

FORMULACIÓN CONTINUA DE UN MASTIL 3D RETICULADO Y ARRIOSTRADO

Alberto M. Guzmán^a, Marta B. Rosales^{b,c} y Carlos P. Filipich^{b,d}

^a*CEREDETEC, FRM, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^c*CONICET, Argentina*

^d*CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, Bahía Blanca, Argentina*

Palabras claves: mástil arriostrado, estática, modelo continuo.

Resumen. En la industria de las telecomunicaciones las antenas generalmente son soportadas por mástiles reticulados y arriostrados con riostras ubicadas a distintas alturas. En un trabajo anterior, se obtuvo la formulación continua de un modelo simplificado (6 ecuaciones diferenciales-6ED) que permite la representación de un mástil reticulado en zig-zag y de sección transversal triangular. En cuanto a las riostras, éstas resultan ser elementos estructurales que contribuyen a la estabilidad y rigidez del sistema. En la práctica, la pretensión dada a las riostras en el montaje permite la simulación utilizando un modelo parabólico. Debido a los desplazamientos laterales del sistema mástil-riostras, los extremos de las riostras tomados al mástil también se desplazan. Por ello, el estado tensional inicial se modifica evidenciándose un comportamiento mecánico geoméricamente no-lineal. Previamente y también en un trabajo anterior, el comportamiento de una riostra con un extremo desplazable fue analizado, obteniendo así un modelo de representación dado por un resorte con una variación no-lineal de su rigidez. En el presente trabajo y considerando esta última alternativa para la representación de la riostra, la energía de deformación del resorte es determinada e incorporada al modelo continuo simplificado del mástil reticulado (6ED), obteniendo así un modelo continuo para la representación del comportamiento estático de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras, definido como modelo MRA-6ED. Por último, se presenta un ejemplo numérico en el cual se determina el desplazamiento máximo de la cima del mástil implementando la formulación desarrollada, y se compara con el resultado obtenido de aplicar una modelación vía elementos finitos. Dicho desplazamiento de la cima ha sido evaluado considerando dos formas de establecer la pretensión de montaje a asignar a las riostras según dos normativas. Los resultados numéricos obtenidos para ambos casos indican un muy buen desempeño del modelo MRA-6ED desarrollado.

1 INTRODUCCIÓN

El uso de estructuras arriostradas para sistemas de antenas en altura es usual en la infraestructura de comunicaciones. Estos sistemas estructurales constan de dos contribuciones fundamentales, un mástil y los cables o riostras los cuales se encuentran vinculados al mismo a distintas alturas. Dichos sistemas suelen presentar alturas importantes, tornándose flexibles frente a las acciones actuantes, haciendo que presenten un comportamiento geoméricamente no-lineal debido a la configuración geométrica de las riostras. El mástil resulta ser usualmente reticulado, en donde una geometría común del mismo consiste en una sección triangular uniforme compuesta de tres largueros unidos entre sí mediante tres planos de diagonales dispuestas en un patrón del tipo zig-zag, y en donde el mástil es arriostrado por tres riostras ubicadas a 120° entre ellas.

A partir de trabajos anteriores desarrollados por los autores del presente trabajo se obtuvo, a través de un desarrollo energético, un modelo continuo simplificado (6ED) para la representación del mástil reticulado anteriormente descrito (Guzmán et al., 2012), así como también, la expresión que define la evolución no-lineal de la rigidez de una riostra suspendida de dos extremos uno de los cuales puede desplazarse (Guzmán et al., 2013).

Es común en la práctica profesional, e incluso aceptado en el Reglamento CIRSOC 306 (CIRSOC 306, 1995), diseñar estos sistemas considerando al mástil apoyado en resortes, las riostras, y cuyo valor de rigidez asignado a los mismos es el determinado a partir de evaluar la constante de rigidez elástica que presenta cada riostra. Esta estrategia para considerar el comportamiento de la riostra podría conducir a la obtención de una respuesta estructural no apropiada del sistema mástil-riostras, debido a que la riostra presenta una evolución no-lineal de su rigidez (Irvine, 1992; Guzmán et al., 2013). Esto último se debe a que frente a un corrimiento del nudo arriostrado como consecuencia, por ej., de una carga transversal actuante en el mástil, los extremos de las riostras anclados a dicho nudo también experimentan corrimientos, haciendo que se modifique su estado tensional previo y con ello un cambio en su rigidez, modificando consecuentemente la rigidez del sistema estructural.

Las riostras son los elementos estructurales capaces de estabilizar al mástil, y como suele suceder en la práctica, presentan una suficiente pretensión dada en el montaje lo cual hace que su flecha sea pequeña, permitiendo así la representación de su comportamiento mediante el uso del modelo parabólico (Irvine, 1992) considerando la extensibilidad del material de la riostra.

En el presente trabajo se asume que las riostras pueden ser representadas como si se tratasen de resortes elásticos con una evolución no-lineal de su rigidez, pudiendo de este modo determinar la energía interna de deformación elástica desarrollada por los resortes (las riostras) cuando el nudo arriostrado experimenta un desplazamiento. Es así que conocido el aporte energético dado por las riostras podemos determinar la función Lagrangiana del sistema mástil-riostras, para luego y mediante un planteo energético, obtener el modelo continuo MRA-6ED el cual permite evaluar la respuesta estática del mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras.

Por último, se presenta un ejemplo numérico en el cual se determina el desplazamiento máximo de la cima del mástil implementando la formulación desarrollada, y se compara con el resultado obtenido de aplicar una modelación vía elementos finitos utilizando el software SAP2000 (CSI., 2007). Dicho desplazamiento de la cima del mástil ha sido evaluado considerando dos formas de establecer la pretensión de montaje a asignar a las riostras, una de acuerdo al Reglamento CIRSOC 306 (CIRSOC 306, 1995) y otra de acuerdo a la Norma Americana ANSI/TIA-222-F (ANSI/TIA/EIA-222-F, 1996). Los resultados numéricos obtenidos indican un muy buen desempeño del modelo MRA-6ED desarrollado.

