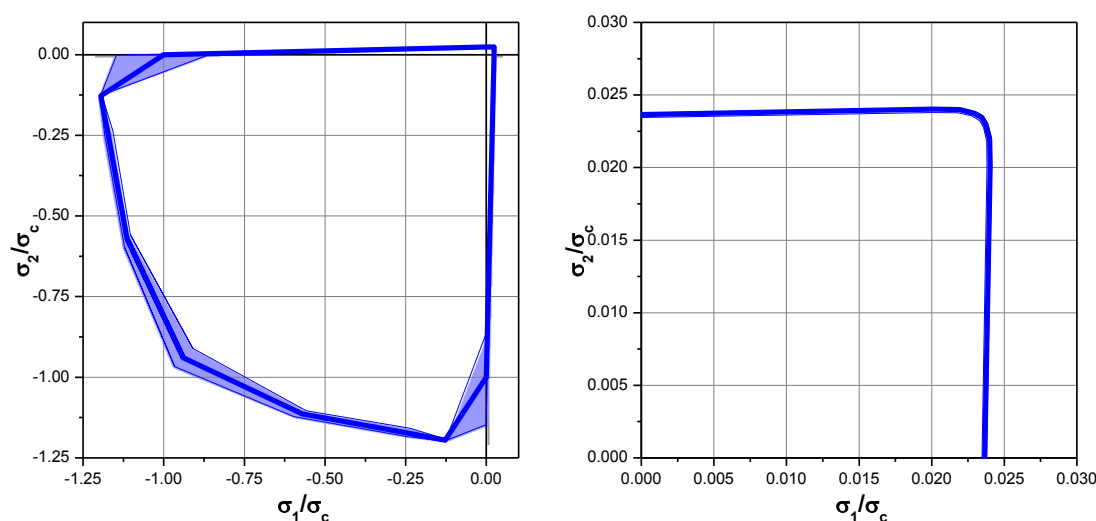


Figura 15: Superfície de falha e detalhe no primeiro oitante obtido para cada réplica simulada.  $K_r=202,9$  ( $\varepsilon_p=1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f=0,8$ ) e  $CV(G_f)=40\%$ .

#### 4 ESTUDO PARAMÉTRICO

Para estudar qual é o comportamento da forma da superfície de falha simulada com o DEM em relação a alguns de seus parâmetros realizamos o mesmo procedimento feito no item anterior agora variando o valor de  $K_r$  ( $R_f$  ou  $\varepsilon_p$ ) e o  $CV(G_f)$ . Foram utilizados  $K_r=202,9$ ; 101,4; 50,7; 12,7 e 6,3 nas relações construtivas (ver Figura 16a) e  $CV(G_f)=20$ ; 40; 80 e 120. Todas as curvas a seguir foram normalizadas em relação à tensão de compressão uniaxial de  $K_r=202,9$  ( $\varepsilon_p=1,088 \times 10^{-4}$ ;  $R_f=0,8$ ) e  $CV(G_f)=40\%$ ,  $\sigma_c^*=0,583$  GPa.

Na Figura 16b e c se mostra a comparação entre as superfícies de falha obtidas variando o valor de  $K_r$ , mas mantendo constante o  $CV(G_f)=40\%$ .

O ponto médio de compressão uniaxial varia muito pouco para os outros valores de  $K_r$ ,  $\pm 7\%$  da tensão de referência, mas variação encontrada entre as quatro réplicas dessas simulações se encontra na faixa de 9,20% a 11,10%, similar o obtido com  $K_r=202,9$ . Na região de compressão biaxial as curvas também seguem a mesma variabilidade da ordem de 3% porém se encontram pontos nos quais o coeficiente de variação chega a 9,8% na curva de  $K_r=6,3$ . No primeiro oitante, a variabilidade aumenta com a diminuição do valor de  $K_r$ , sendo o CV maior 3,07% também na curva de  $K_r=6,3$ . De esta forma se considera que no oitante de compressão biaxial as superfícies de falha praticamente não variam com o  $K_r$  (ou fator de falha), mas quando se tem tração biaxial a forma da curva é grandemente influenciada por este fator.

Outra característica interessante é a relação tração-compressão uniaxial média. Este valor vai diminuindo de 42,3 até 11,5 com a diminuição de  $K_r$ .



