

ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE MICROVIGAS MEDIANTE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD NO-LOCAL CON APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Daniel H. Felix^a, Graciela I. Guerrero^{a,b} y Diana V. Bambill^{a,c}

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco,
Km 4, 9005 Comodoro Rivadavia, Argentina, <http://www.unp.edu.ar>*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
dhfelix@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, graisague@hotmail.es*

Palabras clave: Microvigas, frecuencias naturales, Bernoulli-Euler, elementos finitos, elasticidad no local.

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis estático y dinámico de microvigas con distintas condiciones de borde. El problema se resuelve con el método de elementos finitos. El trabajo incluye la formulación de un elemento viga, basado en la teoría de elasticidad no local, para resolver una microviga Bernoulli-Euler. Algunos de los resultados obtenidos son contrastados con valores hallados en la literatura técnico-científica. Se analizan especialmente los efectos de escala de longitud en los valores de las frecuencias naturales y en los correspondientes a la deflexión estática.

INTRODUCCIÓN

Cuando un sólido elástico tiene dimensiones del orden de las dimensiones características de la estructura del material (decenas o cientos de nanómetros), es denominado micro-elástico. En dicho caso las ecuaciones de la teoría del continuo clásico, más específicamente en este caso las correspondientes a la teoría de la elasticidad, deducidas para sólidos continuos macroscópicos, requieren ser modificadas. Dichas modificaciones se deben a la presencia de micro deformaciones y rotaciones no encontradas en la teoría de elasticidad finita o también denominada teoría no polar. La actividad de investigación en teorías del continuo generalizado es realmente muy amplia y aquí solo se citan, algunos de los más relevantes investigadores que trabajan o han trabajado en la temática.

Las limitaciones de la teoría del continuo para dar respuesta a esta problemática, dio origen a la denominada mecánica del medio continuo generalizado, cuyos precursores fueron los hermanos Cosserat ([Cosserat and Cosserat, 1909](#)) teoría que se revitaliza en la actualidad ([Eringen, 2009](#)).

Es a partir de la década del 60 que comienzan a aparecer una serie de teorías que posibilitan transformar los desarrollos del medio continuo clásico, para que puedan ser utilizados en materiales a escala micro y nanométrica. Entre estos aportes se encuentran los numerosos trabajos de Eringen en teoría de sólidos microelásticos ([Eringen, 1964](#); [Eringen, 1966](#)) y en teoría micropolar ([Eringen, 1971](#)). Los aportes conocidos como teoría de Toupin-Mindlin ([Mindlin, 1964](#); [Mindlin, 1965](#); [Toupin, 1964](#)) han contribuido muy significativamente al desarrollo de las teorías del medio continuo polar, que es una denominación equivalente a la de medio continuo generalizado.

Básicamente en estas teorías se considera al punto material de la teoría clásica como un cuerpo rígido o deformable (según el orden de la teoría micropolar considerada), que en consecuencia pasa de los 3 grados de libertad en el espacio (traslaciones) que corresponden al punto clásico, a tener desde 4 hasta 12 grados de libertad.

Las que consideran al cuerpo deformable (que en la teoría clásica corresponde a un punto material), son las denominadas teorías de orden superior, entre las que se mencionan la de primer y segundo gradiente ([Mindlin, 1965](#); [Mindlin et al, 1968](#)).

Un aporte relevante lo constituyó la denominada teoría de la tensión de par ([Mindlin, 1962](#), [Yang et al, 2002](#)) y la teoría del continuo no local ([Eringen, 2001](#)). El presente trabajo se basa en la teoría del continuo no local.

La teoría de la elasticidad clásica (o local) provee tres grupos de ecuaciones: Las de equilibrio, las cinemáticas o de compatibilidad y las constitutivas. Estas últimas proveen una relación 'local' entre tensiones y deformaciones, es decir solo la deformación de un punto del sólido elástico es considerada para determinar la tensión de dicho punto. Sin embargo, de acuerdo a las teorías polares, esta relación simple que no tiene en cuenta los efectos de las deformaciones del resto del sólido en la tensión del punto en consideración, deja de ser válida cuando las dimensiones del sólido son del orden de las dimensiones de la propia estructura del material. Entre los trabajos relativamente recientes, disponibles en la literatura sobre comportamiento estático y/o dinámico de microvigas Euler se citan a modo de ejemplo, ([Asghari, 2010](#); [Ghannadpour et al, 2013](#); [Wang et al, 2013](#); [Arash et al, 2014](#)).

En el caso relativamente simple que nos ocupa las correcciones requeridas en las ecuaciones constitutivas son tenidas en cuenta, mediante la aplicación de la teoría no local de Eringen. En particular se obtiene aquí, la forma débil de la ecuación gobernante de una microviga Euler, la que luego se resuelve mediante la aplicación del método de elementos finitos. Obteniéndose luego las máximas deflexiones en el análisis estático y los primeros valores de frecuencia natural, en el análisis dinámico, en ambos casos para diferentes

condiciones de borde.

1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

Se analizará una micro-viga Euler, prismática de longitud L y sección transversal A , sometida a una carga distribuida $q(x)$ independiente del tiempo en el análisis estático, o bien que efectúa vibraciones transversales libres en el análisis dinámico. la Figura 1 muestra esquemáticamente el modelo correspondiente a una microviga Euler tipo Cantilever, frecuentemente utilizada en sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS su sigla en ingles).