2 MÁSTIL RETICULADO Y ARRIOSTRADO

Se analiza un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras dispuestas las mismas 120° entre sí (ver Fig. 1).

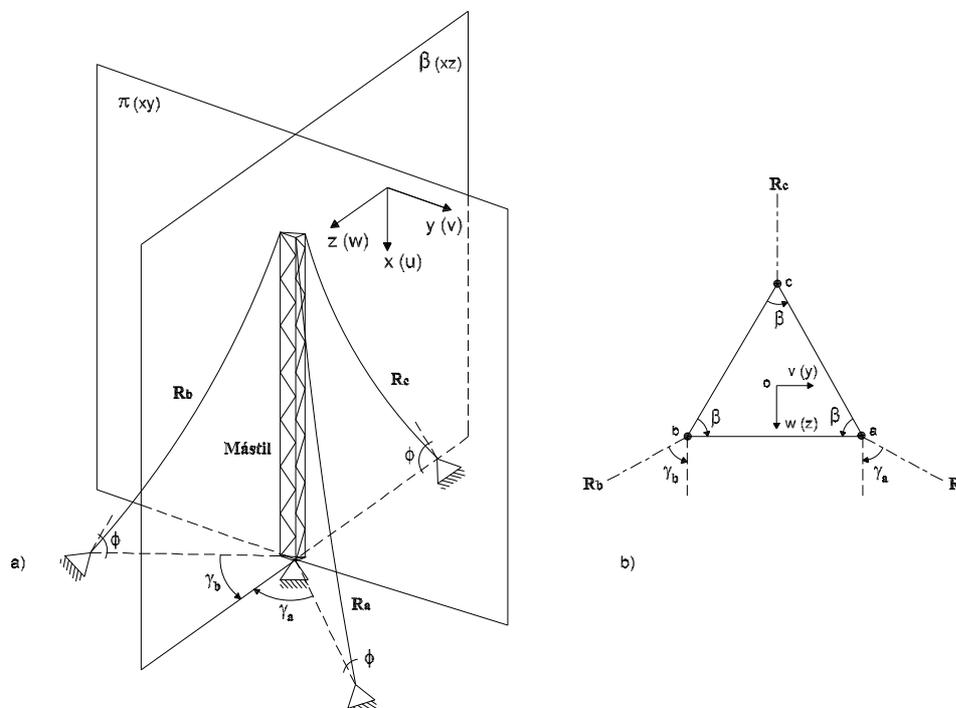


Figura 1: Mástil reticulado y arriostrado analizado. a) Vista. b) Planta

Dicho reticulado presenta una altura L_l , y está constituido por tres largueros (a , b y c) iguales y continuos en su desarrollo, unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos, siguiendo un patrón de diagonalización conocido como zig-zag. La sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La longitud de cada diagonal es L_d , en tanto que la longitud de cada uno de los lados de la sección transversal es e . En cuanto al material que constituye a los largueros y diagonales, este resulta ser elástico y lineal, siendo respectivamente sus módulos de elasticidad, E_l y E_d . Por tratarse de una sección transversal triangular y equilátera, $\beta = 60^\circ$.

En cuanto a las riostras (R_a , R_b y R_c), estas presentan una sección transversal A_r , una longitud de cuerda L_c y un módulo de elasticidad E_r (material elástico y lineal). El ángulo ϕ representa la inclinación de la cuerda respecto al plano horizontal yz , en tanto que el ángulo γ representa la ubicación de la riostra con respecto al plano vertical xz .

3 MODELO CONTINUO MRA-6ED

3.1 Energía interna de deformación elástica de un resorte

A fin de incorporar el comportamiento de las riostras como resortes (ver Fig. 2) al modelo continuo simplificado 6ED (Guzmán et al., 2012), resulta necesario determinar la energía interna de deformación elástica desarrollada por dichos resortes equivalentes.

Cuando un resorte está sujeto a un estiramiento (o contracción) debido a la aplicación de una fuerza externa, éste va acumulando energía elástica de deformación, la cual luego utilizará para

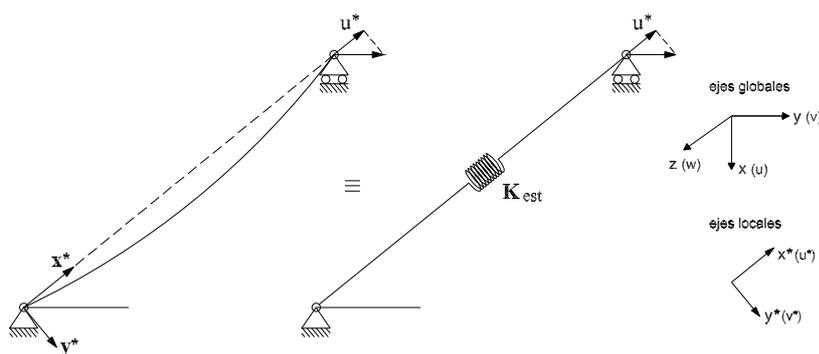


Figura 2: Representación de la riostra como resorte elástico

volver a su posición inicial, es decir en la dirección opuesta a la de la fuerza externa.

Para el presente caso de análisis y de acuerdo a lo desarrollado en un trabajo anterior (Guzmán et al., 2013), la riostra presenta una variación no-lineal de su rigidez y por lo tanto su contribución energética dará lugar a un sistema diferencial no-lineal, debiendo adoptarse algún método numérico para hallar la solución de dicho sistema. Por otro lado y como una estrategia alternativa para incorporar el comportamiento de la riostra al modelo continuo, se considera que la rigidez de la riostra adopta un valor inicial el cual necesariamente deberá actualizarse hasta que el valor de dicha rigidez se corresponda con el valor asociado al desplazamiento que ha experimentado el extremo de la riostra. Bajo esta consideración, la energía aportada por la riostra da lugar a un sistema diferencial lineal el cual necesita ser resuelto mediante iteraciones sucesivas a fin de ir actualizando la rigidez de la riostra, de modo tal que al final de las iteraciones necesarias la solución del sistema lineal se corresponderá con aquella solución del sistema no-lineal en caso de haber considerado explícitamente al resorte con una ley de variación no-lineal.

