

## ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS FORMADOS POR FIBRAS CORTAS

**Bruno Uberti<sup>a</sup>, Ricardo Barrios D`ambra<sup>a</sup>, Ignacio Iturrioz<sup>b</sup> y Wang Chong<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Grupo de Mecánica Computacional, Universidad Nacional del Nordeste, Las Heras 727, 3500 Resistencia, Argentina, bru\_no8@hotmail.com, <http://ing.unne.edu.ar/mecap/>*

<sup>b</sup>*Grupo Mecánica Aplicada, Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Sarmiento Leite 425, 90050170 Porto Alegre, Brasil, ignacio@mecanica.ufrgs.br, <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/~ignacio/>*

<sup>c</sup>*Grupo de Pesquisa em Estruturas e Construção Civil, Universidad de Pampa, Tirajú 810, Alegrete 97546550, Brasil, <http://porteiros.unipampa.edu.br/alegrete/>*

**Palabras Clave:** Método de los Elementos Discretos, Compuestos, Mecánica de Fractura.

**Resumen.** Los materiales compuestos han surgido como respuesta a las cada vez más exigentes condiciones de proyecto. Los mismos consisten en la combinación de dos o más materiales distintos con el fin de conseguir un nuevo material cuyas propiedades resulten superiores (más fuertes, tenaces o durables) que las de cada uno de sus componentes en forma individual. Estos materiales, encuentran constantemente nuevas aplicaciones en el campo de reparaciones y readaptaciones de estructuras en la construcción civil, y también son ampliamente usados en otros campos como ser el automotriz, naval, aeronáutico, aero-espacial, industrias eólicas, e incluso en aplicaciones recreativas.

Existen dos motivaciones principales para el desarrollo de modelos computacionales que relacionen los parámetros microestructurales con el comportamiento mecánico del compuesto. Una de ellas es conducir la optimización del comportamiento de materiales por medio del ajuste de tipos y formas de los componentes constituyentes; y la otra es predecir la respuesta mecánica final de los productos fabricados con dichos materiales. Trabajos recientes demuestran las limitaciones que en muchos casos presentan los criterios de falla clásicos, y la necesidad de avanzar en el desarrollo de nuevas propuestas de criterios de falla que involucren nuevas variables macro mecánicas que los mecanismos de falla a nivel micro mecánico revelen como representativas. Alineado con lo aquí expuesto, en el presente trabajo se estudia el comportamiento mecánico de un material compuesto formado por fibras cortas distribuidas aleatoriamente, utilizando una versión del método de los elementos discretos formados por barras, aquí denominado como DEM (Discrete Element Method). Este método permite simular el comportamiento mecánico hasta la ruptura de sistemas que fallen en forma frágil o cuasi-frágil. Utilizando el DEM, en este trabajo se analiza la respuesta de un sistema constituido por una única fibra que vincula una matriz fisurada para diferentes ángulos entre la fibra y la fisura y la orientación de la carga aplicada. Estas respuestas son posteriormente superpuestas con la metodología presentada originalmente por otros autores. Posteriormente se discuten las conclusiones sobre los resultados obtenidos así como las potencialidades de la metodología empleada.

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha perfeccionado de manera considerable una nueva generación de materiales destinados a sustituir a los materiales convencionales ya existentes; estos nuevos materiales son llamados materiales compuestos, los cuales, se constituyen por la acción combinada de dos o más elementos distintos, que permiten mejorar la combinación de características mecánicas tales como la rigidez, fragilidad, tenacidad, capacidad de absorción de energía de deformación, dureza, comportamiento post-fisuración, la resistencia a las condiciones ambientales y a altas temperaturas. Para poder desarrollar estos nuevos materiales, es necesario conocer las propiedades mecánicas, constitución física y química de los materiales y la forma en que se pueden combinar.

Según [William y Callister \(2002\)](#) los materiales compuestos son una alternativa efectiva en diversos escenarios y están formados por matriz frágil reforzada con fibra dúctil, y las combinaciones de polímeros, vidrios cerámicos, materiales cerámicos con la adición de cristales, mortero reforzado con fibras de polipropileno y hormigón reforzado con fibras.

La utilización de fibras para refuerzo de hormigones de alta resistencia ha tenido resultados muy satisfactorios al ser sometidos a altas temperaturas, y permiten obtener una mayor eficiencia en los resultados económicos de grandes obras de la ingeniería. Esta nueva tecnología de construcción permite que el hormigón pueda aumentar considerablemente su calidad en muy poco tiempo, cuestión que no se logra con ningún otro material estructural.

Muchos compuestos están formados por sólo dos fases en el que uno se denomina matriz, que es continua y rodea a la otra fase que es la fase dispersa. Estos compuestos se basan en las propiedades de las fases que lo constituyen, así como también en la cantidad relativa y la geometría de la fase dispersa. Los mecanismos fundamentales de aumento de tenacidad son por microfisuras, por partículas y por fibras, siendo estas últimas las que mayor efectividad generan en la mejora de resistencia a la fractura, durabilidad, ductibilidad, resistencia al impacto y resistencia a la tracción en flexión, siempre que el tipo de fibra utilizada sea apropiada y en dosis adecuadas.

El aumento de la tenacidad está directamente relacionado con la tensión proveniente de las fibras y con la apertura de las fisuras, basadas en diversos procesos y efectos tales como debonding (despegue) de la interfaz entre fibra-matriz, pull-out (fibra siendo extraída de la matriz) o slip (deslizamiento), spalling (fragmento de la matriz en la región de salida de la fibra de la matriz) y al tensión aparente (tensión de ruptura de la fibra) soportada antes de la ruptura.

Los materiales compuestos son utilizados en muchos ámbitos de la vida cotidiana y también se ha expandido en la construcción civil. Algunas aplicaciones que podemos mencionar son: placas de fibrocemento, plásticos reforzados con fibra de vidrio, estructuras de hormigón, pavimentos rígidos, etc.

El mecanismo de aumento de tenacidad consiste en que la matriz transfiere parte de la tensión aplicada a las fibras, que resisten una porción de la carga; por lo tanto el grado de refuerzo, entonces, dependerá de un enlace fuerte en la interfaz fibra-matriz. La [Figura 1](#) muestra las fibras Wirand® ([Maccaferri, 2002-2007](#)) agregadas al concreto, en calidad de una armadura tridimensional que redistribuye las tensiones aplicadas al elemento estructural, restringiendo la propagación de grietas y aumentando la resistencia después de la fisuración de dicho elemento.