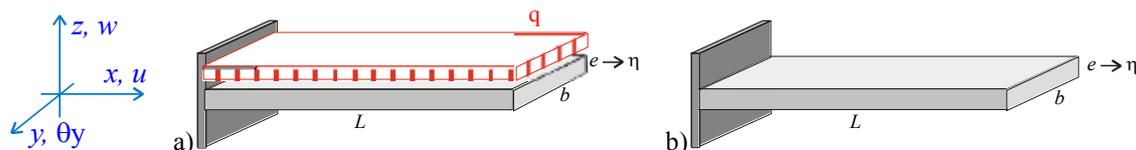


Figura 1: Esquema de una microviga Euler tipo Cantilever, en la que η es el parámetro de escala de longitud del material utilizado. a) Sometido a carga distribuida estática, b) efectuando vibraciones transversales libres.

En el caso dinámico, el desplazamiento transversal $w^*(x,t)$ correspondiente, puede expresarse en la forma:

$$w^*(x,t) = w(x)e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Siendo $w(x)$ la amplitud de dicho desplazamiento y ω la frecuencia angular de vibración correspondiente.

2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL SISTEMA

Con las ecuaciones de micro elasticidad que surgen de la aplicación de la teoría de elasticidad no-local, es obtenida la ecuación diferencial que gobierna la 'microviga Euler'.

2.1 Ecuaciones cinemáticas

Las ecuaciones cinemáticas de una microviga Euler son las mismas que las correspondientes a una viga clásica, debido a que se mantienen las mismas hipótesis.

Mediante la hipótesis de Navier, que establece que las secciones permanecen planas luego de la deformación obtenemos el desplazamiento axial $u^*(x,z,t)$ en la forma:

$$u^*(x,z,t) = -z\theta_y^*(x,t). \quad (2)$$

En la que $\theta^*(x,t)$ es el giro de la sección transversal y z la distancia desde el baricentro de la sección transversal hasta el punto en consideración. De acuerdo a la nomenclatura adoptada, el asterisco en las variables indica que son dependientes del tiempo. Para las amplitudes de desplazamiento axial y del giro, la relación resulta:

$$u(x,z) = -z\theta_y(x). \quad (3)$$

Por otra parte la teoría Bernoulli-Euler desprecia la deformación por corte, siendo entonces la amplitud del giro de la sección para pequeños desplazamientos:

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (4)$$

Al combinar las expresiones (3) y (4) se tiene:

$$u(x,z) = -z \frac{dw(x)}{dx}. \quad (5)$$

Las amplitudes de las deformaciones axiales $\varepsilon_x(x, z)$ vienen dadas por la ecuación de compatibilidad cinemática:

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = -z \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (6)$$

2.2 Análisis energético

Comenzaremos el análisis del modelo evaluando las expresiones de las energías intervinientes. Si se deriva la ecuación (1) respecto al tiempo se obtiene la velocidad de desplazamiento transversal, dada por:

$$\frac{\partial w^*(x, t)}{\partial t} = i \omega w(x) e^{i\omega t}. \quad (7)$$

En la que el producto $\omega w(x)$ nos da la amplitud de la velocidad de desplazamiento transversal. En correspondencia con dicha velocidad se tiene el valor de la energía cinética T , que viene dado por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \omega^2 \rho A w(x)^2 dx. \quad (8)$$

Por otra parte, la energía de deformación U resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x(x, z) \varepsilon_x(x, z) dA dx. \quad (9)$$

Además la energía potencial de la carga $q(x)$, medida desde la posición indeformada resulta:

$$V_q = - \int_0^L q(x) w(x) dx. \quad (10)$$

Cuando $V_q = 0$ se tienen vibraciones libres.

2.3 Ecuación constitutiva

De la teoría de elasticidad no local surge la siguiente ecuación constitutiva ([Ghannadpour et al, 2013](#)):

$$\sigma_x - \eta^2 \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E \varepsilon_x. \quad (11)$$

Siendo E el módulo de Young y η el parámetro de escala de longitud, cuyo valor es diferente para cada material. Al igual que en la teoría clásica, el esfuerzo de flexión se obtiene integrando la tensión σ_x en la sección transversal en la forma:

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA. \quad (12)$$

Si aplicamos dicha integración a la ecuación constitutiva (11) y utilizamos la ecuación cinemática (6), obtenemos la siguiente expresión:

$$M(x) - \eta^2 \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -E \left(\int_A z^2 dA \right) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (13)$$

En la que I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Como puede observarse, la ecuación diferencial (13), que se obtuvo a partir de la ecuación constitutiva (11), tiene dos funciones incógnitas el esfuerzo interno $M(x)$ y el desplazamiento transversal $w(x)$. El sistema se completa mediante la obtención de la ecuación diferencial de equilibrio que relaciona las mismas funciones incógnitas.

2.4 Ecuación diferencial de equilibrio:

Para obtener la ecuación diferencial de equilibrio que gobierna el sistema en estudio aplicaremos el principio de Hamilton de mínima acción que nos proporciona la siguiente ecuación variacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L^* dt = 0. \quad (14)$$

En la que t_1 y t_2 son los extremos del intervalo de tiempo en que se minimiza la acción y L^* es el Lagrangeano del sistema, el cual es también función del tiempo. Aplicando cálculo variacional e independizando la expresión anterior del tiempo resulta:

$$\delta L = \delta(T - U - V_q) = \delta T - \delta U - \delta V_q = 0. \quad (15)$$

De la ecuación (8) podemos obtener la variación de energía cinética:

$$\delta T = \int_0^L \omega^2 \rho A w(x) \delta w(x) dx. \quad (16)$$

La variación de energía de deformación se obtiene a partir de la expresión (9):