Adoptando esta estrategia alternativa para representar el comportamiento de la riostra en cada paso o iteración necesaria, la energía de deformación desarrollada por el resorte resulta:

$$U_{ri} = \frac{1}{2} k_i \delta_i^2 \quad i = a, b, c \quad (1)$$

en donde el índice i identifica a cada una de las riostras. Para nuestro caso la constante de resorte $k_i = K_{est_i}$ y el desplazamiento del resorte $\delta_i = u_i^*$, por lo que la energía potencial desarrollada por el resorte i sobre el eje local x^* resulta entonces:

$$U_{ri}^* = \frac{1}{2} K_{est_i} u_i^{*2} \quad i = a, b, c \quad (2)$$

La relación entre los corrimientos del nudo arriostrado del larguero con el corrimiento de la riostra sobre su eje local x^* , surge de considerar una riostra genérica tensa (ver Fig. 3) la cual presenta la posibilidad de corrimiento de su extremo superior (nudo arriostrado), mientras que el extremo inferior está impedido de moverse (anclaje).

Designando a \vec{I}_i como el vector que define la posición de la cuerda de la riostra en la configuración de referencia (inicial), resulta:

$$\vec{I}_i = \check{i} dx + \check{j} dy + \check{k} dz \quad (3)$$

donde dx , dy y dz es la proyección de L_c sobre cada uno de los ejes principales.

Llamando ahora a \vec{I}_i' como el vector que define la posición de la cuerda pero en la configuración desplazada, de la suma vectorial resulta:

$$\vec{I}_i' = \vec{I}_i + \vec{i}' \quad i = a, b, c \quad (4)$$

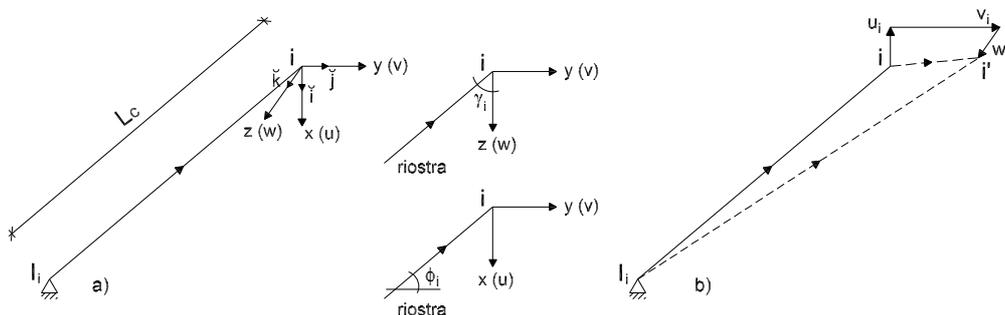


Figura 3: Riostra tensa. a) Configuración de referencia. b) Configuración desplazada

de donde

$$\vec{i}i' = \check{i}u_i + \check{j}v_i + \check{k}w_i \quad i = a, b, c \quad (5)$$

Analizando la riostra R_a , la cual arriestra al larguero a , de la Ec. (3) se tiene que:

$$\vec{I}_a a' = -\check{i}L_c \sin\phi_a - \check{j}L_c \sin\gamma_a \cos\phi_a - \check{k}L_c \cos\gamma_a \cos\phi_a \quad (6)$$

y desarrollando, su módulo vale:

$$|\vec{I}_a a'| = L_c \quad (7)$$

En tanto que de la Ec. (5) resulta:

$$\vec{a}a' = \check{i}u_a + \check{j}v_a + \check{k}w_a \quad (8)$$

Por lo tanto reemplazando las Ecs. (6) y (8) en la Ec. (4), se obtiene:

$$\vec{I}_a a' = \check{i}(u_a - L_c \sin\phi_a) + \check{j}(v_a - L_c \sin\gamma_a \cos\phi_a) + \check{k}(w_a - L_c \cos\gamma_a \cos\phi_a) \quad (9)$$

con lo cual desarrollando algebraicamente y dado que los corrimientos u_a , v_a y w_a son muy pequeños con respecto a L_c , se acepta que el módulo de dicho vector pueda ser expresado como:

$$|\vec{I}_a a'| \approx L_c \left[1 - \frac{2}{L_c} (u_a \sin\phi_a + v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a + w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a) \right]^{1/2} \quad (10)$$

y en donde haciendo uso de la expansión binomial, y prescindiendo de los términos de orden superior, resulta:

$$|\vec{I}_a a'| \approx L_c - (u_a \sin\phi_a + v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a + w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a) \quad (11)$$

Por lo tanto, el módulo del vector desplazamiento del extremo móvil de la riostra R_a , al pasar de la configuración de referencia a la desplazada, resulta:

$$u_a^* = |a\vec{a}'| = |\vec{I}_a a'| - |\vec{I}_a a| \approx -u_a \sin\phi_a - v_a \sin\gamma_a \cos\phi_a - w_a \cos\gamma_a \cos\phi_a \quad (12)$$

Con un desarrollo equivalente al de la riostra R_a se obtiene el módulo del vector desplazamiento para las riostras R_b y R_c :

$$\begin{aligned} u_b^* &= |b\vec{b}'| = |\vec{I}_b b'| - |\vec{I}_b b| \approx -u_b \sin\phi_b + v_b \sin\gamma_b \cos\phi_b - w_b \cos\gamma_b \cos\phi_b \\ u_c^* &= |c\vec{c}'| = |\vec{I}_c c'| - |\vec{I}_c c| \approx -u_c \sin\phi_c - v_c \sin\gamma_c \cos\phi_c + w_c \cos\gamma_c \cos\phi_c \end{aligned} \quad (13)$$

y que de acuerdo a la ubicación y disposición que presentan las riostras, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_a = \phi_b = \phi_c \\ \gamma_a &= \gamma_b = 60^\circ \quad ; \quad \gamma_c = 0^\circ\end{aligned}\quad (14)$$

