

PROPOSTAS DE ÍNDICES DE DANO APLICÁVEIS A MATERIAIS QUASI-FRÁGEIS AVALIADOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

Rodolfo S. Rodrigues^a, Gabriel Birck^a, Ignacio Iturrioz^a

^a*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, Brasil, rodolfosrodrigues@hotmail.com, <http://www.mecanica.ufrgs.br>*

Palavras-chave: Materiais Quase Frágeis, Fratura, Método dos Elementos Discretos.

Resumo. O processo de dano em materiais quasi-frágeis é caracterizado pela perda de isotropia para certos níveis de carga, a localização de deformações, o efeito cooperativo entre regiões danificadas e a avalanche de rupturas são características particulares na medição do dano neste tipo de material. As características mencionadas criam diferentes formas de dissipação, que não são fáceis de representar utilizando métodos baseados na hipótese dos meios contínuos. No presente trabalho uma versão do método dos elementos discretos formado por barras (DEM) é empregado. Neste método a massa do contínuo é concentrada nos nós, interconectados por barras sem massa que possuem uma lei constitutiva uniaxial bilinear, que é usada para simular a ruptura da estrutura em estudo. A partir da discretização espacial indicada, é possível chegar a uma equação de movimento que é resolvida com um esquema explícito de integração numérica (diferenças finitas centrais). Neste método a fratura e a fragmentação são levadas em conta em forma natural, já que as barras que rompem durante o processo são desativadas, respeitando o balanço energético. A distribuição dos nós permite formar uma treliça tridimensional regular. É possível introduzir aleatoriedade no modelo considerando as propriedades do material como campos espaciais aleatórios com distribuição de probabilidades de Weibull e comprimento de correlação conhecido. No trabalho são analisadas estruturas simples sobre as quais se aplicam solicitações que produzem diversos tipos de dano. Diferentes índices são apresentados para realizar a medição do dano. O desempenho dos índices e a maneira com que eles ajudam na interpretação da evolução do dano são discutidos nesse trabalho.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com [Krajcinovic \(1996\)](#), os métodos propostos para prever o processo de dano em materiais quasi-frágeis podem ser classificados em dois grandes grupos, aqueles baseados na Mecânica dos Meios Contínuos, ou seja, a chamada abordagem clássica, e a abordagem por Modelos Estatísticos. No primeiro caso, Teorias de Plasticidade são estendidas para estudar o processo de dano, levando a procedimentos que encontram sérias dificuldades ao lidar com materiais quasi-frágeis, onde efeitos de escala, localização de defeitos e comportamentos associativos entre nuvens (*clusters*) de defeitos são susceptíveis de ocorrer.

Exemplos da abordagem da mecânica do contínuo são o modelo clássico de [Ottosen \(1975\)](#) e a recente contribuição de [Crawford et al. \(2012\)](#), que propôs um procedimento implementado no pacote comercial de elementos finitos LS-Dyna ([Hallquist, 2007](#)), para modelar dano em materiais quasi-frágeis.

Por outro lado, no segundo grupo (Modelos estatísticos), a versatilidade da abordagem de elementos finitos é perdida, mas em compensação, problemas, tais como localização, evolução do dano anisotrópico e efeitos associativos entre as diferentes partes da amostra, podem ser contabilizados com relativa facilidade. Exemplos da segunda abordagem são fornecidos por [Li e Liu \(2002\)](#) e [Liu e Liu \(2007\)](#), onde foi revisado o uso de modelos discretos formados por partículas em uma distribuição sem malha. Este método foi incorporado à versão 2012 do programa comercial de elementos finitos [ABAQUS \(2012\)](#), mostrando uma tendência perceptível da comunidade científica a recorrer aos métodos estatísticos, como uma alternativa atraente para resolver os problemas em que descontinuidades aparecem durante o processo de dano. Modelos treliçados, dos quais a formulação do Método dos Elementos Discretos formado por barras (aqui referido como DEM) é um caso especial, pertencem a este grupo. Basicamente, o sólido é modelado por meio de uma matriz de elementos uniaxiais, que interligam massas nodais com dois ou três graus de liberdade. A rigidez destes elementos pode ser determinada a partir das propriedades mecânicas do sólido anisotrópico a ser representado pelo DEM. Abordagem semelhante, usando outra versão do modelo de elementos discretos por barras, pode ser consultada em [Krajcinovic e Vujosevic \(1998\)](#), [Sagar e Prasad \(2009\)](#), [Nagy et al. \(2010\)](#), [Schlangen \(1995\)](#) e [Rinaldi \(2011\)](#).

Finalmente, note que os chamados elementos de barra simplesmente servem para visualizar a direção das forças entre as duas massas nodais, e são, assim, úteis principalmente para os engenheiros, mas não existem fisicamente (os elementos de barra não tem massa). A "falha" completa de um elemento simplesmente significa que não há nenhuma força atuando entre os nós correspondentes e isso não significa que há "fratura", a menos que todas as barras que atravessam uma superfície mensurável estejam quebradas.

A versão do modelo de barras utilizada no presente trabalho foi proposta por [Riera \(1984\)](#) para determinar a resposta dinâmica de placas e cascas, sob cargas de impacto, quando a falha ocorre principalmente por cisalhamento ou tração, que é geralmente o caso em estruturas de concreto. O DEM tem sido usado com sucesso para resolver problemas de dinâmica estrutural, tais como cascas submetidas a carregamento impulsivo ([Riera e Iturrioz, 1995, 1998](#)), a recriação da geração e posterior propagação de um sismo ([Dalguer et al. 2001, 2003](#)), o estudo do efeito de escala em concreto ([Rios e Riera, 2004](#)), e em apoios de rocha ([Miguel et al. 2008; Iturrioz et al. 2009](#)). O cálculo dos parâmetros de fratura em problemas estáticos e dinâmicos ([Kosteski et al. 2011, 2012](#)), e no estudo da resistência dos materiais frágeis sob altas taxas de deformação ([Riera et al. 2011](#)).

Na determinação das respostas estruturais com fissura inicial ou alto gradientes de tensão, que resultam em clara localização da fratura, procedimentos bem estabelecidos levam a

resultados que não dependem da malha. No entanto, em elementos submetidos a campos de tensão aproximadamente uniformes um problema até então desconhecido surge na análise de materiais não homogêneos: a necessidade de conhecer a priori o grau de “faturamento” do elemento. Isto também afeta a análise de elementos finitos, em casos em que não há localização clara da fratura, requerendo uma avaliação cuidadosa da energia dissipada por fratura, ou outros mecanismos, durante o processo de carregamento. Critérios experimentais para contabilizar o efeito na análise de fratura dinâmica não-linear de grandes sistemas estruturais foram propostos por [Riera et al. \(2007\)](#).

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo realizar a implementação e a análise de índices de dano no ambiente do DEM.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS EM PROBLEMAS DE FRATURA

O Método dos Elementos Discretos, empregado no presente trabalho, baseia-se na representação de um sólido por meio de um arranjo cúbico de elementos capazes de suportar apenas cargas axiais. A representação do contínuo ortotrópico através dos elementos discretos foi adotada para resolver os problemas estruturais da dinâmica por meio de integração numérica direta explícita das equações de movimento, assumindo a massa concentrada nos nós. Cada nó tem três graus de liberdade, que correspondem aos deslocamentos nodais nas três direções das coordenadas ortogonais. Na [Figura 1a](#) um esquema ilustra o arranjo básico das barras, utilizado nesta abordagem.