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x(x, z) \delta \varepsilon_x(x, z) dA dx. \quad (17)$$

Si se reemplaza la ecuación cinemática (6) en la expresión (17) se tiene:

$$\delta U = \int_0^L - \left(\int_A \sigma_x(x, z) z dA \right) \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} dx. \quad (18)$$

Puede observarse que la expresión entre paréntesis es el esfuerzo de flexión dado en la ecuación (12), con lo cual resulta:

$$\delta U = - \int_0^L M(x) \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} dx. \quad (19)$$

Si se integra por partes la ecuación (19) se tiene:

$$\delta U = - \int_0^L \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \delta w(x) dx. \quad (20)$$

Finalmente la variación de energía potencial de la carga $q(x)$ resulta:

$$\delta V_q = - \int_0^L q(x) \delta w(x) dx. \quad (21)$$

Podemos ahora expresar la ecuación variacional (15) en la forma:

$$\int_0^L \omega^2 \rho A w(x) \delta w(x) dx + \int_0^L \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \delta w(x) dx + \int_0^L q(x) \delta w(x) dx = 0. \quad (22)$$

Sacando factor común, la ecuación (22) puede expresarse en la forma:

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \omega^2 \rho A w(x) + q(x) \right) \delta w(x) dx = 0. \quad (23)$$

Como el desplazamiento virtual $\delta w(x)$ es arbitrario, la expresión entre paréntesis debe ser nula, con lo cual se tiene la ecuación diferencial de equilibrio para microvigas, que resulta idéntica a la ecuación clásica, mientras no reemplacemos $M(x)$.

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \omega^2 \rho A w(x) + q(x) = 0. \quad (24)$$

Combinando la ecuación constitutiva (13) con la ecuación de equilibrio (24) y luego de algunos pasos algebraicos se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el sistema:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho A \left(w(x) - \eta^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) - \left(q(x) - \eta^2 \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Un desarrollo más detallado de los pasos para obtener la ec. (25) puede encontrarse en (Phadikar et al, 2010) Puede observarse que haciendo $\eta = 0$ en la ecuación (25) se obtiene la correspondientes expresión de la viga Bernoulli Euler clásica.

2.5 Forma adimensional de la ecuación de equilibrio

El presente desarrollo analítico se completa con la obtención de la forma adimensional de la ecuación (25), la cual, si bien no se utilizará en el desarrollo implementado en elementos finitos, nos proporcionará la expresión de los coeficientes de frecuencia para el análisis dinámico y del valor adimensional de la carga aplicada en el análisis estático.

Para tal fin se adopta como parámetro de adimensionalización la longitud L de la viga para todas las variables que miden distancias en la ecuación diferencial (25). Se tiene así:

$$\bar{x} = x/L; \quad \bar{w} = w/L; \quad \bar{\eta} = \eta/L \quad (26)$$

Siendo \bar{x} , \bar{w} y $\bar{\eta}$ los valores adimensionales de la coordenada de posición, del desplazamiento transversal de la viga y del parámetro de escala de longitud del material respectivamente. La forma adimensional de la ecuación diferencial (25) resulta entonces:

$$\frac{d^4 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} - \Omega^2 \left(\bar{w}(\bar{x}) - \bar{\eta}^2 \frac{d^2 \bar{w}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right) - \left(\bar{q}(\bar{x}) - \bar{\eta}^2 \frac{d^2 \bar{q}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right) = 0 \quad (27)$$

resultando, para el análisis dinámico, la expresión de los coeficientes de frecuencia en la forma:

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} L^2 \quad (28)$$

y para el análisis estático, la expresión de la carga distribuida adimensional:

$$\bar{q} = q \frac{L^3}{EI} \quad (29)$$

Como se aclaró anteriormente, para la aplicación del método de elementos finitos, en el presente desarrollo se parte de la forma dimensional dada en la ecuación (25).

2.6 Forma débil de la ecuación de equilibrio

Se puede obtener la forma débil de la solución mediante la aplicación de la siguiente formulación variacional:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho A \left(w(x) - \eta^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) - \left(q(x) - \eta^2 \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \right) \right) g(x) dx = 0. \quad (30)$$

En la que, como puede observarse, la expresión entre paréntesis es la ecuación diferencial a resolver y $g(x)$ es una función de ponderación que también satisface la ecuación diferencial (25) y las condiciones de borde esenciales o geométricas, las cuales posteriormente se establezcan para cada modelo analizado.

Si aplicamos integración por partes a la ecuación variacional (30), resulta:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 g}{dx^2} dx + \left[EI \frac{d^3 w}{dx^3} g \right]_0^L - EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dg}{dx} \Big|_0^L \right) \\
& + \left(\int_0^L \eta^2 \omega^2 \rho A w \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \left[\eta^2 \omega^2 \rho A w \frac{dg}{dx} \right]_0^L - \left[\eta^2 \omega^2 \rho A \frac{dw}{dx} g \right]_0^L \right) \\
& - \left(\int_0^L \omega^2 \rho A w g dx \right) - \left(\int_0^L q g dx \right) + \left(\int_0^L \eta^2 q \frac{d^2 g}{dx^2} dx + \left[\eta^2 \frac{dq}{dx} g \right]_0^L - \left[\eta^2 q \frac{dg}{dx} \right]_0^L \right) = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