Reemplazando ahora los módulos de los vectores desplazamientos de cada riostra, obtenidos en las Ecs. (12) y (13), en la Ec. (2) y desarrollando, resulta la energía interna de deformación elástica de cada una de las riostras:

$$\begin{aligned}U_{ra} &= \frac{1}{2}K_{esta} \left[u_a(x)^2 \sin^2 \phi + \left(\frac{3}{4}v_a(x)^2 + \frac{1}{4}w_a(x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_a(x)w_a(x) \right) \cos^2 \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{3}u_a(x)v_a(x) + u_a(x)w_a(x) \right) \sin \phi \cos \phi \right] \\ U_{rb} &= \frac{1}{2}K_{estb} \left[u_b(x)^2 \sin^2 \phi + \left(\frac{3}{4}v_b(x)^2 + \frac{1}{4}w_b(x)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_b(x)w_b(x) \right) \cos^2 \phi - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{3}u_b(x)v_b(x) - u_b(x)w_b(x) \right) \sin \phi \cos \phi \right] \\ U_{rc} &= \frac{1}{2}K_{estc} \left(u_c(x)^2 \sin^2 \phi + w_c(x)^2 \cos^2 \phi - 2u_c(x)w_c(x) \sin \phi \cos \phi \right)\end{aligned}\quad (15)$$

y en donde los corrimientos de cada larguero pueden ser referidos al eje baricéntrico de la sección transversal del reticulado (Guzmán et al., 2013), resultando:

$$\begin{aligned}u_a(x) &= u_o(x) - \theta_{wo}(x) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\ u_b(x) &= u_o(x) + \theta_{wo}(x) \frac{e}{2} + \theta_{vo}(x) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\ u_c(x) &= u_o(x) - \theta_{vo}(x) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\ v_a(x) &= v_o(x) - \theta_{uo}(x) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\ v_b(x) &= v_o(x) - \theta_{uo}(x) \frac{\sqrt{3}}{6} e \\ v_c(x) &= v_o(x) + \theta_{uo}(x) \frac{\sqrt{3}}{3} e \\ w_a(x) &= w_o(x) + \theta_{uo}(x) \frac{e}{2} \\ w_b(x) &= w_o(x) - \theta_{uo}(x) \frac{e}{2} \\ w_c(x) &= w_o(x)\end{aligned}\quad (16)$$

El reemplazo en la Ec. (15) de la representación de los corrimientos de los largueros dados de acuerdo a la Ec. (16), permite escribir a la energía interna de deformación elástica desarrollada por cada una de las riostras pero referidas al eje baricéntrico de la sección transversal del reticulado, tal como se indica seguidamente:

$$\begin{aligned}
U_{r_{oa}} &= \frac{1}{2}K_{esta} \left[\left(u_o(x)^2 + \frac{e^2}{12}\theta_{vo}(x)^2 + \frac{e^2}{4}\theta_{wo}(x)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3}u_o(x)\theta_{vo}(x) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - eu_o(x)\theta_{wo}(x) - \frac{\sqrt{3}e^2}{6}\theta_{vo}(x)\theta_{wo}(x) \right) \sin^2\phi + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4}v_o(x)^2 + \frac{1}{4}w_o(x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_o(x)w_o(x) \right) \cos^2\phi + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sqrt{3}u_o(x)v_o(x) + u_o(x)w_o(x) - \frac{\sqrt{3}e}{2}v_o(x)\theta_{wo}(x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e}{2}v_o(x)\theta_{vo}(x) - \frac{e}{2}w_o(x)\theta_{wo}(x) + \frac{\sqrt{3}e}{6}w_o(x)\theta_{vo}(x) \right) \sin\phi\cos\phi \right] \\
U_{r_{ob}} &= \frac{1}{2}K_{estb} \left[\left(u_o(x)^2 + \frac{e^2}{12}\theta_{vo}(x)^2 + \frac{e^2}{4}\theta_{wo}(x)^2 + \frac{\sqrt{3}e}{3}u_o(x)\theta_{vo}(x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + eu_o(x)\theta_{wo}(x) + \frac{\sqrt{3}e^2}{6}\theta_{vo}(x)\theta_{wo}(x) \right) \sin^2\phi + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4}v_o(x)^2 + \frac{1}{4}w_o(x)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_o(x)w_o(x) \right) \cos^2\phi - \right. \\
&\quad \left. - \left(\sqrt{3}u_o(x)v_o(x) - u_o(x)w_o(x) + \frac{\sqrt{3}e}{2}v_o(x)\theta_{wo}(x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e}{2}v_o(x)\theta_{vo}(x) - \frac{e}{2}w_o(x)\theta_{wo}(x) - \frac{\sqrt{3}e}{6}w_o(x)\theta_{vo}(x) \right) \sin\phi\cos\phi \right] \\
U_{r_{oc}} &= \frac{1}{2}K_{estc} \left[\left(u_o(x)^2 + \frac{e^2}{3}\theta_{vo}(x)^2 - \frac{2\sqrt{3}e}{3}u_o(x)\theta_{vo}(x) \right) \sin^2\phi + \right. \\
&\quad \left. + w_o(x)^2\cos^2\phi - \left(2u_o(x)w_o(x) - \frac{2\sqrt{3}e}{3}w_o(x)\theta_{vo}(x) \right) \sin\phi\cos\phi \right] \quad (17)
\end{aligned}$$

en donde el subíndice o indica la referencia al eje baricéntrico del reticulado.