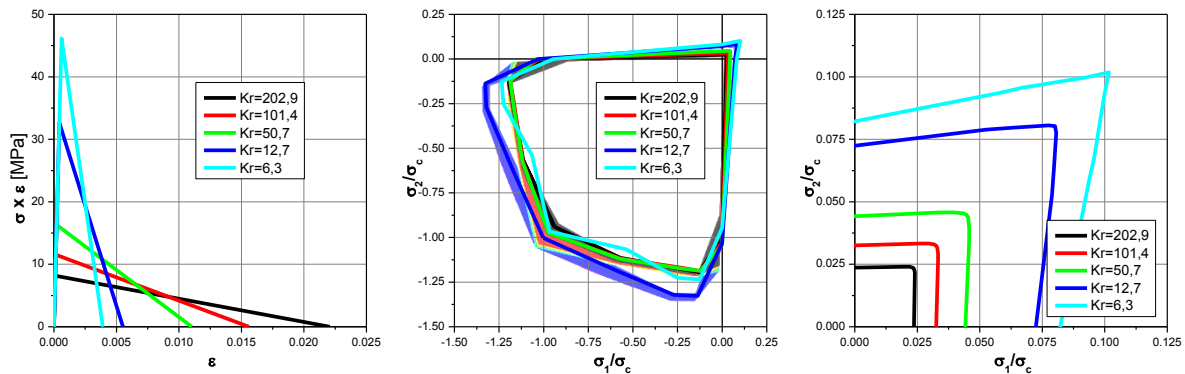


Figura 16: a) Relação constitutiva utilizada. b) Superfície de falha média e c) detalhe no primeiro oitante obtido para cada relação constitutiva e  $CV(G_f)=40\%$  constante.

Da mesma forma se analisaram as superfícies de falha geradas mudando o  $CV(G_f)$ . Na Figura 17 se mostram as superfícies obtidas para os diferentes  $CV(G_f)$  analisados para cada um dos valores de  $K_r$  de referência. Cabe notar que somente são mostradas as curvas médias das quatro replicas porque a variação segue uma forma similar à mostrada na Figura 16.

Da análise da Figura 17 é possível concluir que o  $K_r$  não apresenta grande influencia na forma da superfície de falha na região de compressão biaxial. Porém o aumento do  $CV(G_f)$  reduz dita parte da superfície. No primeiro oitante, região de tração biaxial, tanto o  $K_r$  como o  $CV(G_f)$  modificam a forma e tamanho da superfície de falha.

Na Tabela 1 se apresenta o resumo das superfícies de falha. É possível observar que o aumento do  $CV(G_f)$  acarreta um aumento na variabilidade das respostas, como era de esperar. Porém, este comportamento não observa na compressão uniaxial.

$CV(G_f)$	$K_r$	$\sigma_c/\sigma_c^*$	CV	$-\sigma_t/\sigma_c^*$	CV	$\sigma_y/\sigma_c^*$	CV	$\sigma_t/\sigma_c$	$\sigma_c/\sigma_b$
20%	6,3	0.977	5.86%	0.088	0.29%	0.991	4.45%	11.098	0.986
	12,7	1.110	8.00%	0.080	0.40%	1.052	2.73%	13.889	1.054
	50,7	1.097	9.36%	0.048	0.24%	0.999	2.76%	23.011	1.098
	101,4	1.152	9.51%	0.035	0.28%	0.997	2.74%	33.043	1.156
	202,9	1.093	6.43%	0.025	0.28%	0.952	2.84%	43.401	1.148
40%	6,3	0.947	10.39%	0.082	0.44%	0.971	2.40%	11.523	0.976
	12,7	1.032	11.10%	0.072	0.96%	1.001	3.48%	14.260	1.031
	50,7	1.043	9.21%	0.044	0.85%	0.975	5.02%	23.613	1.070
	101,4	1.028	9.22%	0.033	0.70%	0.974	3.76%	31.600	1.056
	202,9	<b>1.000</b>	11.72%	0.024	0.58%	0.939	3.32%	42.275	1.065
80%	6,3	0.903	3.93%	0.067	1.32%	0.909	6.08%	13.417	0.994
	12,7	0.927	6.64%	0.058	1.60%	0.882	5.23%	16.029	1.050
	50,7	0.907	8.89%	0.036	1.65%	0.836	7.91%	25.041	1.086
	101,4	0.924	9.48%	0.027	1.64%	0.844	14.53%	34.030	1.094
	202,9	0.841	8.05%	0.020	1.50%	0.878	9.21%	42.238	0.958
160%	6,3	0.635	6.50%	0.042	3.55%	0.711	16.09%	15.209	0.892
	12,7	0.599	7.58%	0.036	2.72%	0.687	11.46%	16.449	0.872
	50,7	0.676	5.64%	0.024	2.20%	0.697	13.93%	28.365	0.971
	101,4	0.662	1.83%	0.018	2.31%	0.658	11.33%	36.252	1.006
	202,9	0.642	4.47%	0.014	2.38%	0.623	10.88%	47.025	1.031