Los términos de la ecuación (31) se reagrupan convenientemente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \int_0^L \omega^2 \rho A w g dx + \int_0^L \eta^2 \omega^2 \rho A w \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \int_0^L q g dx + \int_0^L \eta^2 q \frac{d^2 g}{dx^2} dx \\
& + \left(\left[EI \frac{d^3 w}{dx^3} + \eta^2 \omega^2 \rho A \frac{dw}{dx} + \eta^2 \frac{dq}{dx} \right] g \Big|_0^L - \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta^2 \omega^2 \rho A w + \eta^2 q \right) \frac{dg}{dx} \Big|_0^L \right) = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

Los términos entre paréntesis en la expresión (32) representan los esfuerzos de corte y de flexión respectivamente para la microviga, resulta entonces:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \int_0^L \omega^2 \rho A w g dx + \int_0^L \eta^2 \omega^2 \rho A w \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \int_0^L q g dx \\
& + \int_0^L \eta^2 q \frac{d^2 g}{dx^2} dx - \left[Q g \right]_0^L + \left[M \frac{dg}{dx} \right]_0^L = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

Siendo:

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - \eta^2 \omega^2 \rho A \frac{dw(x)}{dx} - \eta^2 \frac{dq(x)}{dx} \tag{34}$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \eta^2 \omega^2 \rho A w(x) - \eta^2 q(x) \tag{35}$$

3 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Podemos obtener la solución aproximada de la ecuación (33) mediante la aplicación del método de elementos finitos (Zienkiewicz, 1991). Aproximamos la función incógnita $w(x)$ y la función de peso $g(x)$ mediante las expresiones:

$$w(x) \approx w^h(x) = \sum_i N_i(x) w_i = [N(x)] \{U\} \tag{36}$$

$$g(x) \approx g^h(x) = \sum_i N_i(x) g_i = [N(x)] \{g\} \tag{37}$$

En la que $[N(x)]$ es la matriz de funciones de interpolación o de forma de la aproximación dada en coordenadas globales, mientras que $[U]$ y $[g]$ son los desplazamientos nodales. El superíndice h en la función aproximada define la dimensión del espacio en el que se representa la aproximación (en este caso es la dimensión de los elementos).

A continuación reemplazamos las ecuaciones (36) y (37) en la ecuación variacional (33), con lo cual resulta:

$$\begin{aligned} \{g\}^T & \left[\left(\int_0^L EI [N_{,xx}(x)]^T [N_{,xx}(x)] dx - \omega^2 \int_0^L \rho A [N(x)]^T [N(x)] dx \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta^2 \omega^2 \int_0^L \rho A [N(x)]^T [N_{,xx}(x)] dx \right) \{U\} - \int_0^L [N(x)]^T q dx + \eta^2 \int_0^L [N_{,xx}(x)]^T q dx \right. \\ & \left. - (Q(L)[N(L)] - Q(0)[N(0)]) + (M(L)[N_{,x}(L)] - M(0)[N_{,x}(0)]) \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

La expresión entre corchetes en la ecuación (38) es un conjunto de ecuaciones algebraicas que deben ser nulas debido a que el vector de desplazamientos nodales de la función de prueba $\{g\}^T$ es arbitrario. Dicha expresión puede resumirse en la forma conocida:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{F\} \quad (39)$$

En la que:

$$[K] = \int_0^L EI [N_{,xx}(x)]^T [N_{,xx}(x)] dx \quad (40)$$

Es la matriz de rigidez global de la microestructura, que al no depender del parámetro η , para el caso de la teoría aplicada, coincide con la matriz de rigidez clásica. Por otra parte, la matriz de masa resulta:

$$[M] = [M_0] + [M_\eta] = \int_0^L \rho A [N(x)]^T [N(x)] dx - \eta^2 \int_0^L \rho A [N(x)]^T [N_{,xx}(x)] dx \quad (41)$$

Como se puede observar, la matriz $[M_\eta]$ es no-simétrica.

El vector de cargas nodales resulta:

$$\begin{aligned} \{F\} & = \{F_0\} + \{F_\eta\} + \{Q\} = \int_0^L [N(x)]^T q dx - \eta^2 \int_0^L [N_{,xx}(x)]^T q dx \\ & + (Q(L)[N(L)] - Q(0)[N(0)]) - (M(L)[N_{,x}(L)] - M(0)[N_{,x}(0)]) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

El cual también contiene explícitamente un término que surge de la teoría no local. Además debemos tener en cuenta que algunos términos en la expresión de los esfuerzos también contienen el parámetro de escala de longitud η , como puede observarse en las ecuaciones (34, 35). El caso estático se obtiene al hacer $\omega = 0$, resultando:

$$[K] \{U\} = (\{F_0\} + \{F_\eta\} + \{Q\}) \quad (43)$$

Mientras que en el caso dinámico de vibraciones libres, el sistema gobernante resulta de hacer el vector de cargas nodales igual a cero. Se tiene entonces:

$$|[K] - \omega^2 ([M_0] + [M_\eta])| = 0 \quad (44)$$

En el presente trabajo obtendremos resultados numéricos para ambas situaciones.

3.1 Utilización de coordenadas locales

Para el caso analizado resulta suficiente la utilización de un elemento lineal de 2 nodos con 2 grados de libertad por nodo (2 desplazamientos y 2 giros). La Figura 2 muestra el elemento con la ubicación del eje local y de los ejes globales.

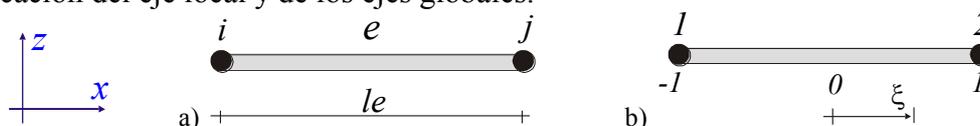


Figura 2: Elemento lineal de 2 nodos con 2 grados de libertad por nodo adoptado para modelar la microviga Euler. a) Uso de coordenadas globales, b) Uso de coordenada local.