Por lo tanto, la energía interna total de deformación elástica desarrollada por las riostras y referida al eje baricéntrico, resulta ser la suma de las energías aportadas por cada una de las riostras que forman parte del mástil arriostrado:

$$\begin{aligned}
U_{r_o} = \frac{1}{2} \left\{ \right. & \left[(K_{est_x})_o u_o^2(x) + \frac{e^2}{3} (K_{est_z})_o \theta_{vo}^2(x) + \frac{e^2}{3} (K_{est_y})_o \theta_{wo}^2(x) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{3} e (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) u_o(x) \theta_{vo}(x) - e (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x) \theta_{wo}(x) - \\
& - \frac{\sqrt{3}}{6} e^2 (K_{est_a} - K_{est_b}) \theta_{vo}(x) \theta_{wo}(x) \left. \right] \sin^2 \phi + \left[(K_{est_y})_o v_o^2(x) + (K_{est_z})_o w_o^2(x) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) v_o(x) w_o(x) \left. \right] \cos^2 \phi + \left[\sqrt{3} (K_{est_a} - K_{est_b}) u_o(x) v_o(x) + \right. \\
& + (K_{est_a} + K_{est_b} - 2K_{est_c}) u_o(x) w_o(x) - \frac{2\sqrt{3}e}{3} (K_{est_y})_o v_o(x) \theta_{wo}(x) + \\
& + \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) v_o(x) \theta_{vo}(x) - \frac{e}{2} (K_{est_a} - K_{est_b}) w_o(x) \theta_{wo}(x) + \\
& \left. \left. + \frac{2\sqrt{3}e}{3} (K_{est_z})_o w_o(x) \theta_{vo}(x) \right] \sin \phi \cos \phi \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

en donde a la rigidez aportada por las riostras en las direcciones principales de x , y y z , se las ha llamado respectivamente como:

$$\begin{aligned}
(K_{est_x})_o &= K_{est_a} + K_{est_b} + K_{est_c} \\
(K_{est_y})_o &= \frac{3}{4} (K_{est_a} + K_{est_b}) \\
(K_{est_z})_o &= \frac{1}{4} (K_{est_a} + K_{est_b} + 4K_{est_c}) \quad (19)
\end{aligned}$$

3.2 Rigidez del nudo arriostrado en las direcciones principales

Frente a cargas transversales, el sistema estructural mástil-riostras experimentará desplazamientos laterales. Dependiendo de la magnitud de estos desplazamientos y de la ubicación de las riostras, podrá suceder que alguna o algunas de éstas se tensen, mientras que otra u otras se aflojen por arriba o por debajo de la tensión inicial, respectivamente. En aquellas riostras que se tensen, su rigidez axial K_{est_i} tenderá a la rigidez elástica, es decir a $\frac{E_r A_r}{L_e}$, en tanto que para aquellas riostras que se aflojen, y dada la incapacidad de las mismas de tomar esfuerzos de compresión, sucederá que K_{est_i} tenderá a anularse. Preidikman et al. (Preidikman et al., 2006) también observaron tal situación, indicando que cuando se produce un gran desplazamiento lateral del mástil y dependiendo de la pretensión inicial o de montaje dada a las riostras, el mástil reticulado puede presentar una rigidización (o "endurecimiento") o bien una flexibilización (o "ablandamiento").

Suponiendo en nuestro análisis que el desplazamiento del sistema mástil-riostras se corresponde con la dirección principal z , resulta entonces que la riostra R_c la cual está contenida en el plano principal xz , aporta una rigidez que está dada de reescribir la expresión obtenida en (Irvine, 1992; Guzmán et al., 2013):

$$K_{est_c} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_c^2}{12}} \quad (20)$$

en donde:

$$\kappa_c^2 = \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H_c^*} \right)^2 \frac{E_r A_r L_c}{H_c^* L_e} \quad (21)$$

siendo H_c^* el estado tensional de la riostra R_c . En tanto que las riostras R_a y R_b , ubicadas fuera del plano principal xz , aportan la misma rigidez la cual está dada por:

$$K_{est_{a,b}} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_{a,b}^2}{12}} \quad (22)$$

y en donde:

$$\kappa_{a,b}^2 = \left(\frac{mg \cos \phi L_c}{H_{a,b}^*} \right)^2 \frac{E_r A_r L_c}{H_{a,b}^* L_e} \quad (23)$$

siendo en este caso $H_{a,b}^* = H_a^* = H_b^*$ el estado tensional de las riostras R_a y R_b . Por lo tanto y de acuerdo a la Ec. (19), la rigidez horizontal del nudo arriostrado en la dirección de z resulta:

$$(K_{est_z})_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_c} + \frac{1}{2} K_{est_{a,b}} \right) \cos^2 \phi \quad (24)$$

Ahora frente a un desplazamiento en la dirección principal de y , y con un desarrollo equivalente al anterior, la rigidez horizontal del nudo arriostrado en la dirección de y resulta:

$$(K_{est_y})_o \cos^2 \phi = \frac{3}{4} \left(K_{est_a} + K_{est_b} \right) \cos^2 \phi \quad (25)$$

en tanto que frente a un desplazamiento en la dirección principal de x , la rigidez vertical del nudo arriostrado y en la dirección de x resulta:

$$(K_{est_x})_o \sin^2 \phi = \left(K_{est_a} + K_{est_b} + K_{est_c} \right) \sin^2 \phi \quad (26)$$

En el estado de pretensión o montaje, la tensión de las riostras dispuestas en un mismo nivel presentan igual estado tensional H_o^* , por lo tanto $\kappa_{a,b}^2 = \kappa_c^2 = \kappa_o^2$ y con ello al reemplazar en las Ecs. (20) y (22), la rigidez aportada por cada una de las riostras en la etapa del montaje vale:

$$K_{est_o} = K_{est_a} = K_{est_b} = K_{est_c} = \frac{E_r A_r}{L_e} \frac{1}{1 + \frac{\kappa_o^2}{12}} \quad (27)$$

con lo cual de reemplazar esta última ecuación en las Ecs. (24), (25) y (26), resulta que la rigidez horizontal del nudo arriostrado es igual en ambas direcciones principales de y y de z :

$$(K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi = \frac{3}{2} K_{est_o} \cos^2 \phi \quad (28)$$

mientras que la rigidez de dicho extremo en la dirección principal de x resulta:

$$(K_{mont_x})_o \sin^2 \phi = 3 K_{est_o} \sin^2 \phi \quad (29)$$

Ahora bien, si el desplazamiento $w_{o(0)}$ del extremo del mástil en la dirección y sentido (+) de z es muy grande, tal que $w_{o(0)} \rightarrow +\infty$, la riostra R_c experimentará un estiramiento lo cual generará un incremento en su estado tensional respecto del montaje, mientras que las riostras

R_a y R_b se aflojarán perdiendo de este modo pretensión respecto de la inicial. Por lo tanto sucederá que:

$$w_{o(0)} \rightarrow +\infty \quad \kappa_c^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_c} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad y \quad \kappa_{a,b}^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_{a,b}} \rightarrow 0 \quad (30)$$

y con ello:

$$\left(K_{est_z}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi \quad (31)$$

con lo cual la rigidez horizontal en $+z$ del nudo arriostrado tiende al valor de la rigidez elástica.