Tabela 1: Resumo das superfícies de falha.  $\sigma_c^* = -0,583$  GPa

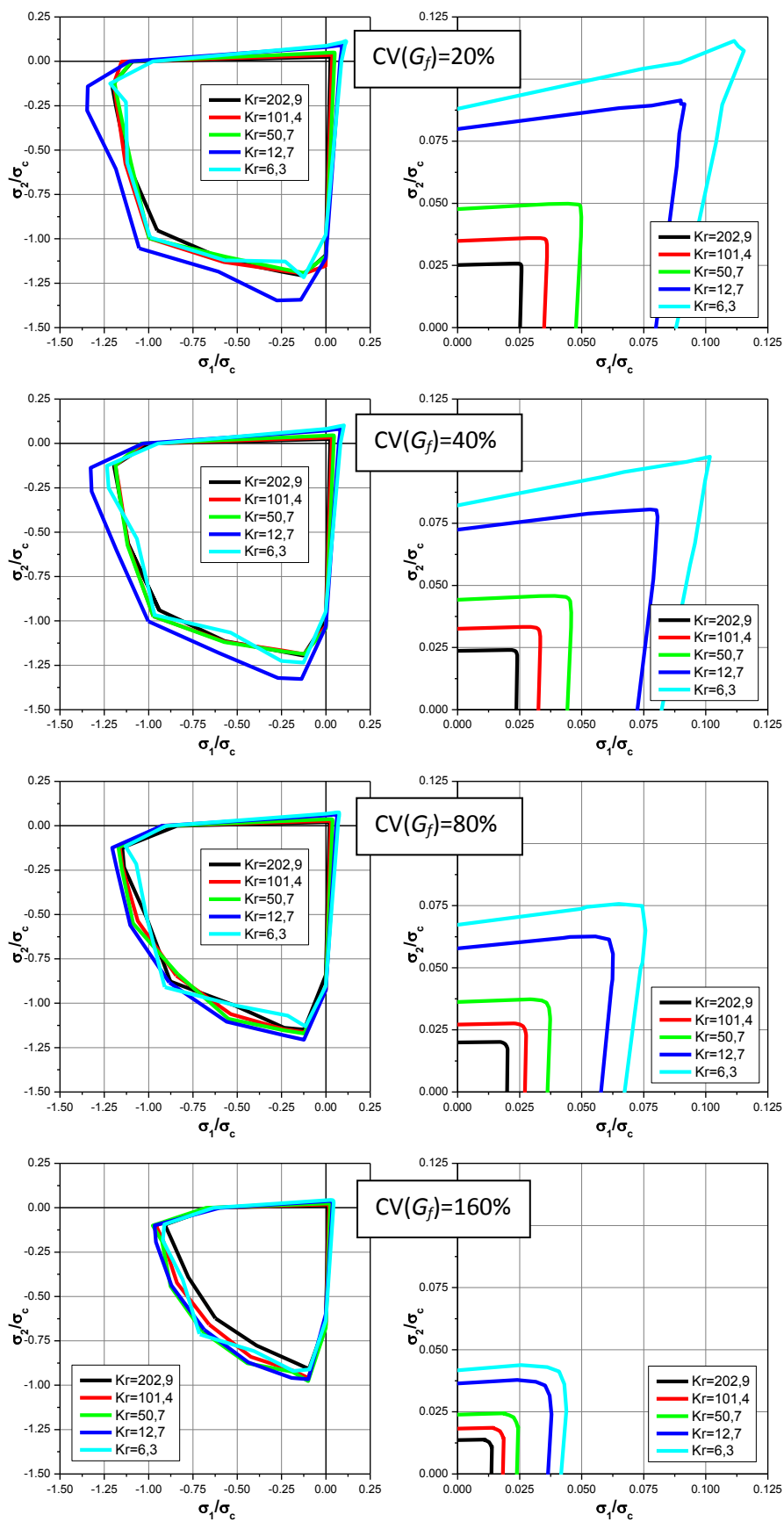


Figura 17: Superfície de falha média e detalhe no primeiro oitante obtido para cada relação constitutiva analisada e variando o  $CV(G_f)$ .

## 5 CONCLUSÃO

No presente trabalho se mostra um resumo dos critérios de falha mais comumente usados em engenharia. Também se apresenta o Método dos Elementos Discretos formado por barras no qual se estuda a forma da superfície de falha obtida mediante a simulação. Logo se realiza um estudo paramétrico para examinar como varia a superfície de falha com a variação do  $K_r$  (relação entre as deformações crítica e de ruptura da lei constitutiva elementar) e do coeficiente de variação da energia de fratura. Cabe destacar que as outras propriedades permanecem constantes assim como o comprimento de correlatividade do campo aleatório da energia de fratura assim como seu valor médio.