Se tienen para el elemento y la coordenada local elegida, las siguientes funciones de forma (Rossi, 2007):

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (45)$$

$$N_2(\xi) = \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (46)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (47)$$

$$N_4(\xi) = \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (48)$$

Con $a = l_e / 2$. El desplazamiento transversal en el interior del elemento resulta entonces:

$$w(\xi) = N_1(\xi) w_1 + N_2(\xi) \theta_1 + N_3(\xi) w_2 + N_4(\xi) \theta_2 = [\mathbf{N}(\xi)] \{\mathbf{U}_e\} \quad (49)$$

Siendo

$$[\mathbf{N}(\xi)] = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad N_4(\xi)] \quad (50)$$

$$\{\mathbf{U}_e\} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (51)$$

La matriz $[\mathbf{N}(\xi)]$ contiene las funciones de forma, mientras que el vector $\{\mathbf{U}_e\}$ contiene los desplazamientos nodales del elemento.

Mediante la función auxiliar de ponderación $g(x)$, que surgió al obtener la forma débil de la ecuación gobernante, se define la correspondiente función de giros. Resulta así:

$$\varphi(x) = \frac{dg(x)}{dx} \quad (52)$$

Para representar $g(x)$ en el interior del elemento adoptamos las mismas funciones de forma, con lo cual se tiene:

$$g(\xi) = N_1(\xi) g_1 + N_2(\xi) \varphi_1 + N_3(\xi) g_2 + N_4(\xi) \varphi_2 = [\mathbf{N}(\xi)] \{\mathbf{g}_e\} \quad (53)$$

Siendo:

$$\{\mathbf{g}_e\} = \{g_1 \quad \varphi_1 \quad g_2 \quad \varphi_2\}^T \quad (54)$$

En primer lugar se procede a derivar los desplazamientos $w(\xi)$ y $g(\xi)$ respecto a x , 2 veces:

$$\frac{d^2 w(\xi)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{d\xi^2} [\mathbf{N}(\xi)] \{\mathbf{U}_e\} = \frac{1}{a^2} [\mathbf{N}_{\xi\xi}(\xi)] \{\mathbf{U}_e\} \quad (55)$$

$$\frac{d^2 g(\xi)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{d\xi^2} [\mathbf{N}(\xi)] \{\mathbf{g}_e\} = \frac{1}{a^2} [\mathbf{N}_{\xi\xi}(\xi)] \{\mathbf{g}_e\} \quad (56)$$

Siendo

$$[\mathbf{N}_{\xi\xi}(\xi)] = [N_{1,\xi\xi}(\xi) \quad N_{2,\xi\xi}(\xi) \quad N_{3,\xi\xi}(\xi) \quad N_{4,\xi\xi}(\xi)] \quad (57)$$

Al reemplazar las funciones de forma adoptadas en las expresiones (55-56) se tiene:

$$\frac{d^2 w(\xi)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} [\mathbf{N}_{\xi\xi}(\xi)] \{\mathbf{U}_e\} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{3}{2} \xi \quad \frac{a}{4}(-2 + 6\xi) \quad -\frac{3}{2} \xi \quad \frac{a}{4}(2 + 6\xi) \right] \{\mathbf{U}_e\} \quad (58)$$

$$\frac{d^2 g(\xi)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} [\mathbf{N}_{\xi\xi}(\xi)] \{\mathbf{g}_e\} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{3}{2} \xi \quad \frac{a}{4}(-2 + 6\xi) \quad -\frac{3}{2} \xi \quad \frac{a}{4}(2 + 6\xi) \right] \{\mathbf{g}_e\} \quad (59)$$

La ecuación gobernante (38) puede ahora expresarse en coordenadas locales. Para el caso

de la matriz de rigidez global resulta entonces:

$$[K] = K([k_e]) \quad (60)$$

con:

$$[k_e] = \frac{1}{a^3} \int_{-1}^1 EI [N_{\xi\xi}(\xi)]^T [N_{\xi\xi}(\xi)] d\xi \quad (61)$$

Siendo $[k_e]$ la matriz de rigidez de cada elemento, mientras que $K([k_e])$ representa simbólicamente el ensamblado de las mismas. En forma similar se obtiene la expresión en coordenadas locales de la matriz de masa:

$$[M] = M([M_e]) = M([M_{oe}] + [M_{\eta e}]) \quad (62)$$

Siendo:

$$[M_{oe}] = a \int_{-1}^1 \rho A [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi; \quad (63)$$

$$[M_{\eta e}] = -\frac{\eta^2}{a} \int_{-1}^1 \rho A [N(\xi)]^T [N_{\xi\xi}(\xi)] d\xi. \quad (64)$$