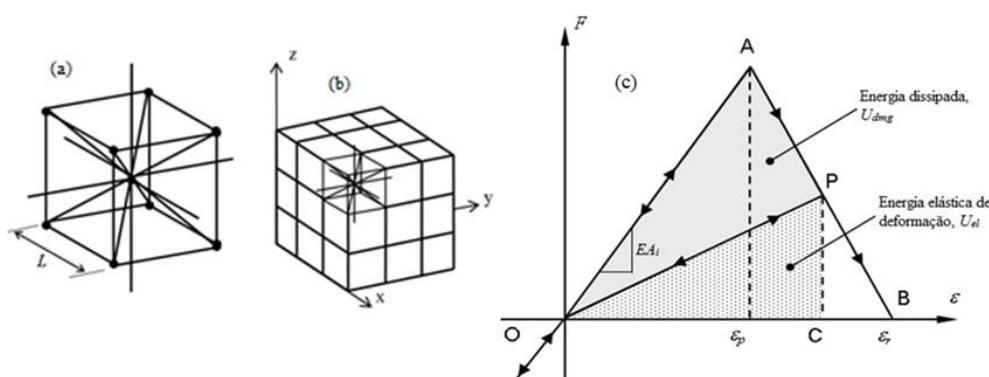


Figura 1: Estratégia de discretização no DEM: (a) módulo cúbico básico, (b) geração de um corpo prismático, (c) lei bilinear utilizada nas barras

As equações que relacionam as propriedades das barras com as constantes elásticas de um meio isotrópico são:

$$\delta = \frac{9\nu}{4-8\nu}, \quad EA_l = EL^2 \frac{(9+8\delta)}{2(9+12\delta)}, \quad EA_d = \frac{2\sqrt{3}}{3} A_l \quad (1)$$

onde E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente, enquanto A_l e A_d representam as áreas dos elementos longitudinais e diagonais. A equação de movimento resultante pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}} + \mathbf{C}\dot{\vec{x}} + \vec{F}(t) - \vec{P}(t) = 0 \quad (2)$$

onde, \vec{x} , $\dot{\vec{x}}$ e $\ddot{\vec{x}}$ denotam os vetores contendo os deslocamentos, as velocidades e as acelerações nodais, respectivamente, \mathbf{M} e \mathbf{C} são as matrizes de massa e de amortecimento, as duas são diagonais e a matriz de amortecimento é proporcional à massa. Os vetores $\vec{F}(t)$ e $\vec{P}(t)$ representam, respectivamente, as forças nodais internas e externas. Obviamente, se \mathbf{M} e \mathbf{C} são

diagonais, Eq. (2) não é acoplada. Então um esquema explícito de diferenças finitas centrais pode ser usado para integrar Eq. (2) no domínio do tempo. Como as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos podem ser contabilizados de maneira natural e eficiente.

2.1 Lei Constitutiva Não-Linear para Dano em Materiais

A lei de amolecimento para os materiais quasi-frágeis proposta por Hillerborg (1978), foi adotada para tratar o comportamento dos materiais quasi-frágeis por meio da Relação Constitutiva Elemental (RCE) triangular para as barras do DEM, apresentada na Figura 1c, que permite a contabilização dos efeitos irreversíveis de nucleação e propagação de trincas. A área sob a curva de força versus deformação (a área do triângulo OAB na Figura 1c) está relacionada com a densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento. Assim, para um dado ponto P na curva força versus deformação, a área do triângulo OPC está ligada com a densidade de energia elástica reversível armazenada no elemento, enquanto que a área do triângulo OAP é proporcional à densidade de energia dissipada pelo dano. Uma vez que a densidade de energia de dano se iguale à energia de fratura, o elemento falha e perde a sua capacidade de suportar carga. Por outro lado, no caso de cargas de compressão o comportamento do material é assumido como sendo linear elástico. Assim, a falha na compressão é induzida por tensão indireta.

Os parâmetros e os símbolos constitutivos, mostrados na Figura 1c, serão definidos abaixo: A força axial do elemento, F , depende da deformação axial, ϵ . A área associada a cada elemento é dada pela Eq. (1) para elementos longitudinais e diagonais. Uma área de fratura equivalente, A_i^f , de cada elemento, é definida de modo a satisfazer a condição de que as energias dissipadas por fratura do contínuo e por sua representação discreta são equivalentes. Com este propósito, a fratura de uma amostra cúbica de dimensões $L \times L \times L$ é considerada. A energia dissipada pela fratura de um cubo contínuo, devido a uma fissura paralela a uma das suas faces é:

$$\Gamma = G_f A = G_f L^2 \quad (3)$$

onde A é a área de fratura real, ou seja, L^2 . Por outro lado, a energia dissipada quando um módulo do DEM, de dimensões $L \times L \times L$, fratura em duas partes, é constituída pelas contribuições de cinco elementos longitudinais (quatro coincidentes com as bordas do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais. Então, a energia dissipada por um módulo do DEM pode ser escrita como se segue (Kosteski et al. 2010):

$$\Gamma_{DEM} = G_f \left(4 \left(\frac{1}{4} \right) c_A + c_A + 4 c_A \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2 \quad (4)$$

O primeiro termo entre parênteses leva em conta os quatro elementos de borda, o segundo termo leva em conta o elemento longitudinal interno, enquanto o terceiro termo representa a contribuição dos quatro elementos diagonais. O coeficiente c_A é um parâmetro de escala usada para estabelecer a equivalência entre Γ e Γ_{DEM} . Assim:

$$G_f L^2 = G_f \left(\frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (5)$$

Do qual resulta que o $c_A = 3/22$. Finalmente, as áreas de fratura equivalentes dos elementos longitudinais e diagonais são:

$$A_l^f = \left(\frac{3}{22} \right) L^2, \quad A_d^f = \left(\frac{4}{22} \right) L^2 \quad (6)$$

Esses valores valem desde que haja uma única grande fratura no elemento. A deformação de falha crítica (ε_p) é definida como a maior deformação alcançada pelo elemento antes do início do dano (ponto A na Figura 1c). A relação entre ε_p e a energia específica de fratura, G_f , é dada em termos da Mecânica Elástica Linear da Fratura como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

onde R_f é o chamado fator de falha, que leva em conta a presença de um defeito intrínseco de um tamanho a . R_f pode ser expresso em termos de a como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (8)$$

onde Y é um parâmetro adimensional que depende tanto da amostra quanto da geometria da fissura. O elemento perde a sua capacidade de suportar de carga quando a deformação limite (ε_r) é alcançada (ponto B na Figura 1c). Este valor deve satisfazer a condição de que, em caso de falha do elemento, a densidade de energia dissipada é igual ao produto da área de fratura do elemento, A_i^f , pela energia específica de fratura, G_f , dividido pelo comprimento do elemento. Assim:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 E A_i}{2} \quad (9)$$

onde o subíndice i é substituído por l ou d , dependendo se o elemento em questão é longitudinal ou diagonal. O coeficiente K_r é uma função das propriedades do material e do comprimento do elemento L_i :

$$K_r = \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \left(\frac{2}{L_i} \right) \quad (10)$$