Cuando el desplazamiento $w_{o(0)}$ es muy grande pero en el sentido opuesto (-) de z , la riostra R_c se afloja mientras que las riostras R_a y R_b se estiran, lo cual implica que:

$$w_{o(0)} \rightarrow -\infty \quad \kappa_c^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_c} \rightarrow 0 \quad y \quad \kappa_{a,b}^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_{a,b}} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad (32)$$

y con ello:

$$\left(K_{est_z}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{1}{2} \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi \quad (33)$$

con lo que en este caso, la rigidez horizontal en $-z$ tiende a la mitad del valor de la rigidez elástica.

Para un desplazamiento muy grande $v_{o(0)}$ en ambos sentidos de la dirección principal y , y con un desarrollo equivalente al anterior, resulta:

$$\begin{aligned} v_{o(0)} \rightarrow +\infty \quad \kappa_b^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_b} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \quad y \quad \kappa_a^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_a} \rightarrow 0 \\ v_{o(0)} \rightarrow -\infty \quad \kappa_b^2 \rightarrow \infty \quad K_{est_b} \rightarrow 0 \quad y \quad \kappa_a^2 \rightarrow 0 \quad K_{est_a} \rightarrow \frac{E_r A_r}{L_e} \end{aligned} \quad (34)$$

con lo cual la rigidez horizontal, tanto en $+y$ como en $-y$, vale:

$$\left(K_{est_y}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \rightarrow \frac{3}{4} \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi \quad (35)$$

Si frente a una pretensión inicial o de montaje H_o^* , resulta que κ_o^2 es igual a 6, al reemplazar en la Ec. (27) se tiene entonces que K_{est_o} es igual a $\frac{2}{3} \frac{E_r A_r}{L_e}$ y por la tanto reemplazando ahora en la Ec. (28), resulta que la rigidez horizontal de montaje del nudo arriostrado, $(K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi$, es igual al valor de la rigidez horizontal elástica, es decir, $\frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi$.

Ahora bien bajo un análisis equivalente y si resultare que las riostras presentan una suficiente pretensión inicial tal que κ_o^2 es menor a 6, se tiene que el nudo arriostrado pierde rigidez o se ablanda frente al desplazamiento $w_{o(0)}$ cualquiera sea el sentido de este, debido a que la rigidez de montaje resulta ser mayor que la rigidez adquirida por el nudo debido al desplazamiento experimentado por el mismo:

$$\kappa_o^2 < 6 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi > \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_z}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi > \left(K_{est_z}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (36)$$

Si en cambio H_o^* presenta un valor pequeño tal que κ_o^2 resulte mayor a 24, el nudo arriostrado se rigidiza o endurece cualquiera sea el sentido del desplazamiento $w_{o(0)}$, debido a que:

$$\kappa_o^2 > 24 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi < \frac{1}{2} \frac{E_r A_r}{L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_z}^{-\infty}\right)_o \cos^2 \phi < \left(K_{est_z}^{+\infty}\right)_o \cos^2 \phi \quad (37)$$

En la dirección de y y con un análisis equivalente al anterior, resulta que si:

$$\kappa_o^2 < 12 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi > \frac{3 E_r A_r}{4 L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{+\infty} \right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty} \right)_o \cos^2 \phi \quad (38)$$

entonces el nudo arriostrado pierde rigidez frente al desplazamiento $v_{o(0)}$, mientras que si:

$$\kappa_o^2 > 12 \quad (K_{mont_{y,z}})_o \cos^2 \phi < \frac{3 E_r A_r}{4 L_e} \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{+\infty} \right)_o \cos^2 \phi = \left(K_{est_y}^{-\infty} \right)_o \cos^2 \phi \quad (39)$$

el nudo arriostrado se rigidiza o endurece frente a un desplazamiento $v_{o(0)}$.

Por lo tanto, frente a un desplazamiento lateral y dependiendo de la tensión de montaje suministrada a las riostras, el sistema estructural mástil-riostras podrá rigidizarse o bien flexibilizarse. Cabe destacar que en la mayoría de los casos prácticos, las pretensiones de trabajo establecidas para las riostras hacen que κ_o^2 resulte menor a 6, con lo cual es de esperar después del montaje una pérdida de rigidez del sistema estructural frente a un desplazamiento lateral del mismo.

3.3 Ecuaciones diferenciales

Incorporando a la función Lagrangiana obtenida oportunamente para el modelo 6ED el funcional de energía determinado para la riostra, U_{r_o} , resulta:

$$L_o = V_o + U_{r_o} \quad (40)$$

con lo cual esta última ecuación representa ahora la función Lagrangiana correspondiente al sistema estructural mástil-riostras analizado, y que para el presente caso estático evaluado, resulta ser la energía potencial total del sistema. La aplicación del principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, conduce directamente a las ecuaciones de campo que gobiernan el movimiento del problema analizado (Elsigoltz, 1977). Este principio puede también ser aplicado a problemas estáticos, como el presente, en donde la energía cinética es nula, resultando entonces el Principio de la Mínima Energía Potencial (Clough and Penzien, 1975). El sistema de ecuaciones diferenciales obtenido y que gobiernan el comportamiento estático del mástil reticulado y arriostrado resulta ser el mismo al del modelo simplificado 6ED, dado que las riostras solo dan lugar a una condición de borde (C.B.) particular en el extremo arriostrado, y por ende, el aporte energético de las riostras al modelo continuo MRA-6ED queda incorporado entonces en las C.B. de dicho extremo.