Da análise das simulações ficou esclarecido na região de tração biaxial a forma da superfície é alterada com esta variação do valor de  $K_r$ . A maior  $K_r$  menor é a resistência a tração. Isto é de esperar analisando a forma da lei constitutiva, na qual os elementos resistem mais quanto menor o  $K_r$  deixando a energia de fratura constante (área da lei constitutiva igual, ver [Figura 16a](#)). Na região de compressão biaxial, a forma da superfície de falha praticamente não muda quando deixado o  $CV(G_f)$  constante. Isto indica que a ruptura por tração indireta não é muito influenciada pela tensão máxima que resiste a lei constitutiva.

Também é possível concluir deste trabalho que a mudança do  $CV(G_f)$  sim influencia na forma e tamanho da superfície de falha em todas as regiões. Quanto maior a variabilidade do material (maior CV da energia de fratura), antes ele quebra em geral.

Este estudo deixa várias questões em aberto para futuros trabalhos, como ser como seria a forma da superfície em 3D e como varia com outros parâmetros como o módulo de elasticidade,  $E$ , e o comprimento de correlatividade. Outro parâmetro influencia na forma da superfície de falha é a aleatoriedade na malha. Segundo trabalhos recentes [Riera et al. \(2013\)](#) e [Iturrioz et al. \(2013\)](#) este parâmetro tem grande influencia na falha quando há compressão. Por isto se espera que a superfície de falha varie consideravelmente com a alteração deste parâmetro.

Outro tema que fica em pendente é o estudo do efeito de escala na superfície de falha. Este tema será abordado nos próximos trabalhos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do governo Brasileiro) e da Fapergs (Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul, Brasil) que fizeram e fazem possível a realização de nossas pesquisas assim como a nossa melhora continua profissional.

## 6 REFERÊNCIAS

- Krajcinovic K. *Damage Mechanics*. Elsevier, Amsterdam. 1996.
- Malvern L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall.1977.
- Popov E.P. *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice Hall, 1998.
- Balan T.A., Filippou F.C., Popov E.P. Constitutive model for 3d cyclic analysis of concrete structures, *J. Engrg. Mechanics*, ASCE, v.123, No. 2, p. 143-153. 1997.
- William K.J, Karnke E.P. Constitutive model for triaxial behavior of concrete, Int. Association for Bridge and Struct. Engrg. Proc., v.19, p.1-30, 1975.
- Kupfer H.B., Gerstle K.H., Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, American Society of Civil Engineers, v. 99, No. 4, p.

- 853-866, 1973.
- Kupfer H.B., Hilsdorf H.K., Rusch H., Behavior of concrete under biaxial stresses, *ACI J.*, v.66, No. 8, p. 656-666, 1969.
- Puglia V.B. Estudo da Ruptura em Materiais Heterogêneos Quase Frágeis Aplicando o Método dos Elementos Discretos Formado por Barras, *Doctoral thesis*, Posgraduate program in Mechanical Eng., Federal University of Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Brasil, 2013.
- Riera J.D.; Miguel L.F.M., Iturrioz I. Study of imperfections in the cubic mesh of the truss-like discrete element method, *International Journal of Damage Mechanics*, doi: 10.1177/1056789513513917, 2013.
- Iturrioz I., Riera J.D., Miguel L.F.F. Introduction of imperfections in the cubic mesh of the truss-like discrete element method, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, doi: 10.1111/ffe.12135, 2013.
- Dalguer, L.A., Irikura, K., Riera, J.D., Chiu, H.C, The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, v. 91, p. 1112-1127, 2001.
- Dalguer L.A., Irikura K., Riera J.D. Simulation of tensile crack generation by three-dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake. *J. Geophys. Res.*, 108(B3), 2144, 2003.
- Hillerborg, A. A Model for Fracture Analysis. Cod LUTVDG/TV BM-3005/1-8, 1978.
- Nayfeh, A.H., e Hefzy, M.S., Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. *AIAA Journal*, v. 16(8), p. 779-787, 1978.
- Riera, J.D., Local Effects In Impact Problems In Concrete Structures. Em: proceedings, Conf. on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, UFRGS, 1984. Porto Alegre, Rs, Brasil. p. 0-0. 1984.
- Riera, J.D., e Rocha, M.M., A note on velocity of crack propagation in tensile fracture. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, v. XII/3, p. 217-240, 1991.
- Rocha, M.M., Ruptura e Efeitos de Escala em Materiais não Homogêneos. Tese (Mestrado), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1989.
- Maders L., Kostascki L.E., Iturrioz I. Estudo do efeito de escala no método dos elementos discretos formado por barras. *Mecánica Computacional*, v. XXXI, p. 1857-1876, 2012.