A fim de garantir a estabilidade do algoritmo, a condição $K_r \geq 1$ deve ser satisfeita. Neste sentido, é interessante definir o tamanho crítico do elemento:

$$L_{cr} = 2 \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad (11)$$

$$\left(\frac{A_l^f}{A_l} \right) = \frac{(3/22)}{\phi}, \quad \left(\frac{A_d^f}{A_d} \right) = \frac{(\sqrt{3}/11)}{\delta\phi} \quad (12)$$

No caso especial de um contínuo isotrópico com $\nu = 0,25$, os valores dos coeficientes acima são $\delta = 1,125$ e $\phi = 0,4$, o que leva a $(A_l^f / A_l) \approx (A_d^f / A_d) \approx 0,34$. Assim, para fins práticos, um único valor do comprimento crítico pode ser utilizado para os elementos longitudinais e diagonais. Portanto, a condição de estabilidade é expressa pela Eq. (13) e a deformação limite pela Eq. (14):

$$K_r = \left(\frac{L_{cr}}{L_i} \right) \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (13)$$

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (14)$$

2.2 A distribuição aleatória dos parâmetros dos materiais no ambiente do DEM

Miguel et al. (2010) e Iturrioz et al. (2009) modelaram as propriedades aleatórias do material definindo a energia específica de fratura, G_f , como um campo aleatório com distribuição de valores extremos do Tipo III (Weibull), dada pela Eq. (15):

$$F(G_f) = 1 - \exp[-(G_f/\beta)^\gamma] \quad (15)$$

onde β e γ são os parâmetros de escala e de forma, respectivamente. O valor médio (μ) e o desvio-padrão (s_t) de G_f são dados por:

$$\mu = \beta[\Gamma(1 + 1/\gamma)] \quad (16)$$

$$s_t = \beta[\Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma)]^{1/2} \quad (17)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (18)$$

onde Γ representa a função de Gama. Para simular valores pseudoaleatórios de G_f , a seguinte expressão foi utilizada:

$$G_f = \beta[-\ln(1 - u)]^{1/\gamma} \quad (19)$$

onde u é um número aleatório com distribuição uniforme de probabilidade no intervalo (0,1). Rotinas para a geração de amostras de u estão amplamente disponíveis. Nas versões anteriores do DEM, tendo o tamanho de um dos elementos (L) igual ao comprimento da correlação do campo aleatório da propriedade de interesse do material, por exemplo, L_c , permitia assumir que os valores simulados não eram correlacionados, simplificando assim o esquema computacional. Esta é, contudo, uma limitação importante, inicialmente abordada por [Rios e Riera \(2004\)](#). Mais tarde, [Miguel et al. \(2008\)](#) adotou o método proposto por [Shinozuka e Deodatis \(1996\)](#) para simular um campo aleatório gaussiano 3D para modelar a propriedade de interesse do material. Uma técnica mais simples foi usada por [Puglia et al. \(2010\)](#). Esta técnica foi usada aqui para simular o campo aleatório 3D que descreve a energia específica de fratura, G_f , que é independente da discretização adotada no DEM. Na implementação usada aqui foi considerado o tamanho do elemento $L_c=2L$.

3 ESTUDO DO DANO EM ESTRUTURAS

De acordo com a teoria do contínuo, os materiais não apresentam imperfeições, como trincas, vazios, etc.. Porém, essa visão teórica do material não corresponde à realidade. Materiais reais apresentam inúmeros defeitos na sua estrutura. Se a estrutura é carregada além de sua carga crítica elástica, esses defeitos crescem e coalescem, e, ao mesmo tempo, novos defeitos aparecem. Este processo é chamado de dano e causa uma mudança nas propriedades do material, o que resulta no decréscimo da sua resistência, até o ponto em que o material perde toda a sua integridade.

O comportamento de um componente com dano ainda pode ser avaliado usando mecânica do contínuo, mas as tensões e deformações macroscópicas devem ser entendidas como médias volumétricas ao longo de um elemento de volume representativo (EVR). Esta forma de estudo apresenta limitações na hora de avaliar o dano, sendo que as formulações mais simples não conseguem capturar o efeito da vizinhança. Modelos mais sofisticados conseguem considerar este efeito, ainda que seja de forma parcial. Sobre essa metodologia de trabalho, pode-se consultar, entre outros, [Seelig \(2006\)](#).

Dependendo do tipo de material estudado, pode-se ter dano dúctil, onde o fenômeno da plastificação é dominante, ou dano frágil, no qual outros tipos de fenômenos dominam o processo de deterioração do componente.

Este trabalho se concentra na caracterização dos processos de dano em materiais quasi-frágeis. Nesse tipo de dano, o mecanismo dominante é a nucleação e o crescimento de microfissuras. Durante o carregamento, a partir de um patamar crítico, as fissuras começam a crescer e se multiplicar, o que leva a um decréscimo na rigidez da estrutura, na direção do carregamento. O comportamento de um material danificado é não linear, devido ao dano crescente. Em um primeiro estágio, se as condições de contorno induzem sobre o componente

uma distribuição uniforme de deformações, o dano pode ser considerado isotrópico e apresentar uma distribuição espacial homogênea. Porém, quando os microdefeitos começam a interagir, tanto a homogeneidade como também a isotropia do dano deixam de ser válidas, acontece a localização da deformação e esses microdefeitos coalescem formando uma fissura principal.

Existem várias maneiras de avaliar o estado de dano de um componente. A mais simples consiste numa avaliação geométrica. Considera-se uma área de seção transversal no material danificado, dA , e seu vetor normal, \mathbf{n} . Com a área de defeito do elemento, dA_D , a quantidade de dano pode ser caracterizada por:

$$w(\mathbf{n}) = \frac{dA_D}{dA} \quad (20)$$

onde w pode ir de 0 (material sem dano) até 1 (material totalmente danificado).

Durante o processo de deformação os defeitos podem crescer em direções preferenciais, que são determinadas pelo estado de tensão. Nesse caso, w depende de \mathbf{n} e o dano é anisotrópico. Entretanto, se os defeitos e sua distribuição espacial não tem nenhuma orientação preferencial, o dano isotrópico prevalece e o estado de dano pode ser caracterizado por um escalar. Uma quantidade de dano significativamente pequena pode ser, geralmente, considerada isotrópica em uma primeira aproximação.

Essa ideia de avaliação geométrica pode ser expandida, utilizando a área efetiva da estrutura ($d\tilde{A} = dA - dA_d = (1-w)dA$) na definição de tensão, em um caso de dano isotrópico.

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{dA}{d\tilde{A}} = \frac{\sigma}{1-w} \quad (21)$$

Para formular leis constitutivas normalmente é assumido que a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ leva as mesmas deformações no material deformado que seriam introduzidas pela tensão clássica no material sem dano (princípio da deformação equivalente). Assim o comportamento tensão-deformação do material danificado pode ser descrito pela lei constitutiva do material sem dano, se as tensões são substituídas pelas tensões efetivas. No caso uniaxial de material elástico linear danificado, por exemplo, se chega a:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-w)E} \quad (22)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material sem dano.

Assim, a quantidade de dano pode ser determinada pela medida do módulo de elasticidade efetivo.

$$E^* = (1-w)E \quad (23)$$

Generalizando a expressão anterior, pode-se escrever a Eq. (24):

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} : (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \quad (24)$$

onde \mathbf{C}^* e \mathbf{C} são, respectivamente, o tensor constitutivo efetivo e o tensor constitutivo do material sem dano, ambos de quarta ordem, \mathbf{I} é o tensor unitário de quarta ordem e \mathbf{D} é o tensor de influência, chamado, nesse caso, de tensor de dano de quarta ordem.