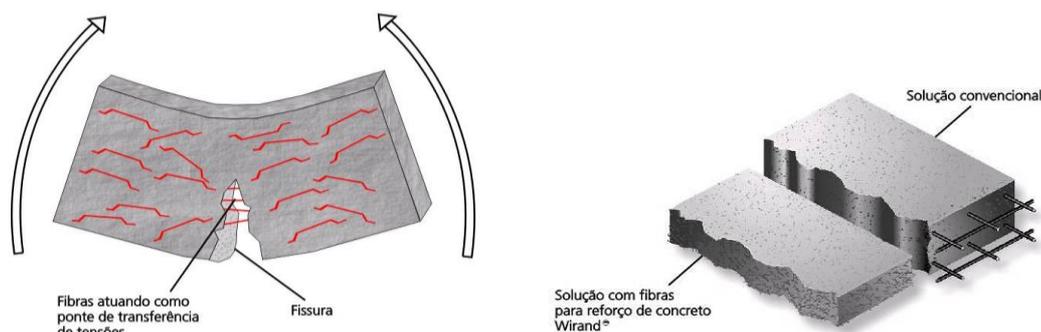


Figura 1: Maccaferri (2002-2007). Fibras de acero reforzando hormigón.

Para lograr que el compuesto fibra-matriz tenga un rendimiento estructural mayor que la matriz, será necesario que el módulo de elasticidad de la fibra sea mayor que el de la matriz, por lo tanto tendrá una resistencia a la tracción elevada. Esto último hace necesario que la adherencia entre ambos materiales sea alta para evitar el arrancamiento de las fibras antes de que la resistencia sea movilizada.

En este trabajo se tratará principalmente los materiales compuestos reforzados con fibras cortas, siendo el objetivo principal, mostrar las posibilidades del Método de los Elementos Discretos formado por barras (DEM) en la determinación de la tenacidad a la fractura de materiales compuestos, que servirá para determinar dicha condición en un material bifásico. Es necesario remarcar que a través de la determinación de la tenacidad a la fractura del material compuesto se pretende determinar la influencia de la segunda fase, fibras, sobre la propagación de fisuras.

Se utiliza como segunda fase fibras de Spectra 900 (Li et al, 1991). Las cuales poseen una de las más elevadas relaciones deformabilidad/peso entre las fibras hechas por el hombre. Su elevada tenacidad lo hace 15 veces más fuerte que el acero, siendo más durable que el poliéster.

## 2 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

En la formulación del método de los elementos discretos empleada en este trabajo (MED), el continuo es representado por medio de un arreglo especial de barras con masas concentradas en sus nodos. En particular, la estrategia de discretización mostrada en las Figuras 2a y 2b es debida a Nayfeh and Hefzy (1978). La misma usa un módulo básico formado por 20 elementos de barra y 9 nodos donde los elementos están interconectados. Cada nodo tiene tres grados de libertad de desplazamiento. En el caso de un material elástico isotrópico, la rigidez axial por unidad de longitud de los elementos longitudinales (aquellos que definen las aristas del módulo y los que conectan los nodos localizados en el centro del módulo) en el modelo discreto equivalente,  $E_l^A$ , es

$$E_l^A = A_l E = \phi EL^2, \quad (1)$$

Dónde  $A_l$  es el área de la sección transversal del elemento,  $L$  es la longitud del módulo cúbico y  $E$  es el módulo de Young del sólido que está siendo discretizado. Similarmente, la rigidez axial por unidad de longitud de los elementos diagonales,  $E_d^A$ , es

$$E_d^A = A_d E = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi EL^2. \quad (2)$$

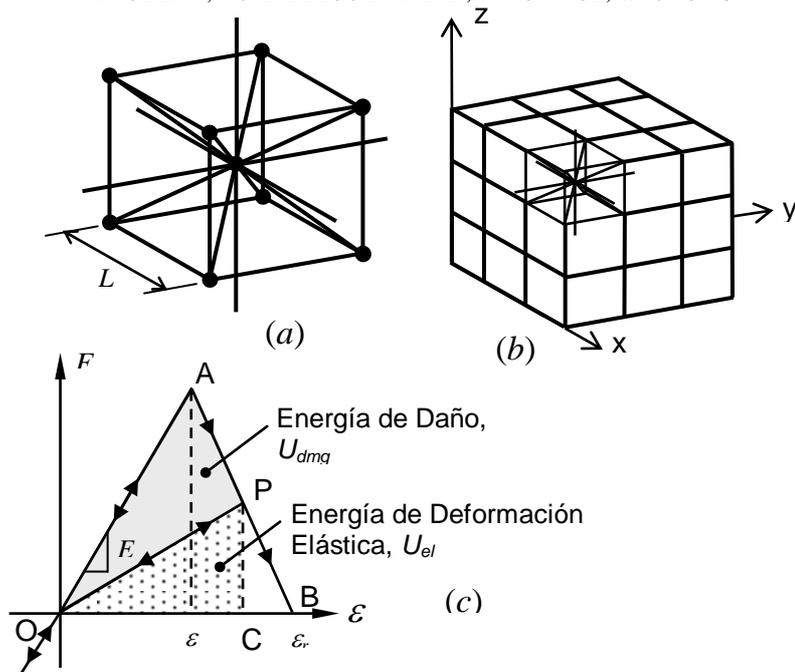


Figura 2: Estrategia de discretización del MED: (a) módulo cúbico básico, (b) generación del cuerpo prismático, (c) relación constitutiva bilineal.

El coeficiente  $2/\sqrt{3}$  en ecuación (2) tiene en cuenta la diferencia de longitud entre los elementos longitudinales y diagonales, esto es,  $L = 2/\sqrt{3} \cdot L_d$ . Para sólidos aproximadamente isotrópicos,  $\phi = (9 + 8\delta)/(18 + 24\delta)$  y  $\delta = 9\nu/(4 - 8\nu)$ , donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del sólido.

Es importante puntualizar que para  $\nu=0.25$ , la correspondencia entre el sólido equivalente discreto y el continuo isotrópico es completa. Por otro lado, para valores de  $\nu \neq 0.25$  aparecen discrepancias en los términos de corte. Es interesante notar que si bien los modelos tipo reticulado no pueden representar un continuo localmente isotrópico, puede argumentarse que en las aplicaciones ingenieriles prácticas no existen continuos localmente perfectamente isotrópicos. La isotropía en sólidos es una propiedad volumétrica que refleja la distribución aleatoria de la orientación de los elementos constituyentes.

Detalles acerca del cálculo de la rigidez axial de la sección transversal equivalente para los elementos longitudinales y diagonales dadas en las ecuaciones (1) y (2) pueden encontrarse en los trabajos de [Nayfeh and Hefzy \(1978\)](#) y [Dalguer et al \(2001\)](#).

El método es montado mediante el cumplimiento de la segunda ley de Newton en cada nodo del modelo. Esto resulta en el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}(t) - \mathbf{P}(t) = 0 \quad (3)$$

Dónde  $\mathbf{X}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  y  $\ddot{\mathbf{X}}$  son los vectores conteniendo los desplazamientos nodales, velocidades y aceleraciones; y  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  son las matrices de masa y amortiguamiento, respectivamente. Los vectores  $\mathbf{F}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  contienen las cargas nodales internas y externas.