En la que $[M_e]$ representa la matriz de masa de cada elemento, la cual incluye los efectos de escala en la matriz $[M_{\eta e}]$, obtenida en este caso, a partir de la teoría de elasticidad no local. El vector de cargas nodales resulta:

$$\{F\} = F([F_e]) + [Q] = F([F_{oe}] + [F_{\eta e}]) + [Q] \quad (65)$$

Siendo:

$$[F_{oe}] = a \int_{-1}^1 [N(\xi)] q d\xi; \quad (66)$$

$$[F_{\eta e}] = \frac{\eta^2}{a} \int_{-1}^1 [N_{\xi\xi}(\xi)] q d\xi; \quad (67)$$

$$[Q] = (Q(L)g(L) - Q(0)g(0)) - (M(L)g'(L) - M(0)g'(0)). \quad (68)$$

3.2 Condiciones de contorno

En el presente trabajo se consideraron las siguientes condiciones de borde

$$SA-SA \rightarrow g(0) = 0; M(0) = 0; g(L) = 0; M(L) = 0 \quad (69)$$

$$Emp-Libre \rightarrow g(0) = 0; g'(0) = 0; Q(L) = 0; M(L) = 0 \quad (70)$$

$$Emp-SA \rightarrow g(0) = 0; g'(0) = 0; g(L) = 0; M(L) = 0 \quad (71)$$

$$Emp-Emp \rightarrow g(0) = 0; g'(0) = 0; g(L) = 0; g'(L) = 0 \quad (72)$$

3.3 Expresión de los esfuerzos internos

Podemos obtener la expresión de los esfuerzos internos en cada elemento de la microviga, en función de las coordenadas locales. A partir de las ecuaciones (34, 35) se llega a:

$$Q_e(\xi) = -\left(EI \frac{1}{a^3} [N_{\xi\xi\xi}(\xi)] + \eta^2 \omega^2 \rho A \frac{1}{a} [N_{,\xi}(\xi)] \right) \{U_e\} - \frac{\eta^2}{a} [N_{,\xi}(\xi)]^T q_e \quad (73)$$

$$M_e(\xi) = - \left(EI \frac{1}{a} [N_{\xi\xi}(\xi)] + \eta^2 \omega^2 \rho A [N(\xi)] \right) \{U_e\} - \eta^2 [N(\xi)]^T q_e \quad (74)$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Con las expresiones obtenidas en las secciones anteriores, se analizaron diferentes condiciones de vinculación de la microviga Euler y para cada uno de los casos planteados se consideraron diferentes valores del coeficiente de escala de longitud $\bar{\eta}$, el cual varía entre 0 que corresponde al caso de viga clásica ($\bar{\eta} \rightarrow 0 \Rightarrow L \gg \eta$) y $\bar{\eta} = 1$, que corresponde, para la forma adimensional adoptada, a $L = \eta$.

4.1 Análisis estático

El análisis de convergencia en el análisis estático no es en rigor necesario ya que la formulación del elemento es exacta en este caso. Sin embargo para obtener la máxima deflexión recurriendo únicamente a los desplazamientos nodales, obviamente resulta necesario la existencia de un nodo en dicha posición. Si las condiciones de borde son simétricas (*SA-SA* o *Emp-Emp*), resulta suficiente con dos elementos, ya que el máximo desplazamiento se encuentra en el centro de la microviga y en el caso de la microviga cantiléver será suficiente con un solo elemento debido a que el máximo desplazamiento se encuentra en el extremo libre. En cambio en el caso de la microviga *Emp-SA*, por no ser simétrica, se requerirá una mayor cantidad de elementos para tal fin.

n_e	\bar{w}_{\max}			
	<i>SA-SA</i>	<i>Emp - Libre</i>	<i>Emp - SA</i>	<i>Emp - Emp</i>
2	0.1380	0.3750	0.0365	0.0026
4	0.1380	0.3750	0.0396	0.0026
8	0.1380	0.3750	0.0420	0.0026
10	0.1380	0.3750	0.0417	0.0026
12	0.1380	0.3750	0.0422	0.0026
14	0.1380	0.3750	0.0422	0.0026

Tabla 1: Análisis de convergencia del máximo desplazamiento transversal \bar{w}_{\max} de una microviga Euler, para las condiciones de borde indicadas, con $\bar{\eta} = 1$.

La Figura 3 muestra gráficamente los resultados del análisis estático realizado.

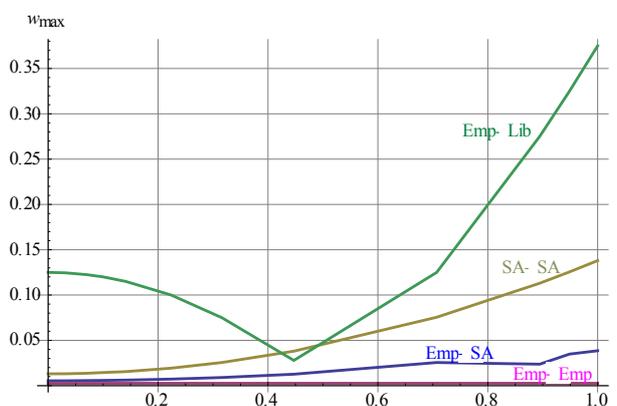


Figura 3: Deflexión máxima de la microviga en función del coeficiente $\bar{\eta}$, para diferentes condiciones de borde

Puede observarse en la Figura 3 que la forma de las variaciones en el valor de la máxima deflexión cambia al considerar diferentes condiciones de borde.