Pode-se ver que a variável de dano escalar w é o caso especial uniaxial do tensor de influência, onde esse último também leva em conta a situação do dano anisotrópico devido a orientações preferenciais de dano.

Independente do comportamento do material, geralmente o dano anisotrópico devido à presença de microfissuras pode ser descrito pelo tensor w_{ij} :

$$w_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{AR} (n_i \Delta u_j + n_j \Delta u_i) dA \quad (25)$$

onde V é volume do elemento de volume representativo, Δu é o salto de deslocamento e n é o vetor normal unitário. A integração é realizada em todo o domínio danificado, A_R , ou seja, em todas as fissuras dentro do volume V .

Apesar de ser chamado de tensor de dano (Seelig, 2006), esse tensor, na verdade, representa a deformação da fase danificada, e não o próprio dano, servindo somente como um indicador indireto do dano da estrutura. Se a microfissura não fecha completamente quando acontece o descarregamento, esse tensor descreve as deformações residuais (inelásticas).

Mesmo não sendo uma medida direta de dano, o tensor w_{ij} pode ser relacionado com o tensor de dano de quarta ordem, \mathbf{D} , através da Eq. (26). Esse último, sim, é uma medida direta do nível de dano da estrutura.

$$w_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (26)$$

Sendo que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - w_{kl}) \quad (27)$$

A Eq. (24) é resultado da combinação da Eq. (26) com a Eq. (27).

Nas expressões anteriores ε_{kl} representa o tensor de deformações totais médias.

4 MEDIDAS DE DANO NO CONTEXTO DO DEM

Nesse trabalho, para fazer a avaliação do dano, foram propostos dois índices, um índice escalar e um índice tensorial.

4.1 Índice Escalar

Diferentes formas de medir o dano de maneira escalar têm sido propostas. Neste trabalho, foi seguido à proposta de Rinaldi (2011). Esse índice consiste na razão entre duas áreas numa curva tensão-deformação global, como é mostrado na Figura 2. Essas áreas são representadas pelos triângulos ABC e ABD.

A área do triângulo ABC representa a diferença da energia elástica entre o carregamento do material sem nenhum dano e o carregamento do material analisado, para um determinado nível de deformação. Já a área do triângulo ABD representa a energia elástica considerando a estrutura sem dano, para o mesmo nível de deformação.

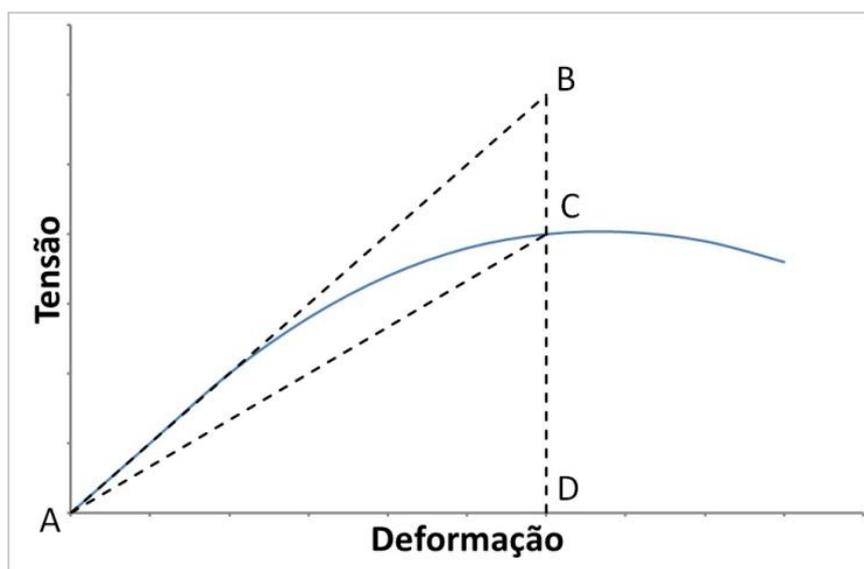


Figura 2: Curva tensão-deformação em uma estrutura genérica

O valor desse índice varia de 0 até 1, da mesma forma que aquele mostrado na Eq. (20), e a evolução desse valor pode ser analisada ao longo da simulação. A diferença entre esse índice e a Eq. (20) é que, como esse índice é definido a partir de medidas de energia, ele considera o dano no componente todo. Porém, dessa forma, perdem-se informações sobre a distribuição do dano nas diferentes regiões do componente.

4.2 Índice Tensorial

Mesmo não sendo uma medida real de dano, a definição do índice tensorial passa pela expressão apresentada para o tensor w_{ij} . Primeiramente o dano será avaliado, de maneira indireta, usando esse tensor, e depois, em um segundo momento, ele será usado como uma ferramenta para obter o tensor de dano de quarta ordem, \mathbf{D} .

Dentro do ambiente do DEM, onde o contínuo é discretizado através de barras, a Eq. (25) fica como é mostrado abaixo.

$$w_{ij} = \frac{1}{2V} \sum (n_i \Delta u_j + n_j \Delta u_i) A_f \quad (28)$$

onde V representa o volume de interesse, Δu representa o vetor com as componentes do salto de deslocamento de uma barra desse volume, n é um vetor unitário que representa a direção dessa mesma barra e A_f representa o quanto da área de fratura da barra já foi "consumida" pelo dano. Os índices i e j podem assumir os valores 1, 2 ou 3, dependendo do eixo que estão representando, x, y ou z, respectivamente.

Nesse ambiente, o salto de deslocamento é determinado através da diferença entre a deformação de falha crítica (deformação do ponto A na Figura 1c) e a deformação instantânea da barra (deformação do ponto P na Figura 1c), multiplicada pelo seu comprimento inicial. Quando a deformação instantânea for menor que a deformação de falha crítica, esse salto assume valor igual a zero. O valor do salto de deslocamento é então decomposto nos eixos x, y e z, formando as componentes do vetor Δu .

Para determinar A_f , a área de fratura total da barra é multiplicada por um fator que determina o quanto essa barra já foi danificada. Observando a Figura 1c, esse fator é definido pela razão entre a área do triângulo OAP e a área do triângulo OAB, dessa forma, o fator assume valor 1 quando a barra em questão falha, fazendo com que A_f se iguale a área de fratura total.

Nesse trabalho, cada módulo cúbico foi selecionado como um volume de interesse. Dessa forma, a Eq. (28) foi aplicada em cada módulo da estrutura, e, em cada aplicação, seu somatório foi realizado sobre todas as barras de um módulo. Como resultado disso, se obteve um tensor para cada módulo do componente.

Tendo esse tensor em cada módulo cúbico, é possível compara-lo com o tensor de deformação local, que também é obtido para cada módulo. Além disso, pode-se fazer, com essa ferramenta, um mapeamento da evolução da deformação da fase danificada, o que serve, indiretamente, como um mapeamento do dano.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para avaliar os índices de dano implementados, foram feitas simulações, no DEM, de uma placa de material heterogêneo. Essa placa, ilustrada na Figura 3, foi construída com 200x200x1 módulos cúbicos, cada um com cinco centímetros de lado, resultando em uma placa de 10 m x 10 m.