Como  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  son diagonales, las ecuaciones en la expresión (3) son no acopladas, y pueden ser fácilmente integradas en el dominio del tiempo usando un esquema de diferencias finitas explícito.

Vale la pena señalar que como las coordenadas son actualizadas en cada paso de tiempo, grandes desplazamientos son tenidos en cuenta naturalmente.

La estabilidad del esquema de integración es asegurada con la siguiente limitación en el

incremento de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{0.6L}{C_p} \quad (4)$$

Dónde  $C_p$  es la velocidad de propagación de la onda longitudinal,

$$C_p = \sqrt{E/\rho} . \quad (5)$$

La convergencia del MED para elasticidad lineal e inestabilidad elástica fue verificada por [Hayashi \(1982\)](#).

## 2.1 Modelo constitutivo no lineal para daño del material

### 2.1.1 El modelo bi-lineal

[Rocha et al \(1991\)](#) extendieron el MED para resolver problemas de fractura frágil mediante la introducción de la relación constitutiva bilineal (RCE) ilustrada en la [Figura 2c](#). Esta ley constitutiva tiene como objetivo capturar los efectos irreversibles de la nucleación y propagación, por lo tanto, tiene en cuenta la reducción de la capacidad de carga del elemento. El área bajo la curva fuerza vs. deformación (el área bajo el triángulo OAB en [Figura 2c](#) es la densidad de energía de deformación necesaria para fracturar el área de influencia del elemento. Así, para un punto P dado en la curva fuerza vs. desplazamiento, el área del triángulo OPC representa la densidad de energía elástica reversible almacenada en el elemento, mientras que el área del triángulo OAP es la densidad de energía de fractura disipada. Una vez que la densidad de energía de daño disipada iguala a la energía de fractura, el elemento falla y pierde su capacidad de carga. Por otro lado, en el caso de cargas de compresión el material se comporta como elástico lineal. Así, la falla en compresión es inducida por tracción indirecta.

Los parámetros constitutivos y símbolos introducidos en la [Figura 2c](#) son (ver [Rocha et al, 1991](#); y [Riera and Rocha, 1989](#)):

- Fuerza, F: fuerza axial en el elemento, función de la deformación longitudinal.
- Rigidez Elemental,  $E_i^A$  : dependiendo de si es considerado un elemento longitudinal o diagonal se adoptan los valores para  $E_l^A$  o  $E_d^A$  , ver ecuaciones 1 y 2.
- Longitud del Módulo del MED,  $L$  .
- Energía específica de fractura,  $G_f$  : energía de fractura del material por unidad de área, el cuál es coincidente con la energía de fractura del material,  $G_c$  .
- Área del Elemento; A: dependiendo de si es considerado un elemento longitudinal o diagonal los valores de  $A_l$  o  $A_d$  , deberían ser adoptados.
- Área de fractura Equivalente,  $A_i^f$  : el valor de este parámetro impone que la condición de energía disipada por la fractura del material continuo y su representación discreta sean equivalentes. Con este propósito la fractura de una muestra cúbica del material de dimensiones  $L \times L \times L$  es considerada.

La energía disipada por la fractura de una muestra continua del material debida a una fisura paralela a una de sus caras es

$$\Gamma = G_f \Delta = G_f L^2 \quad (6)$$

Dónde  $\Delta$  es el área de fractura real. Por otra lado, la energía disipada cuando el módulo del MED de dimensiones  $L \times L \times L$  se fractura en dos partes tiene en cuenta la contribución de

cinco elementos longitudinales (cuatro coincidentes con las aristas del módulo y una interna y cuatro elementos diagonales, ver [Figura 2a](#)). Entonces, la energía disipada por el módulo del MED puede escribirse como sigue

$$\Gamma_{\text{MED}} = G_f \left( 4 \cdot 0.25 \cdot c_A + c_A + 4 \cdot c_A \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2, \quad (7)$$

Dónde el primer término en la suma tiene en cuenta los cuatro elementos del borde (el coeficiente 0.25 es debido al hecho de que cada elemento es compartido por cuatro módulos), el segundo término tiene en cuenta el elemento interno longitudinal, y el tercer término considera la contribución de los cuatro elementos diagonales. El coeficiente  $c_A$  es un parámetro de escala usado para hacer cumplir la equivalencia entre  $\Gamma$  y  $\Gamma_{\text{MED}}$ . Así, igualando las expresiones 6 y 7 resulta

$$G_f L^2 = G_f \left( \frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (8)$$

A partir de la cual puede deducirse fácilmente que  $c_A = 3/22$  para establecer la equivalencia entre  $\Gamma$  y  $\Gamma_{\text{MED}}$ . Finalmente, el área de fractura transversal equivalente de los elementos longitudinales es

$$A_l^f = (3/22) L^2, \quad (9)$$

Mientras que para los elementos diagonales son definidos por

$$A_d^f = (4/22) L^2. \quad (10)$$

- Deformación crítica de falla ( $\varepsilon_p$ ): la máxima deformación alcanzada por el elemento antes de la iniciación del daño (punto A en [Figura 2c](#)). La relación entre  $\varepsilon_p$  y la energía específica de fractura,  $G_f$ , es dada en términos de los conceptos de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica. Esto es

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E(1-\nu^2)}} \quad (11)$$

Dónde  $R_f$  es el denominado factor de falla, el cual tiene en cuenta la presencia de un defecto intrínseco de tamaño  $d$ . De esta forma  $R_f$  es definido como

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{d}}, \quad (12)$$

Dónde  $Y$  es un parámetro adimensional que depende de las geometrías del espécimen y de la fisura.