Por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento estático del mástil arriostrado, resulta de reescribir el sistema diferencial correspondiente al modelo 6ED (Guzmán et al., 2012):

$$\begin{aligned} (EA)_o u_o''(x) - 3(p_o + q_{uo}(x)) &= 0 \\ 3E_l J_{ly} v_o''''(x) - (GA)_o (v_o''(x) - \theta'_{wo}(x)) + 3(P_{uo} + p_o x) v_o''(x) + 3p_o v_o'(x) - 3q_{vo}(x) &= 0 \\ 3E_l J_{lz} w_o''''(x) - (GA)_o (w_o''(x) + \theta'_{vo}(x)) + 3(P_{uo} + p_o x) w_o''(x) + 3p_o w_o'(x) - 3q_{wo}(x) &= 0 \\ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta_{wo}''''(x) + \left[e^2 (P_{uo} + p_o x) - (GJ_x)_o \right] \theta_{wo}''(x) + e^2 p_o \theta'_{wo}(x) &= 0 \\ \frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{vo}''(x) - (GA)_o (w_o'(x) + \theta_{vo}(x)) &= 0 \\ \frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta_{wo}''(x) + (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

en donde se ha definido como:

$$\begin{aligned}
 (EA)_o &= 3(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \\
 (GA)_o &= \frac{3}{2} E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \\
 (GJ_x)_o &= \frac{1}{4} E_d A_d e^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\
 (EJ_y)_o &= 3E_l J_{ly} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\
 (EJ_z)_o &= 3E_l J_{lz} + (EA)_o \frac{e^2}{6}
 \end{aligned} \tag{42}$$

llamados respectivamente la rigidez "axial", "transversal", "torsional" y "flexional" global equivalente del sistema respecto a las direcciones principales de su eje baricéntrico. $J_{lp} = J_{ly} + J_{lz}$, resulta ser el momento de inercia polar de cada larguero respecto de sus ejes locales.

3.4 Condiciones de borde

En cuanto a las C.B. para el mástil reticulado arriostrado analizado, se muestran las correspondientes a los corrimientos en la dirección principal de y , en tanto que las restantes pueden ser obtenidas de (Guzmán, 2014):

$$\begin{aligned}
 &\left[\left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + 3(P_{uo} + p_o x) v_o'(x) - 3P_{vo} \right] \mathcal{V}_o(x) \right]_{x=L_l} = 0 \\
 &\left\{ \left[\left[3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo}(x)) + 3(P_{uo} + p_o x) v_o'(x) - 3P_{vo} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \left[(K_{esty})_o v_o(x) + \frac{\sqrt{3}}{4} (K_{esta} - K_{estb}) w_o(x) \right] \cos^2 \phi + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (K_{esta} - K_{estb}) u_o(x) + \frac{e}{4} (K_{esta} - K_{estb}) \theta_{vo}(x) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{\sqrt{3}e}{3} (K_{esty})_o \theta_{wo}(x) \right] \sin \phi \cos \phi \right] \mathcal{V}_o(x) \right]_{x=0} = 0
 \end{aligned} \tag{43}$$

Se observa en la C.B. del extremo arriostrado la incorporación del aporte de la rigidez de las riostras. El término \mathcal{V}_o representa la variación del corrimiento cinemáticamente admisible (compatible con la condición de vínculo) del eje baricéntrico.

4 EJEMPLO ANALIZADO

A partir de la aplicación del modelo continuo desarrollado, MRA-6ED, se evalúa numéricamente la elástica del mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras (ver Fig. 1) cuando en el mismo actúa una carga uniformemente distribuida, $q_{vo} = 75$ N/m, aplicada sobre cada larguero y en la dirección de y . Dicha carga surge de evaluar (ANSI/TIA/EIA-222-F, 1996) la presión estática que aproximadamente ejerce sobre el mástil, un viento con velocidad media

de 35 m/s. A fin de verificar resultados, se realiza una modelación vía elementos finitos (ver Fig. 4), denominada MRA-EF, en la cual fueron modelados cada uno de los elementos del mástil utilizando para los largueros elementos tipo viga (240 por cada larguero), y para las diagonales elementos tipo barra de dos nodos (1 por cada diagonal), en tanto que para las riostras se utilizaron elementos tipo cable (10 por cada riostra). El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 (CSi., 2007).

Las características mecánicas y geométricas del mástil son las que a continuación se indican: longitud de largueros $L_l = 24.0$ m, paso o separación entre diagonales $\Delta = 0.2$ m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 67.69 \times 10^{-5}$ m², inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 17.51 \times 10^{-8}$ m⁴, sección de diagonales $A_d = 16.78 \times 10^{-5}$ m² y módulo de elasticidad $E_l = E_d = 200000$ MPa. En tanto que para las riostras, éstas presentan una sección transversal $A_r = 28.27 \times 10^{-6}$ m², un módulo de elasticidad $E_r = 150000$ MPa, una tensión de rotura $\sigma_r = 1800$ MPa y una densidad del material $\rho_r = 7850$ kg/m³. Por otro lado, las riostras presentan una inclinación $\phi = 60^\circ$, mientras que la disposición en planta de cada una de ellas queda referenciada a partir del ángulo γ .