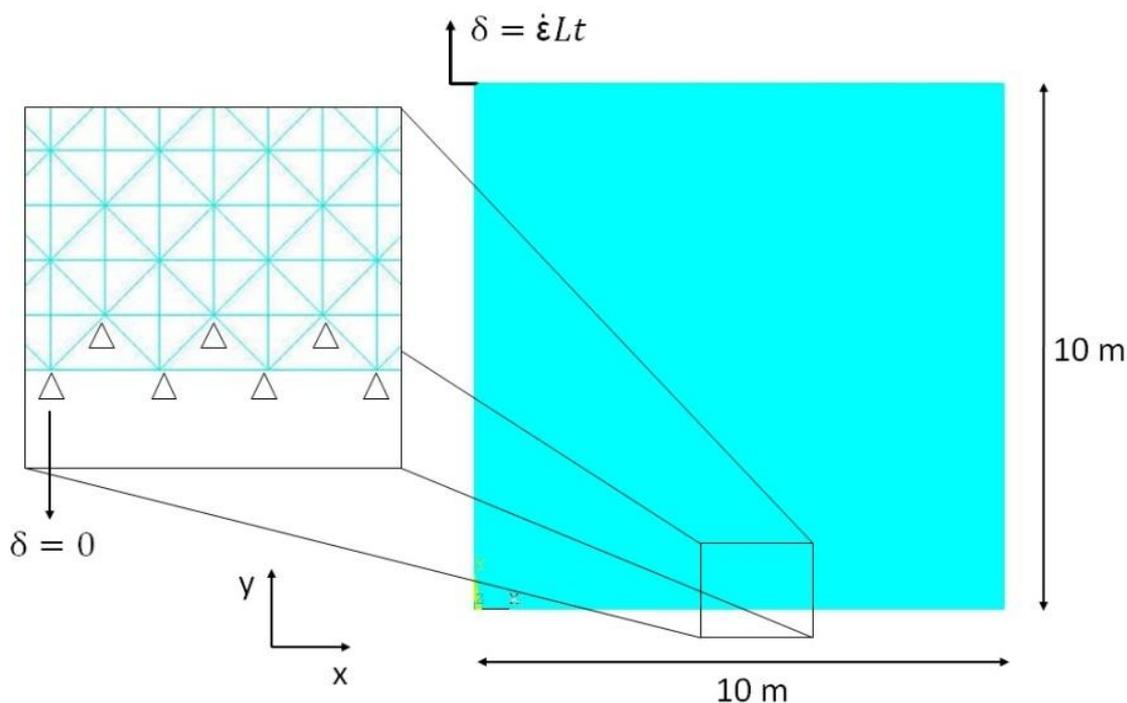


Figura 3: Placa simulada

Essa placa foi carregada usando deslocamento prescrito na direção y , na sua extremidade superior, enquanto o deslocamento, nessa mesma direção, na extremidade inferior, foi restringido, assim como é mostrado na [Figura 3](#). Esse deslocamento prescrito foi aplicado de tal forma que a taxa de deformação, $\dot{\epsilon}$, foi igual a $1,67E-4 \text{ s}^{-1}$, e a simulação foi realizada durante 0,9 s.

As propriedades do material utilizado na simulação são mostradas na [Tabela 1](#).

Propriedades	Valores
E (módulo de elasticidade)	$3,5E10 \text{ N/m}^2$
ρ (densidade)	$2,4E3 \text{ kg/m}^3$
ν (coeficiente de Poisson)	0,25
G_f (energia específica de fratura)	100 N/m
$CV(G_f)$ (coeficiente de variação de G_f)	40%

Tabela 1: Propriedades do material.

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Após a simulação da placa, o primeiro resultado avaliado foi o comportamento tensão versus deformação da estrutura, sendo que, ambas as medidas são globais. Essa relação pode ser observada na [Figura 4](#), onde se percebe que o material comporta-se como esperado, de maneira quasi-frágil, apresentando falha catastrófica para uma deformação de $8,75E-5$ (com tensão de $2,02E6 \text{ Pa}$).

A [Figura 4](#) também indica seis níveis de deformação global, que serão usados, a seguir, como referência.

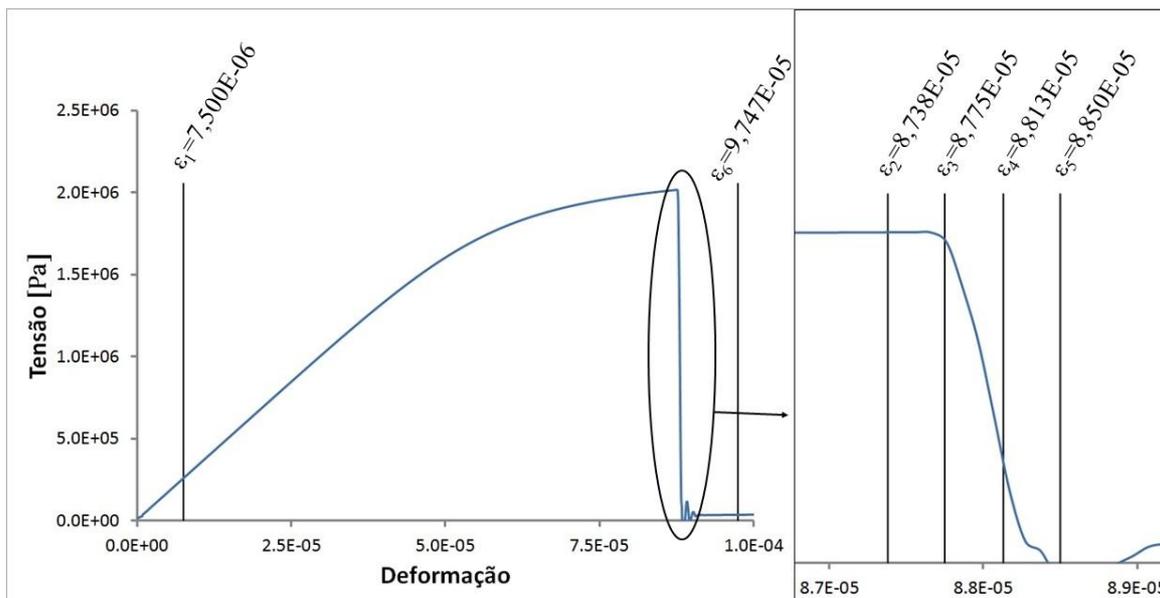


Figura 4: Comportamento tensão-deformação da estrutura

Na Figura 5 se observa a relação entre as energias envolvidas na simulação e a deformação global da estrutura. Nessa figura, a energia cinética foi aumentada ($\times 10000$), para facilitar a sua visualização.