- Deformación Límite ( $\varepsilon_r$ ): el valor de deformación para el cual el elemento pierde su capacidad de carga (Punto C en la [Figura 2c](#)). Este valor debe ser establecido para satisfacer la condición que, luego de la falla del elemento, la densidad de energía disipada iguala el producto del área de influencia del elemento,  $A_i^f$ , por la energía específica de fractura,  $G_f$ , dividida por la longitud del elemento. Esto es

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_c \cdot A_i^f}{L_i} = \frac{K_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E \cdot A_i}{2} = \frac{K_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E^A}{2} \quad (13)$$

Dónde los subíndices  $i$  tienen que ser especializados para ser  $l$  o  $d$  dependiendo si el elemento en consideración es longitudinal o diagonal, respectivamente. El coeficiente  $K_r$  es una función de las propiedades del material y de la longitud del elemento,  $L_i$ , como sigue:

$$K_r = \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \left( \frac{2}{L_i} \right) \quad (14)$$

Para garantizar la estabilidad del algoritmo, debe ser satisfecha la condición  $K_r \geq 1$  (Riera and Rocha, 1991). En este sentido es interesante definir la longitud de elemento crítica.

$$L_{cr} = 2 \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad (15)$$

El coeficiente  $\left( \frac{A_i^f}{A_i} \right)$  en ecuación (15) es  $\left( \frac{A_l^f}{A_l} \right) = \frac{3}{22\phi}$  y  $\left( \frac{A_d^f}{A_d} \right) = \frac{\sqrt{3}}{11\delta\phi}$  para los elementos longitudinales y diagonales respectivamente (ver ecuaciones 1, 2, 9 y 10). En el caso especial de un continuo isotrópico con  $\nu=0.25$ , los valores de las funciones  $\delta=1.125$  y  $\alpha=0.4$ , que resulta en  $\left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) = \left( \frac{A_d^f}{A_d} \right) \approx 0.34$ . Así, para propósitos prácticos se puede utilizar un sólo valor para la longitud de elemento crítica tanto para los elementos diagonales como longitudinales. Por consiguiente, la condición de estabilidad anterior puede ser expresada como

$$K_r = \frac{L_{cr}}{L_i} \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (16)$$

que es la máxima longitud del elemento para la cual se preserva la estabilidad de la RCE.

Finalmente, la expresión para la deformación límite es

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (17)$$

Es interesante ver a partir de las expresiones dadas más arriba, que dependiendo de su naturaleza, los parámetros usados para definir la RCE son propiedades del material, dependiendo sólo de la discretización, o dependiendo de ambos, el material y la discretización. En esta forma  $\varepsilon_r$ ,  $E$ ,  $R_{fc}$  y  $G_f$  son propiedades del material,  $A_i^f$  y  $L$  dependen sólo de la discretización del modelo, y  $E_i^A$  y  $\varepsilon_p$  dependen tanto de las propiedades del material como de la discretización del modelo.

Por otra parte, vale la pena señalar que, aunque el MED utiliza una ley de daño escalar para describir el comportamiento de los elementos, el modelo global tiene en cuenta el daño anisotrópico ya que posee elementos orientados en diferentes direcciones espaciales.

Más información sobre la fundamentación teórica de la versión del MED presentada además de otras aplicaciones se pueden encontrar en [Iturrioz \(1995\)](#), dónde se estudia el comportamiento de materiales frágiles como hormigón y hormigón armado. La simulación del comportamiento de suelos frente a cargas explosivas pueden encontrarse en [Riera e Iturrioz \(1998\)](#), el estudio de propagación dinámica de fisuras en [Spellmeyer et al. \(2001\)](#), así como problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos en [Barrios D'Ambra et al. \(2002\)](#) y comportamiento en mecánica de Rocas en [Dalguer et al. \(2003\)](#); [Miguel et al. \(2008\)](#),

Iturrioz et al. (2009). Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica en Kosteski (2008), Kosteski et al. (2008) y Barrios D'Ambra et al. (2007), Kosteski et al. (2012). Estudios de efectos de tamaño y de la independencia de la malla en Ríos y Riera (2004) y Miguel et al. (2010). Simulación de ensayos de Emisión acústica en Iturrioz et al. (2013a, 2013b).

En Miguel (2005) se estudian criterios constitutivos para el deslizamiento con fricción a lo largo de fallas sísmicas.

### 3 MODELO TEÓRICO DEL PROBLEMA ESTUDIADO

#### 3.1 Modelo mecánico y matemático de aumento de la tenacidad por fibras propuesto por Li et al (1991).

##### 3.1.1 Fisura

Se considerará una fisura en Modo I o modo apertura. Fisura con superficie plana y propagación paralela.

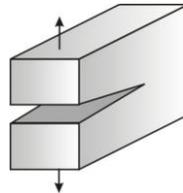


Figura 3: Fisura considerada – Modo I.

##### 3.1.2 Fibras

Las fibras tienen geometría circular. Se conoce el diámetro y longitud de dichas fibras, así como también el módulo de elasticidad ( $E_f$ ) y resistencia ( $\sigma_f$ ).

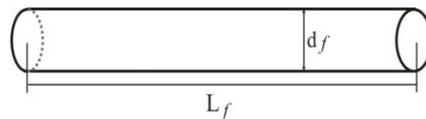


Figura 4: Geometría de la fibra.

Tanto la matriz como la fibra serán consideradas materiales elásticos, isotrópicos y homogéneos.

##### 3.1.3 Delimitación de las dimensiones y funciones de distribución de fibra

Li et al (1991) proponen una distribución aleatoria de las fibras considerando el ángulo de inclinación de dichas fibras respecto a la normal al plano de la fisura. La distribución aleatoria de fibras en la matriz es equivalente a suponer una probabilidad de que la parte final de la fibra está enterrada en algún lugar en la superficie semiesférica. Esto se muestra en la Figura 5:

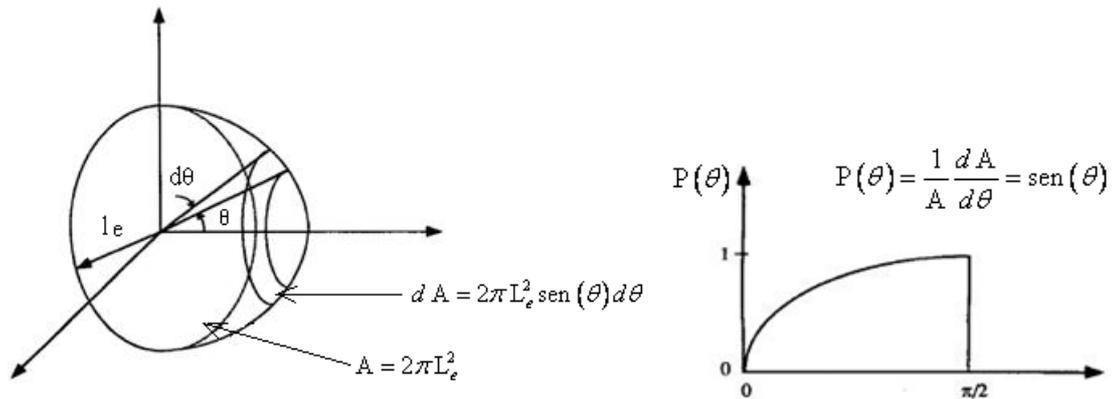


Figura 5: Orientación 3-D randómica de la fibra donde la longitud enterrada tiene su parte final en la superficie hemisférica y la probabilidad  $P(\theta)$ .

### 3.1.4 Disposición de la fibra en relación a la superficie de la fisura

Se observa en [Figura 6](#) la inclinación  $\theta$  de la fibra respecto al vector normal a la superficie de la fisura. La longitud enterrada de dicha fibra en la matriz está representada por  $l_e$ .