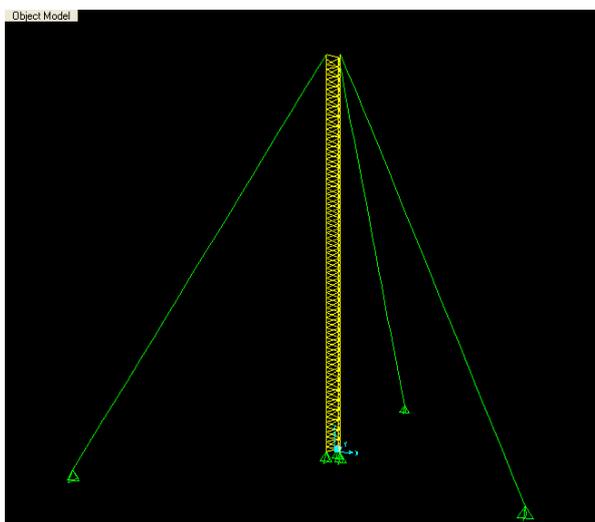


Figura 4: Modelo vía elementos finitos del mástil arriostrado

En cuanto al pretensado inicial o de montaje de las riostras, el mismo se determina de dos maneras: a partir de lo establecido en el Reglamento CIRSOC 306 (CIRSOC 306, 1995), y a partir de lo establecido en la Norma ANSI/TIA/EIA-222-F (ANSI/TIA/EIA-222-F, 1996). Por ello, adaptando la nomenclatura utilizada en dicho Reglamento y Norma a la del presente trabajo, la expresión que define la pretensión de montaje mínima a suministrar a cada una de las riostras y expresada ésta en kN, en ambos casos resulta:

$$H_{o(C-306)}^* = 7100 \left(L_c \cos \phi \right)^{\frac{2}{3}} A_r = 7100 \left(\frac{L_l}{\tan \phi} \right)^{\frac{2}{3}} A_r$$

$$H_{o(A-222)}^* = 0.08 \sigma_r A_r \quad (44)$$

Por lo tanto para el presente ejemplo se tiene que la pretensión de montaje obtenida resulta ser $H_{o(C-306)}^* = 1157.94$ N y $H_{o(A-222)}^* = 4071.50$ N, en donde se observa una gran diferencia en los valores determinados de pretensión dependiendo ello de la reglamentación o norma utilizada.

El valor del coeficiente κ_o^2 para la pretensión $H_{o(C-306)}^*$ resulta de 2.47, en tanto que para la pretensión $H_{o(A-222)}^*$ resulta de 0.06, siendo en ambos casos $\kappa_o^2 < 6$ por lo que es de esperar que frente a un corrimiento lateral del mástil, el nudo arriostrado pierda rigidez traslacional respecto de la de montaje, es decir, que se produzca un "ablandamiento" del sistema estructural.

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos para el desplazamiento máximo de la cima del mástil en la dirección de y , y para los dos estados de pretensión considerados.

Reglamento o Norma	Pretensión en riostras [N]	MRA-6ED [mm]	MRA-EF [mm]
CIRSOC 306	1157.94	69.852	66.637
ANSI/TIA/EIA-222-F	4071.50	37.339	37.364

Tabla 1: Corrimiento v_o máximo de la cima del mástil reticulado en [mm]

5 COMENTARIOS FINALES

En trabajos de los autores desarrollados anteriormente se abordó, respectivamente, el estudio de un mástil reticulado y el estudio de una riostra con un extremo desplazable. A partir de ello, se pudo desarrollar en el presente trabajo un modelo continuo, MRA-6ED, el cual permite evaluar la respuesta estática de un mástil reticulado y arriostrado por un nivel de riostras.

El aporte energético de las riostras al modelo continuo, queda evidenciado en las C.B. del extremo arriostrado y no en el sistema diferencial, debido a la consideración de las riostras como resortes no lineales. Al respecto, se observa que la rigidez provista por las riostras no influye en las C.B. torsionales del mástil, situación que se corresponde con la práctica en donde se adoptan dispositivos especiales para controlar el fenómeno torsional, conocidos comúnmente como estrellas anti-rotoras.

La rigidez del nudo arriostrado en las direcciones principales depende del estado tensional y de la ubicación de las riostras, lo cual hace que frente a corrimientos del mástil alguna riostra se tense mientras que otra se afloje, y con ello, que el mástil pueda rigidizarse o flexibilizarse.

Los resultados numéricos obtenidos en los ejemplos, indican un muy buen desempeño del modelo MRA-6ED desarrollado. La mayor diferencia encontrada en los resultados al comparar el modelo continuo con el modelo discreto MRA-EF, fue del orden del 4 % y correspondió a la determinación de la elástica para el caso de riostras con una pretensión inicial dada de acuerdo a CIRSOC 306. Esto último se debería a que el modelo continuo considera a la riostra como un resorte cuya rigidez fuera obtenida a partir de representar a dicha riostra mediante el modelo parabólico, en tanto que el elemento finito cable del modelo discreto considera para dicha riostra la formulación de la *catenaria*, y como es sabido, mientras menos tensa se encuentre la riostra la diferencia entre la solución parabólica y la de la *catenaria* será mayor.

De acuerdo a la reglamentación o normativa utilizada, la pretensión de montaje a suministrarle a las riostras puede diferir de manera muy importante, en donde por ejemplo para el caso analizado, esta diferencia resultó ser del orden de tres veces y media. Esto último influiría considerablemente en los corrimientos del extremo arriostrado del mástil cuando el mismo se encuentre sujeto a una carga estática aplicada transversalmente sobre los largueros.

AGRADECIMIENTOS

Al CeReDeTeC, al Programa de Becas para Docentes de la UTN, y al Dpto. de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles
Reglamento CIRSOC 306: Estructuras de acero para antenas. INTI, Argentina, 1995.
- Clough R. and Penzien J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, Tokio, Japan, 1975.
- CSi. *SAP2000 v11 Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc., 2007.
- Elsgolts L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, 1977.
- Guzmán M., Filipich C. y Rosales M. Modelo reducido 1D para la representación simplificada de un reticulado espacial. *Mecánica Computacional*, XXXI:2411–2429, 2012.
- Guzmán M., Rosales M. y Filipich C. Análisis de una riostra suspendida con un extremo desplazable. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, 31–45, 2013.
- Guzmán M. *Estática, estabilidad y dinámica de mástiles reticulados con aplicación a estructuras arriostradas*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires, Argentina, 2014.
- Irvine M. *Cable Structures*. Dover Publications, New York, 1992.
- Preidikman S., Massa J. y Rocca B. Análisis dinámico de mástiles arriostrados. *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 6(1):85–102, 2006.
- Structural Standard for Antenna Supporting Structures and Antennas, Telecommunications Industry Association. *ANSI/TIA/EIA-222-F*. Arlington, U.S.A., 1996.