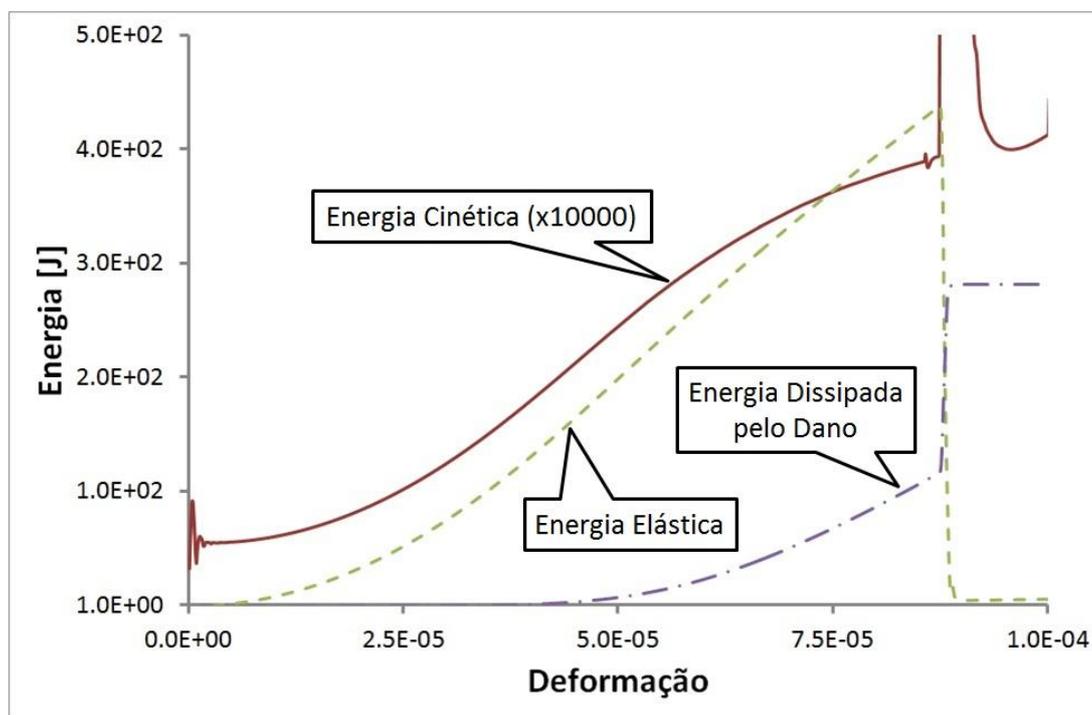


Figura 5: Curva das energias em função da deformação global

6.1 Índice Escalar

O índice escalar pode ser avaliado pela Figura 6, onde se observa a sua evolução. Através desse gráfico é possível mostrar, novamente, o nível de deformação em que a falha acontece.

Nessa figura, juntamente com o índice escalar, a curva tensão-deformação da estrutura foi plotada, fora de escala, para ajudar na visualização da evolução do dano.

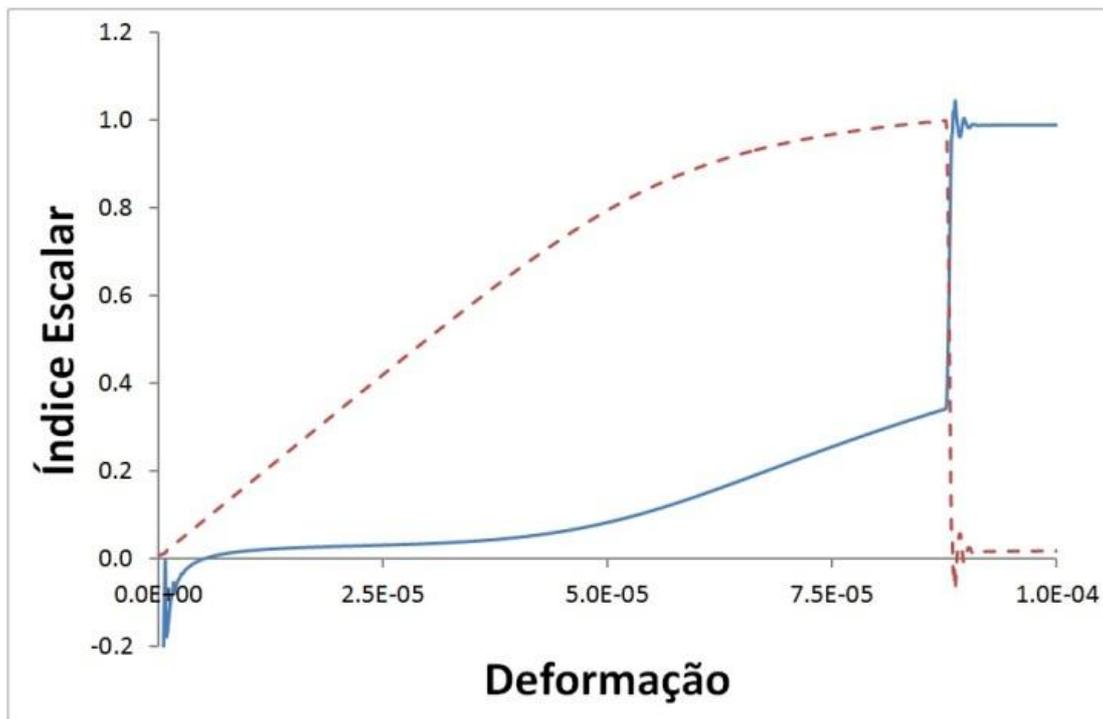


Figura 6: Evolução do índice escalar

Depois da falha o valor desse índice se manteve igual a 1, a não ser pelos primeiros momentos depois da falha, quando seu valor sofreu influência da vibração causada pela falha catastrófica.

Ainda se observa, nessa figura, uma oscilação no começo da simulação, que foi causada pelo início do movimento da extremidade superior da placa. Essas duas oscilações são, também, ilustradas pela energia cinética, mostrada na [Figura 5](#).

6.2 Índice Tensorial

Como já foi mencionado anteriormente, esse índice permite a criação, de forma indireta, de um mapa do dano da estrutura, sendo possível, através disso, observar a nucleação de microfissuras e a localização do dano. Na [Figura 7](#) cria-se esse mapa, para cada nível de deformação global que foi mostrado na [Figura 4](#), através da plotagem da deformação da fase fissurada de cada módulo cúbico.

Com esse mapeamento é possível perceber, novamente, o caráter espontâneo da falha, que é característico de materiais quasi-frágeis, quando solicitados por um campo de tensões uniformes. Observa-se, também, como o dano começa tendo uma distribuição volumétrica, ou seja, sendo distribuído uniformemente sobre a estrutura, e que, à medida que o nível de dano progride, a sua localização acontece.

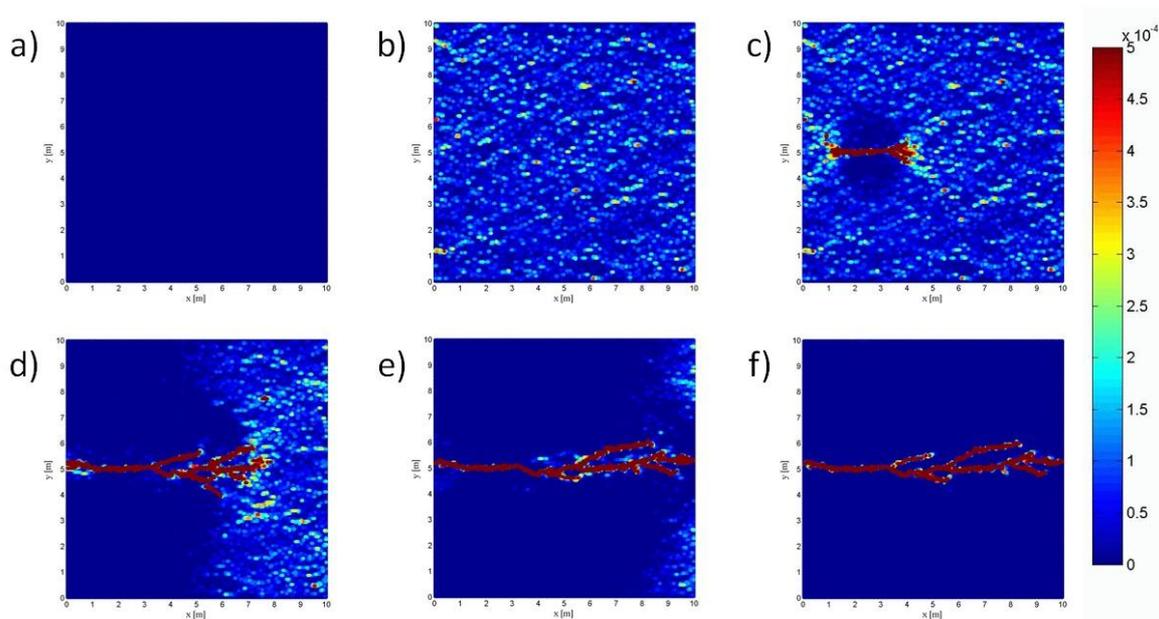


Figura 7: Mapa do dano nos níveis de deformação global de referência: (a) ϵ_1 , (b) ϵ_2 , (c) ϵ_3 , (d) ϵ_4 , (e) ϵ_5 , (f) ϵ_6