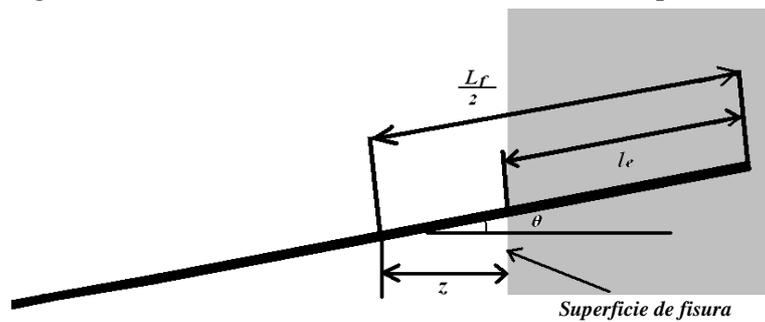


Figura 6: Fibra inclinada y con parte enterrada en la matriz.

### 3.1.5 Fibra sin deformación

En la [Figura 7](#) se grafica una fibra antes de la deformación debido a la propagación de la fisura. La longitud libre inicial se puede considerar como  $2l_o$ .

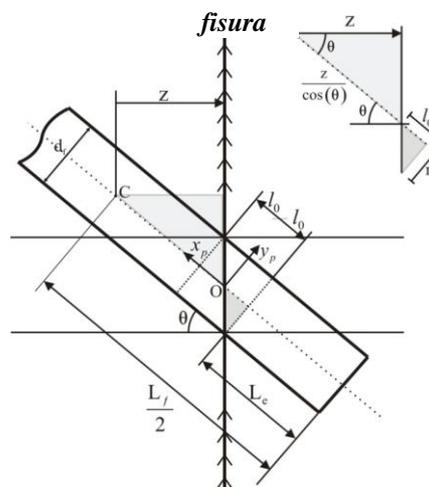


Figura 7: Configuración de la fibra antes de la apertura de la fisura.

Claramente, por la geometría, se tiene que la longitud enterrada de la fibra inicialmente está dada por:

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \theta} - l_o \quad (18)$$

Observando  $l_o$  en la figura, tenemos que:

$$\tan(90 - \theta) = \frac{r}{l_o} \quad (19)$$

Por relaciones trigonométricas:

$$l_o = r \tan \theta \quad (20)$$

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \theta} - \frac{d_f \cdot \tan \theta}{2} \quad (21)$$

Para  $L_e > 0$ , obtenemos:

$$0 < z < \frac{L_f}{2} \cos \theta - \frac{d_f \cdot \tan \theta}{2} \quad (22)$$

Donde  $z$  es la distancia desde el baricentro de la fibra hasta el plano de la fisura.

De  $l_o = r \tan \theta$ , tenemos

$$d_f \tan \theta = 2l_o < \frac{L_f}{2} \quad (23)$$

Li et al (1991), sugieren que:

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Pero observando la figura, verificamos que el ángulo de inclinación de la fibra que realmente contribuirá con la tenacidad se ve limitado por:

$$\theta < \arctan \frac{L_f}{d_f} \quad (24)$$

Así las probabilidades de que el ángulo  $\theta$  y la distancia  $z$  acontezcan está dada por:

$$p(\theta) = \text{sen}(\theta) \quad \text{para } 0 < (\theta) < \arctan(L_f/d_f) \quad (25)$$

$$p(z) = \frac{2}{L_f} \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{L_f \cos(\theta) - d_f \text{sen}(\theta)}{2}$$

La declaración de orientación aleatoria en 3-D de las fibras en la matriz es equivalente a decir que un extremo de la fibra tiene una probabilidad igual de ser situado en cualquier punto del hemisferio, tal como se muestra en [Figura 5](#). En dicha figura se define la función de densidad de probabilidad  $p(\theta)$ .

Dicho esto, si bien Li et al (1991) proponen una distribución aleatoria en 3-D de las fibras, el análisis propuesto por los autores es en dos dimensiones.

### 3.1.6 Tensión de puente proveniente de las fibras en el plano de la fisura

De acuerdo con Li et al (1991) la tensión de puente está relacionada con la apertura  $w$  y con la fuerza de puente  $N$  de cada fibra, que es esencial para calcular el aumento de la tenacidad a la fractura según la ecuación:

$$\sigma_c(w) = \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta \quad (26)$$

Donde  $N(w, \theta, z)$  es la fuerza axial en la fibra en su respectivo eje.

### 3.1.7 Aumento de energía de fractura $G_c$

El aumento de la energía de fractura  $G_c$ , [Joule/m<sup>2</sup>] se obtiene integrando el área debajo de la curva  $\sigma_c - w$ , podemos entonces escribir:

$$G_c = \int_0^{w^*} \sigma_c(w) dw \quad (27)$$

Donde  $w^*$  es la abertura suficiente para que todas las tensiones en las fibras sean cero. (fibras quebradas o fibras que salen fuera de la matriz).

Cabe mencionar que esta misma metodología fue utilizada en los Piaciski (2009) y Pavan (2006).

## 4 PROBLEMA ESTUDIADO

Se realiza el estudio de un material compuesto de matriz frágil reforzado por fibras cortas.

La matriz se encuentra fisurada y es solicitada por una excitación perpendicular a la dirección de la fisura. Dicha matriz es atravesada por la fisura que la secciona en dos partes, las mismas están unidas por fibras con diferentes inclinaciones y longitudes enterradas de acuerdo a la distribución de probabilidad indicada en las ecuaciones (25), el porcentaje de fibras del compuesto es ( $V_f=1\%$ ) y el módulo de elasticidad de la matriz es  $E_m = 30$  GPa y de la fibra  $E_f = 117$  GPa.

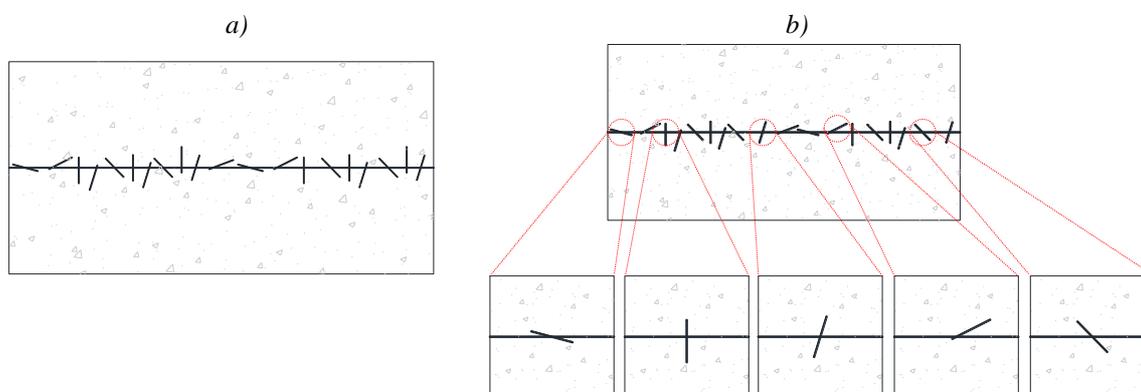


Figura 8: a) Material compuesto con una macrofisura fisurado reforzado con fibras cortas; b) Fibras aisladas que une el material con la macro fisura.