4.2 Análisis dinámico

Para definir apropiadamente el número de elementos de la malla en el análisis dinámico se realizaron previamente dos análisis numéricos de convergencia, uno para el modelo *SA-SA* y otro para el modelo empotrado en ambos extremos. En dicho análisis se adoptó el caso en que $\bar{\eta} = 1$. Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 3 y 4.

n_e	$\bar{\eta} = 1$				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
1	3.3029	7.6554	-	-	-
2	3.0049	6.8432	11.2858	15.4460	-
3	2.9960	6.2728	10.3350	14.3265	19.7960
5	2.9939	6.2150	9.4417	12.7840	17.2860
10	2.9936	6.2057	9.3771	12.5468	15.7351
15	2.9936	6.2052	9.3732	12.5309	15.6886
20	2.9936	6.2051	9.3725	12.5281	15.6802
30	2.9936	6.2051	9.3722	12.5270	15.6770
50	2.9936	6.2051	9.3722	12.5268	15.6763
60	2.9936	6.2051	9.3722	12.5268	15.6763

Tabla 3: Análisis de convergencia de los primeros coeficientes de frecuencia, de una microviga Euler *SA-SA*.

n_e	$\bar{\eta} = 1$				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
1	-	-	-	-	-
2	6.0932	10.8588	-	-	-
3	6.1154	8.9516	14.2590	19.6126	-
5	6.0653	8.9477	12.6991	15.4973	20.7428
10	6.0571	8.8992	12.4725	15.4506	18.9116
15	6.0567	8.8962	12.4570	15.4084	18.8037
20	6.0566	8.8957	12.4543	15.4007	18.7837
30	6.0566	8.8955	12.4533	15.3978	18.7760
50	6.0566	8.8954	12.4531	15.3972	18.7743
60	6.0566	8.8954	12.4530	15.3971	18.7741
70	6.0566	8.8954	12.4530	15.3971	18.7741

Tabla 4: Análisis de convergencia de los primeros coeficientes de frecuencia, de una microviga Euler *Emp-Emp*.

El análisis de convergencia indica que con 60 elementos es suficiente para lograr la estabilización numérica de los primeros 5 coeficientes de frecuencia natural, con una precisión de 6 cifras significativas. A continuación se muestran en las Tablas 5 a 8, los valores de los primeros coeficientes de frecuencia natural para cada una de las condiciones de contorno mencionadas. En los 4 casos analizados se consideraron 12 valores diferentes del coeficiente de escala de longitud $\bar{\eta}$. Esto permite apreciar de manera gradual las modificaciones del comportamiento dinámico del modelo durante la transición del mismo, desde las dimensiones macroscópicas a las microscópicas. En primer lugar, se analizó el modelo de microviga *SA-SA*, cuyos resultados se muestran en la Tabla 5. Los valores indicados con asterisco corresponden a resultados hallados en la literatura (*Phadikar et al, 2010*), con un planteo similar resuelto mediante el método de cuadratura diferencial.

$\bar{\eta}^2$	Ω_1		Ω_2		Ω_3		Ω_4	Ω_5
0	9.8696	9.8696*	39.4784	39.4784*	88.8265	88.8249*	157.914	246.741
0.001	9.8213		38.7215		85.1262		146.751	220.980
0.005	9.6347		36.0779		73.9161		118.045	165.093
0.01	9.4159		33.4277		64.6414		98.3293	132.507
0.02	9.0195		29.5111		53.3079		77.4397	101.283
0.05	8.0761		22.8926		38.0794		52.9457	67.5635
0.1	7.0017		17.7481		28.2557		38.5369	48.6961
0.2	5.7231		13.2364		20.5052		27.6647	34.7736
0.5	4.0513		8.6689		13.1811		17.6601	22.1250
0.8	3.3091		6.9162		10.4639		13.9944	17.5178
0.9	3.1395		6.5318		9.8730		13.1998	16.5205
1	2.9936	2.9936*	6.2051	6.2051*	9.3722	9.3720*	12.5268	15.6763

Tabla 5: Primeros coeficientes de frecuencia natural de una microviga Euler *SA-SA*, obtenidos con la teoría de Elasticidad No-local. Los valores de referencia (*DQM*) corresponden a ([Phadikar et al, 2010](#)).

En la Tabla 6 se consideró el caso de microviga cantiléver, frecuentemente utilizada en dispositivos MEMS.

$\bar{\eta}^2$	Ω_1		Ω_2		Ω_3		Ω_4	Ω_5
0	3.5160	3.5160*	22.0345	22.0345*	61.6972	61.6999*	120.9020	199.8600
0.001	3.5079		21.6855		59.4427		113.0943	180.3672
0.005	3.4758		20.4348		52.4329		92.5490	137.2909
0.01	3.4368		19.1364		46.4936		78.2131	111.8130
0.02	3.3623		17.1513		39.1271		62.7765	86.8844
0.05	3.1631		13.6803		28.9740		44.0353	59.0523
0.1	2.8943		10.9336		22.1050		32.5439	42.9895
0.2	2.5092		8.4926		16.4050		23.6264	30.9107
0.5	1.8932		5.9061		10.7555		15.2416	19.7823
0.8	1.5811		4.8401		8.5946		12.1254	15.6940
0.9	1.5068		4.5981		8.1202		11.4466	14.8067
1	1.4421		4.3900		7.7168		10.8706	14.0548

Tabla 6: Primeros coeficientes de frecuencia natural de una microviga Euler *Emp-Libre*, obtenidos con la teoría de Elasticidad No-local. Los valores de referencia (*DQM*) corresponden a ([Phadikar et al, 2010](#)).

$\bar{\eta}^2$	Ω_1		Ω_2		Ω_3		Ω_4	Ω_5
0	15.4182	15.4182*	49.9649	49.9648*	104.248	104.247*	178.270	272.032
0.001	15.3302		48.9264		99.6664		165.169	242.776
0.005	14.9923		45.3369		85.9769		131.994	180.310
0.01	14.5992		41.7947		74.8518		109.595	144.428
0.02	13.8962		36.6566		61.4740		86.1393	110.320
0.05	12.2671		28.2033		43.7967		58.8901	73.6630
0.1	10.4816		21.7891		32.5099		42.9196	53.1677
0.2	8.4410		16.2352		23.6262		30.8605	38.0204
0.5	5.8851		10.6400		15.2165		19.7336	24.2238
0.8	4.7823		8.4928		12.0883		15.6465	19.1880
0.9	4.5326		8.0217		11.4074		14.7598	18.0973
1	4.3182	4.3182*	7.6211	7.6211*	10.8300	10.8302*	14.0086	17.1737

Tabla 7: Primeros coeficientes de frecuencia natural de una microviga Euler *Emp-SA*, obtenidos con la teoría de Elasticidad No-local. Los valores de referencia (*DQM*) corresponden a ([Phadikar et al, 2010](#)).