Ainda é possível usar esse índice para avaliar o dano em um módulo cúbico específico da estrutura. A Figura 8b faz essa análise comparando w_{22} (uma componente do tensor w_{ij}) com ϵ_{22} (uma componente do tensor de deformação local), para um módulo que é atingido pela fissura. Essa comparação é feita em função da deformação global da estrutura.

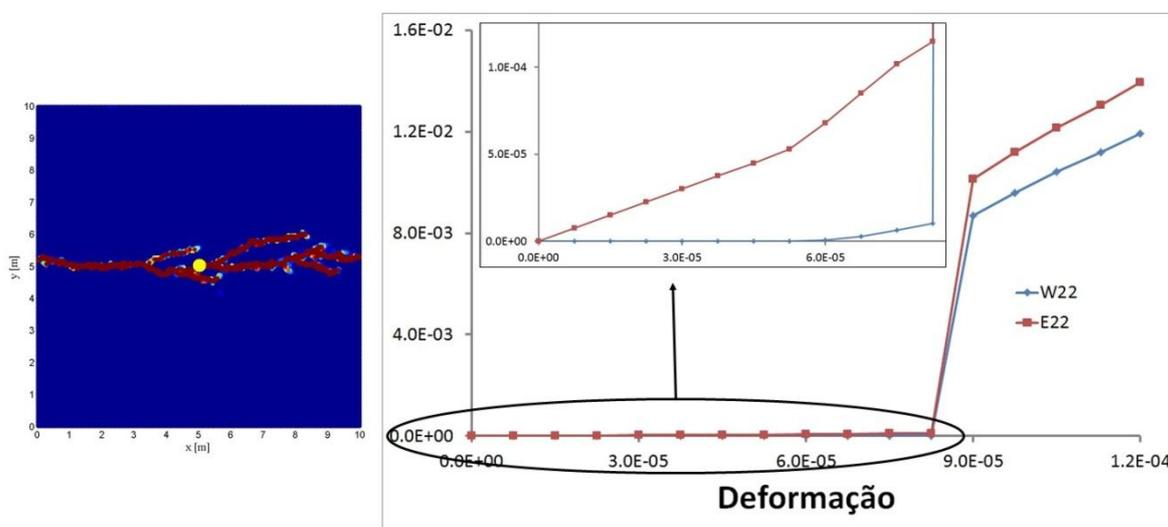


Figura 8: (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ϵ_{22} e w_{22} no módulo indicado

A Figura 8a indica a posição, através de um ponto amarelo, desse módulo cúbico na estrutura.

Observa-se o grande salto que aparece depois que a estrutura falha. Além do fato de que, depois da falha, essa componente do tensor w_{ij} cresce junto com a deformação local.

No detalhe da Figura 8b ainda se observa que, no início da simulação, quando a deformação ainda é elástica, o valor de w_{22} é igual a zero.

A mesma análise é feita para um módulo que está longe do caminho da fissura, e isso é apresentado na Figura 9b.

Como se pode observar, quando a falha começa, a região fora da fissura é descarregada. Esse descarregamento causa uma queda, até zero, no valor da componente nos dois tensores (w_{ij} e ϵ_{ij}), isso é esperado, já que o comportamento do material não inclui plasticidade. A queda no valor do tensor w_{ij} representa que a fissura, que estava aparecendo naquela região, foi "fechada" pelo descarregamento da estrutura, isso não significa que a placa não está mais danificada, apenas quer dizer que a deformação da fase danificada, naquela região, agora é zero.

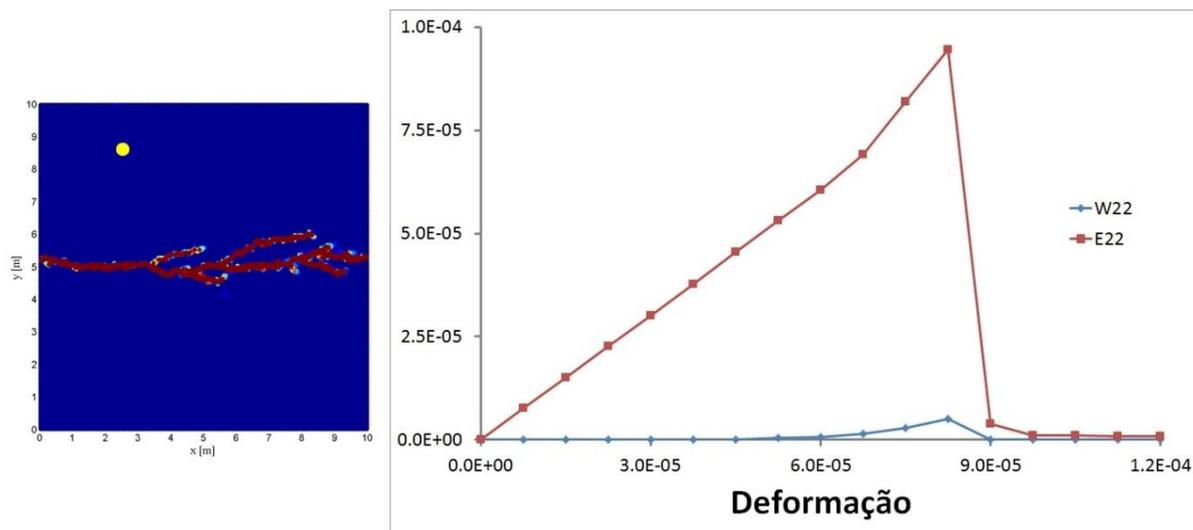


Figura 9: (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ϵ_{22} e w_{22} no módulo indicado

A Figura 9a indica a posição, através de um ponto amarelo, desse módulo cúbico na estrutura.

Para mostrar que aquela região continua danificada mesmo depois do descarregamento, pode-se observar a Figura 10, que mostra a curva força-deformação de uma das barras do módulo cúbico apresentado na Figura 9a.