### 4.1 Metodología utilizada

Para poder determinar el aumento en la tenacidad del compuesto que generan estas fibras se procede con la siguiente metodología: tomamos cada una de ellas en forma individual, y obteniendo, con el Método de los Elementos Discretos, la fuerza de Puente que cada una toma en forma aislada (Figura 9), variando el ángulo  $\theta$  ente 0 y 90°, y la longitud enterrada ente  $z=0$  y  $z=lf/2$  . Posteriormente se calcula la tensión en el compuesto utilizando la ecuación (26).

En la Figura 9 se definen los parámetros a utilizar en la modelación del material compuesto como:

- $z$  : distancia desde el eje baricéntrico de la fibra al plano de la fisura
- $\theta$  : ángulo de inclinación de la fibra respecto a un plano normal al plano de la fisura
- $Of$  : baricentro de la fibra
- $Lf$  : longitud de fibra
- $ef$  : espesor de fibra

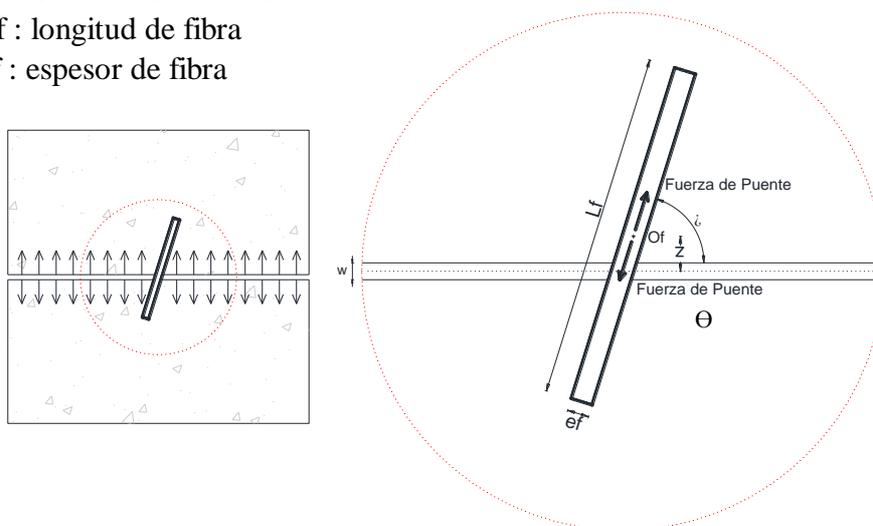


Figura 9: Fuerza de puente de una fibra aislada dentro de la matriz. Parámetros a utilizar en el modelo estudiado.

Esta metodología se puede observar en la Figura 10.

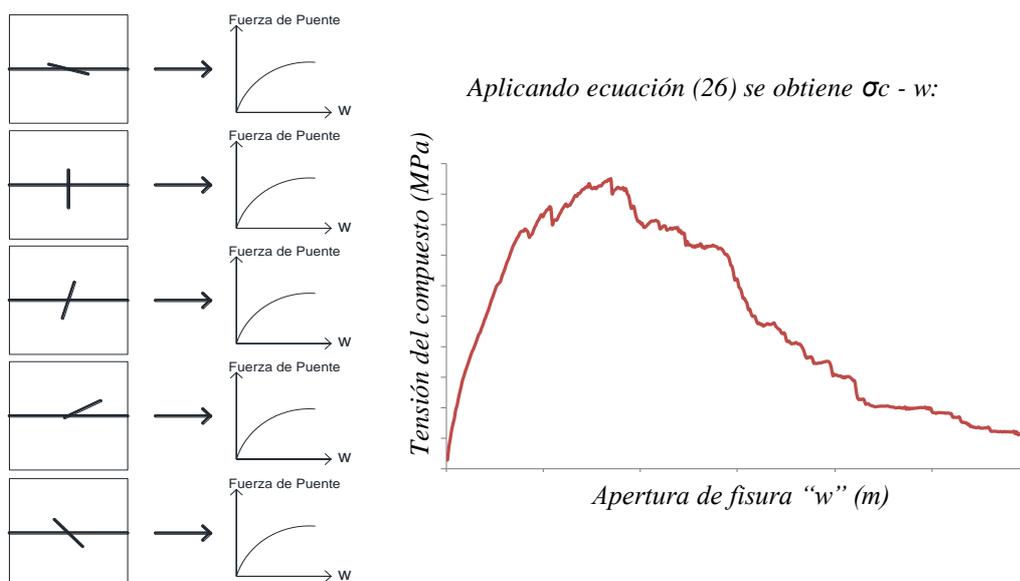


Figura 10: Metodología utilizada en el trabajo para obtener el valor de tensión en el compuesto y energía de fractura del mismo.

En primer lugar, de la simulación de cada fibra interviniente en la mejoría de la tenacidad a la fractura del material, se obtuvo la fuerza de puente que resiste cada una de ellas. Para esto, se hizo variar el ángulo de inclinación de fibra en intervalos de  $10^\circ$ , desde una inclinación de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , y se fue incrementando la distancia  $z$  (distancia desde el baricentro de la fibra al plano de la fisura) en intervalos iguales al espesor de fibra. Se obtuvieron así 9 intervalos respecto de  $\theta$  y 10 intervalos respecto de  $z$ , dando un total de 90 simulaciones con el fin de poder estudiar la contribución de cada fibra con posibilidad de intervenir en el aumento de la mejoría en el rendimiento del compuesto.

Luego se graficaron las curvas "Fuerza de puente vs. apertura de fisura ( $w$ )" para cada caso analizado, y de esta manera se obtiene la apertura de fisura crítica  $w^*$ , apertura para la cual todas las fuerzas de puente son cero.

A continuación, se aplica la ecuación (26) del modelo matemático propuesto por Li et al (1991) y se obtiene la tensión de puente del compuesto en relación a la apertura de fisura  $w$ . En dicha fórmula,  $N(w, \theta, z)$  es la suma de todas las fuerzas de puente de cada fibra individual.  $P(\theta)$  es la función de probabilidad de densidad de ocurrencia de una cierta inclinación  $\theta$  en la distribución 3D que LI et al (1991) proponen en su modelo matemático. Como se puede observar en la figura 3.3,  $P(\theta) = \text{seno}(\theta)$  para  $\theta$  variando entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Luego,  $p(z)$  es la probabilidad de densidad de que el baricentro de las fibras se encuentren a una distancia  $z$  desde su centro de gravedad hasta el plano de la fisura considerada. Para  $z$  variando entre 0 y  $L_f/2$ , el valor de  $p(z)$  es una constante que vale  $p(z) = 2/L_f$ .