En la tabla 7 se presentan los resultados correspondientes a una microviga Euler empotrada-simplemente apoyada y en la Tabla 8 los correspondientes a una microviga Euler empotrada en ambos extremos. En todos los casos mostrados puede apreciarse una fuerte dependencia de los valores de los coeficientes de frecuencia con el coeficiente de escala de longitud $\bar{\eta}$, y una excelente concordancia con los valores de referencia.

$\bar{\eta}^2$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0	22.3733 22.3733*	61.6728 61.6728*	120.9035 120.902*	199.860	298.557
0.001	22.2369	60.2990	115.3318	184.640	265.548
0.005	21.7144	55.5846	98.8787	146.627	196.092
0.01	21.1090	50.9832	85.7165	121.348	156.741
0.02	20.0328	44.3948	70.1224	95.1487	119.623
0.05	17.5702	33.7641	49.8593	64.9409	79.9467
0.1	14.9180	25.8608	37.0669	47.2884	57.8080
0.2	11.9401	19.1293	27.0182	33.9713	41.4262
0.5	8.2756	12.4545	17.4654	21.7006	26.4533
0.8	6.7120	9.9203	13.8931	17.1997	20.9702
0.9	6.3591	9.3661	13.1141	16.2238	19.7813
1	6.0566 6.0566*	8.8954 8.8954*	12.4530 12.4525*	15.3971	18.7741

Tabla 8: Primeros coeficientes de frecuencia natural de una microviga Euler *Emp-Emp*, obtenidos con la teoría de Elasticidad No-local. Los valores de referencia (*DQM*) corresponden a (*Phadikar et al, 2010*).

5 CONCLUSIONES

Con las expresiones resultantes de la aplicación de la teoría de elasticidad no local a una microviga Euler, implementadas mediante el método de elementos finitos, se llevó a cabo un análisis numérico exhaustivo. Tal estudio se realizó con el fin de analizar las alteraciones en el comportamiento estático y dinámico de modelo, cuando las dimensiones del mismo se llevaron a escala micro-mecánica. En primer lugar se realizó un análisis numérico de convergencia tanto para el caso estático como para el dinámico, concluyéndose del mismo que con el uso de 60 elementos se alcanza la estabilidad numérica de los resultados con elevada precisión. Se tuvieron en cuenta diferentes condiciones de borde y en cada caso se analizó el modelo para un amplio rango del coeficiente de escala de longitud $\bar{\eta}$. Tanto en el caso estático como en el dinámico se aprecia una fuerte dependencia de los resultados con dicho coeficiente, incrementándose el efecto de escala a medida que $\bar{\eta} \rightarrow 1$. Resulta evidente, del estudio realizado, que para obtener valores confiables y precisos en modelos micro-mecánicos es necesario tener en cuenta los efectos de escala de longitud del mismo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS) así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), bajo cuyo auspicio se desarrolló el presente trabajo.

REFERENCIAS

- Arash B. and Wang Q.. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Springer Series in Materials Science*. 188:57-82. 2014.
- Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaian M.H. and Rahaeifard M., On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design*, 31:2324-2329, 2010.

- Cosserat E. and Cosserat F., *Théorie des Corps Deformables*, A. Hermann et Fils, París, reeditado por Gabay, París, 2009.
- Eringen A.C. and Suhubi E.S.. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids I. *Int. J. Eng. Sci.* **2(2)**:189-203, 1964.
- Eringen A.C. and Suhubi E.S.. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids II. *Int. J. Eng. Sci.* **2(4)**:389-404, 1964.
- Eringen A. C. Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 15: 909-923, 1966.
- Eringen A.C. *Non Local Continuum Theories*. Springer, 2001.
- Eringen A.C. *Foreword In Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After The Cosserats*. Springer, New York, 2009.
- Ghannadpour S.A.M. Mohammadi B. and Fazilati J.. Bending Buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method. *Composite Structure.* 96:584-589. 2013.
- Mindlin R.D. and Tiersten H., Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mechanical Anal.* 11.1:445-448, 1962.
- Mindlin R.D., Micro-structure in linear elasticity, *Technical Report of Columbia University*, New York, USA, 1964.
- Mindlin R.D., Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *Int. J. Solids and Structures.* 1:417-438, 1965.
- Mindlin R.D. and Eshel N.N., On First Strain-gradient theories in linear Elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109-124, 1968.
- Phadikar J.K. and Pradhan S.C.. Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Material Science.* 49:492-499. 2010.
- Toupin R. Theories of elasticity with couple stress. *Arch. Rational Mech.*,17(2):85-112,1964.
- Wang Y.G., Lin W.H. and Liu N., Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory, *Physica E. Low Dimensional Systems and nanostructures*, 47:80-85, 2013.
- Yang F. Chong A.C.M.. Lang D.C.C. and Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures.* 39:2731-2743. 2002.
- Zienkiewicz. O.C.. and Taylor. R.L.. *The finite element method*. volume II. McGraw Hill. 1991.