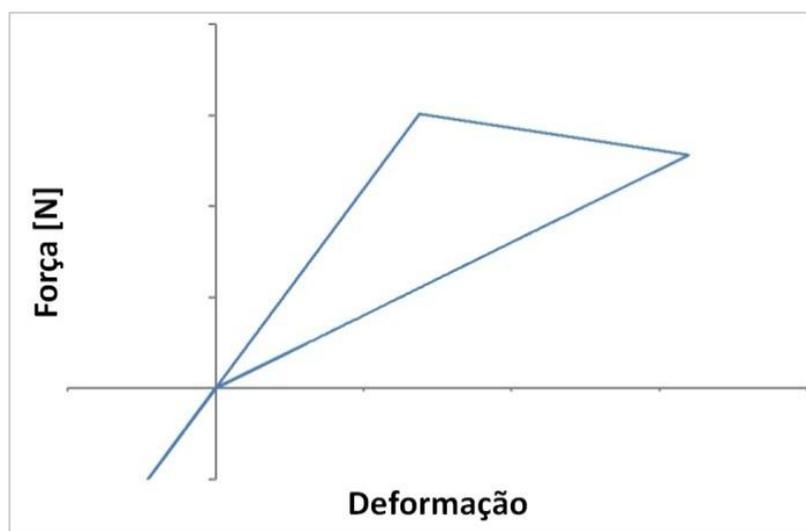


Figura 10: Curva força-deformação para uma das barras do módulo cúbico mencionado

Nessa figura é possível ver que o descarregamento acontece por um caminho diferente do que o carregamento, o que mostra que a rigidez da barra, à tração, ficou menor depois do fim da simulação, isso indica que a barra esta danificada. Ainda se observa na figura que, devido à vibração causada pela falha da estrutura, essa barra chega a receber solicitações de compressão, até se estabilizar e ficar totalmente descarregada.

Com essa metodologia, já é possível ter uma medida qualitativa do comportamento do dano na estrutura. Porém, a partir do tensor w_{ij} , pode-se obter uma medida quantitativa do dano, ou seja, pode-se obter o tensor de dano de quarta ordem. Para isso, é necessário aplicar, numa estrutura que já foi danificada, os carregamentos mostrados na Eq. (29).

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde β é um parâmetro de carregamento, que deve assumir um valor suficientemente pequeno para que a estrutura não sofra nenhuma nova danificação. No caso de uma análise 2D (em x e y), só são necessários o primeiro, o segundo e o quarto carregamento.

Cada carregamento irá gerar como resposta um tensor w_{ij} . Com a aplicação desse resultado, juntamente com o tensor de deformação média, na Eq. (26), se obtêm as componentes do tensor **D**. Mais detalhes sobre esse tipo de procedimento podem ser encontrados em [Zohdi](#).

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho consistiu em propor e avaliar diferentes medidas de dano. Nesse contexto foi possível concluir que:

- A escolha do método de análise foi correta, tendo em vista que esse método é especialmente útil na análise de dano, uma vez que consegue representá-lo de maneira simples e direta;
- O índice escalar proposto se mostrou útil para uma análise global do dano, apresentando o crescimento dele na estrutura. Permitindo uma avaliação global do dano na estrutura estudada;
- Com o tensor w_{ij} foi possível mostrar tanto a evolução do dano, mesmo que de forma indireta, como também detectar o efeito de localização. Utilizando esse tensor será possível obter o tensor de quarta ordem **D**, em diferentes estágios do processo simulado.

Como continuação do presente trabalho, espera-se realizar esse procedimento e obter o tensor **D**.

8 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio do CNPq e da CAPES (Brasil).

REFERÊNCIAS

- ABAQUS/Explicit, Version 6.x, Dassault Systèmes Americas Corp., 2012.
- Crawford, J.E., Wu, Y., Magallanes, J.M., Lan, S., Modeling of concrete materials under extreme loads. Em: Hao, H., Li, Z. (Eds), *Advances in protective Structures Research*. CRC Press, London, 2012.
- Dalguer, L.A., Irikura, K., Riera, J.D., Chiu H.C., The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91:1112-1127, 2001.

- Dalguer, L.A., Irikura K., Riera, J.D., Simulation of tensile crack generation by three-dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake. *Journal of Geophysical Research*, 108(B3):2144, 2003.
- Hallquist, J.O., LS-DYNA – Keyword User’s Manual, Version 971, Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2007.
- Hillerborg, A., A model for fracture analysis. *Division of Building Materials, Lund Institute of Technology*, TVBM-3005:1-8, 1978.
- Iturrioz, I., Miguel, L.F.F., Riera, J.D., Dynamic Fracture Analysis of Concrete or Rock Plates by Means of the Discrete Element Method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6:229-245, 2009.
- Kosteski, L.E., Riera, J.D., Iturrioz, I., Consideration of Scale Effects and Stress Localization in Response Determination Using the DEM. *Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010*, XXIX:2785-2801, 2010.
- Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Batista, R.G., Cisilino, A.P., The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. *Engineering Computations*, 6:765–787, 2011.
- Kosteski, L.E., Barrios, R., Iturrioz, I., Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International Journal of Fracture*, 174:139–161, 2012.
- Krajcinovic, D., *Damage mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 1996.
- Krajcinovic, D., Vujosevic, M., Strain localization - Short to long correlation length transition. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31):4147–4166, 1998.
- Miguel, L.F.F., Riera, J.D., Iturrioz, I., Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(15):1857-1881, 2008.
- Miguel, L.F.F., Iturrioz, I., Riera, J.D., Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 56:1-16, 2010.
- Nagy, E., Landis, E.N., Davids, W.G., Acoustic emission measurements and lattice simulations of microfracture events in spruce. *Holzforschung*, 64:455–461, 2010.
- Li, S., Liu, W.K., Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Reviews*, 55(1):1-34, 2002.
- Liu, G.B., Liu, M.B., *Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- Ottosen, N.S., Failure and elasticity of concrete. *Danish Atomic Energy Commission, Research Establishment Risø, Risø-M-1801*, 1975.
- Puglia, B.V., Iturrioz, I., Riera, J.D., Kosteski, L., Random field generation of the material properties in the truss-like discrete element method. *Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010*, XXIX:6793-6807, 2010.
- Riera, J.D., Local effects in impact problems on concrete structures. *Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants*, Vol. 3, 1984.
- Riera, J.D., Iturrioz, I., Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:417–426, 1995.
- Riera, J.D., Iturrioz, I., Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. *Nuclear Engineering and Design*, 179:135-144, 1998.
- Riera, J.D., Iturrioz, I., Size effects in the analysis of concrete or rock structures. *International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 19)*, Toronto, Canada, 2007.

- Riera, J.D., Miguel, L.F.F., Iturrioz, I., Strength of Brittle Materials under High Strain Rates in DEM Simulations. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 82:113-136, 2011.
- Rinaldi, A., Advances in statistical damage mechanics: New modeling strategies. Em: Voyiadjis, G.Z. (Ed.), *Damage Mechanics and Micromechanics of Localized Fracture Phenomena in Inelastic Solids*. CISM Course Series, Springer, 2011.
- Rios, R.D, Riera, J.D., Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, 26:1115-1125, 2004.
- Sagar, R.V., Raghu Prasad, B.K., Modeling heterogeneity of concrete using 2D lattice network for concrete fracture and comparison with AE study. *Sadhana*, 34(6):865-886, 2009.
- Schlangen, E., van Mier, J.G.M., Crack propagation in sandstone: Combined experimental and numerical approach. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 28(2):93-110, 1995.
- Seelig, T., *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics*. Mechanical Engineering Series, Springer, 2006.
- Shinozuka, M., Deodatis, G., Simulation of multidimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation", *Applied Mechanics Reviews*, 49(1): 29-53, 1996.
- Zohdi, T.I., *Computational modeling and design of new random microheterogeneous materials*. CISM Course Notes.