Por último, se aplica la ecuación (27) del modelo matemático propuesto por Li et al (1991) y se obtiene el aumento de la energía de fractura  $G_c$  del compuesto. Dicho valor no es más que el área bajo la curva  $\sigma_c - w$ , área obtenida por integración numérica.

## 4.2 Configuración geométrica

La geometría y las condiciones de borde del problema se presentan en la Figura 11. Así como también se muestra como se aplican los desplazamientos prescritos ( $v$ ) normales al plano de la fisura.

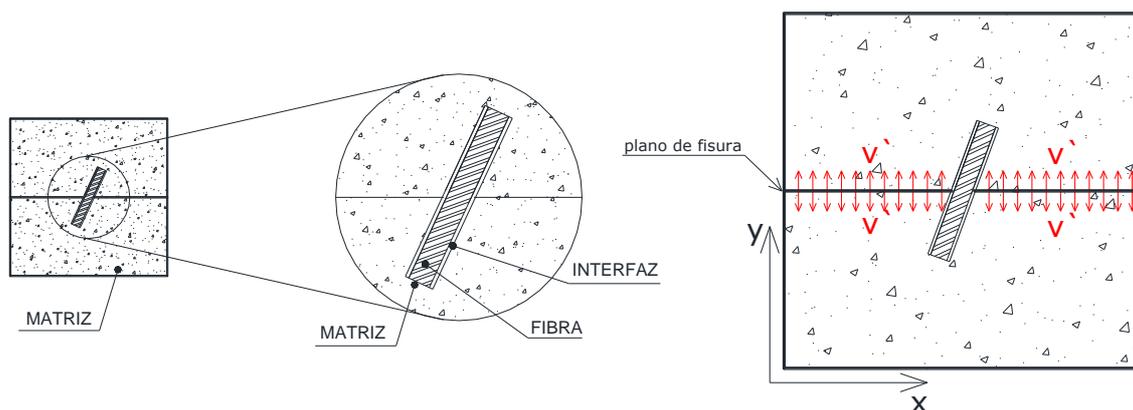


Figura 11: Configuración geométrica del conjunto fibra-matriz fisurada para uno de los casos estudiados en el MED.

Estos desplazamientos prescritos fueron aplicados a una velocidad suficientemente baja como para considerar despreciables los efectos de inercia.

## 4.3 Discretización con el MED

En este estudio preliminar se consideró el problema como *estado plano de deformaciones*,

restringiendo las deformaciones en la dirección perpendicular al plano de la figura. En la [Figura 12](#) se presenta el diseño del modelo en MED con la fibra dentro de la matriz fisurada. La placa tiene 250 módulos en los lados, con una fisura de 1 módulo de espesor. Las cotas están representadas en módulos, siendo que cada módulo tiene un lado  $L_{co}=0.1mm$ . Cada fibra tiene una longitud  $L_f=10mm$  y un espesor  $d_f=0,5mm$ .

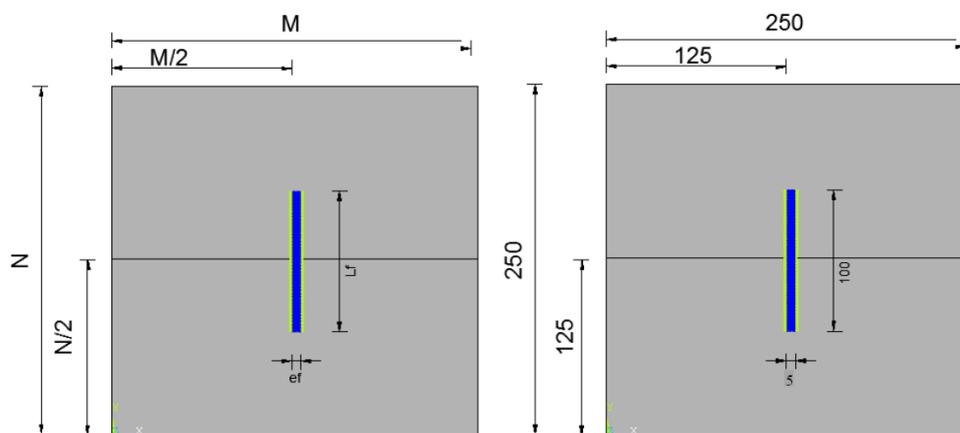


Figura 12: Disposición de la fibra dentro de la matriz fisurada, indicando la discretización adoptada para uno de los casos estudiados en el modelo de MED, longitudes medidas en módulos ( $1M=L_{co}=0.1mm$ ).

Para modelar la interfaz fibra-matriz, se utilizó un tercer material dentro del conjunto. Este material adicional tiene un espesor de dos módulos. Para determinar las propiedades mecánicas de este material que simula la interfaz fueron adoptados valores medios entre los de la matriz y la fibra.

En la [Figura 13](#) se muestra un detalle del mallado, donde se puede apreciar las barras y nudos del modelo discretizado. Las barras graficadas en color gris (A) representan a la matriz y sus propiedades mecánicas; las barras azules (C) a la fibra; y por último las barras amarillas (B) a la interface.

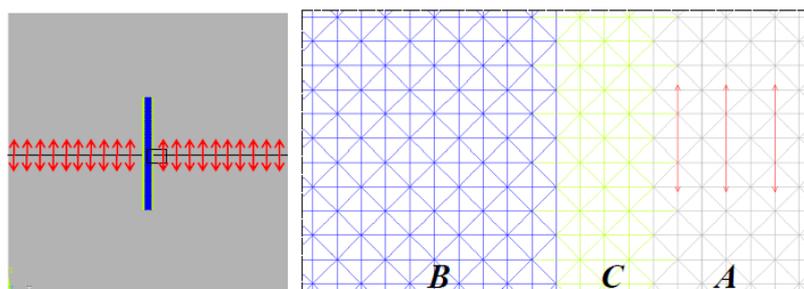


Figura 13: Detalle de la modelación de la interface en el modelo elaborado en MED.

Las flechas rojas en [Figura 13](#) corresponden a los desplazamientos prescritos aplicados en el modelo y como se puede observar en la figura, dichos desplazamientos se aplican a uno y otro lado del plano de la fisura. Se puede observar que la fisura llega hasta el contorno de la interfaz.

Cabe aclarar que en este trabajo se considera el problema como estado plano de deformaciones ya que, como bien se dijo más arriba, si bien [Li et al \(1991\)](#) proponen una distribución aleatoria en 3-D de las fibras, el análisis propuesto por los autores es en dos dimensiones. De esta manera, se han restringido las deformaciones del modelo fuera del plano colocando apoyos en todos los nudos en esa dirección.

En la **Tabla 1** se indican los parámetros utilizados en la simulación.

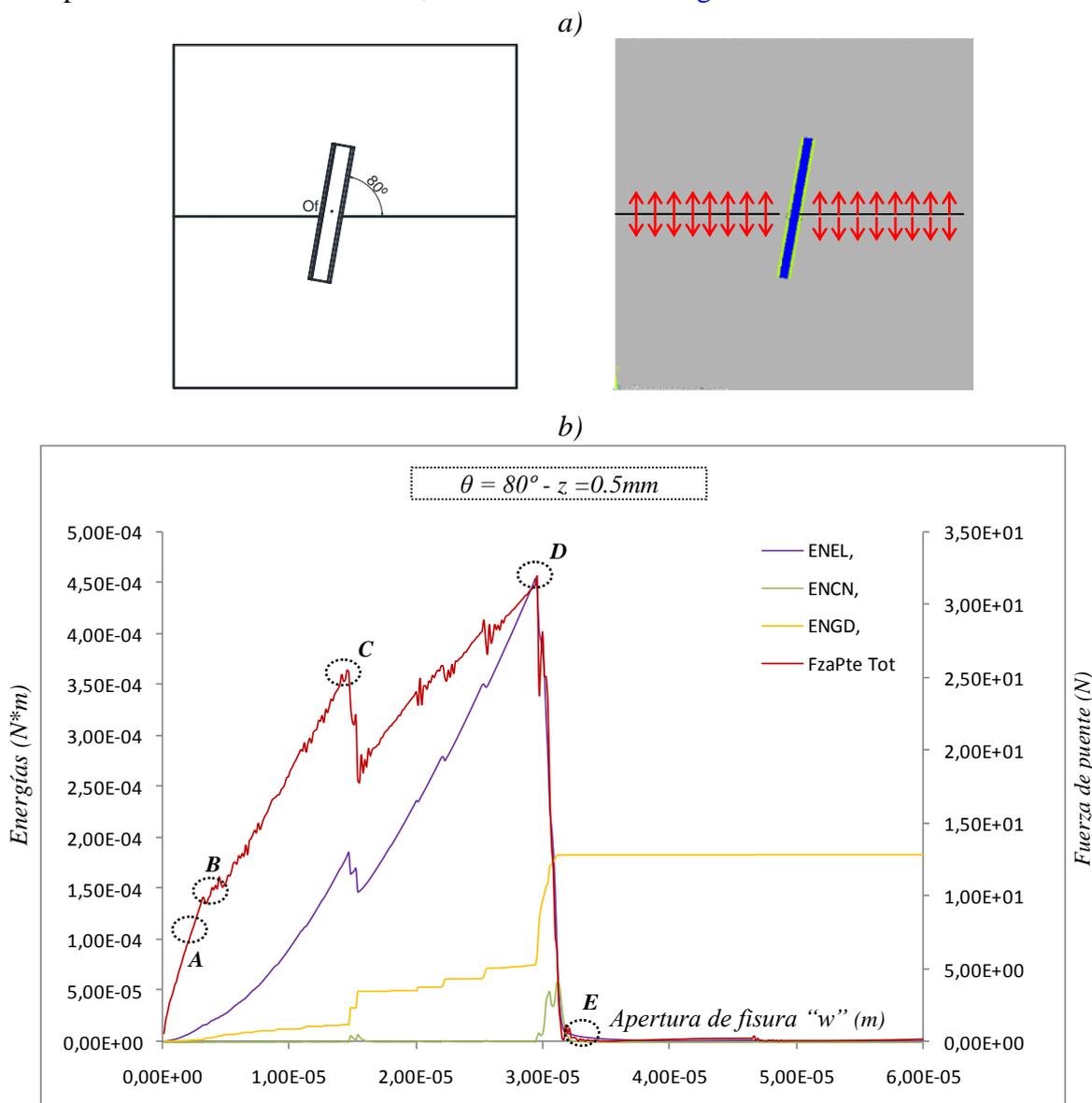
| Material                   | $E$ (N/m <sup>2</sup> ) | $G_c$ (N/m) | $Roh$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | $\epsilon_p$ |
|----------------------------|-------------------------|-------------|----------------------------|--------------|
| <b>Matriz (mortero)</b>    | 3,0 e10                 | 24          | 2500                       | 0,00126      |
| <b>Fibra (Spectra 900)</b> | 1,17 e11                | 18000       | 970                        | 0,02222      |
| <b>Interfaz</b>            | 7,35 e10                | 9012        | 2800                       | 0,01795      |

Tabla 1: Parámetros utilizados en el modelo del MED, considerando una discretización de  $L_{co}=0,1\text{mm}$

## 5 RESULTADOS

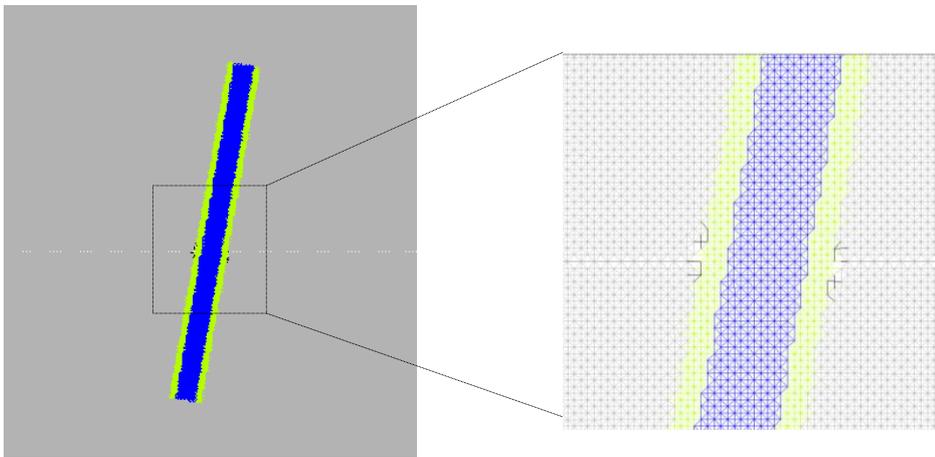
### 5.1 Relación entre la fuerza de puente y apertura de fisura

Aplicando desplazamientos prescritos, la fisura comienza a abrirse y se computa la fuerza de puente en el baricentro de cada fibra. El proceso finaliza cuando la energía elástica del modelo presenta una caída en su valor, como lo muestra la **Figura 14**:

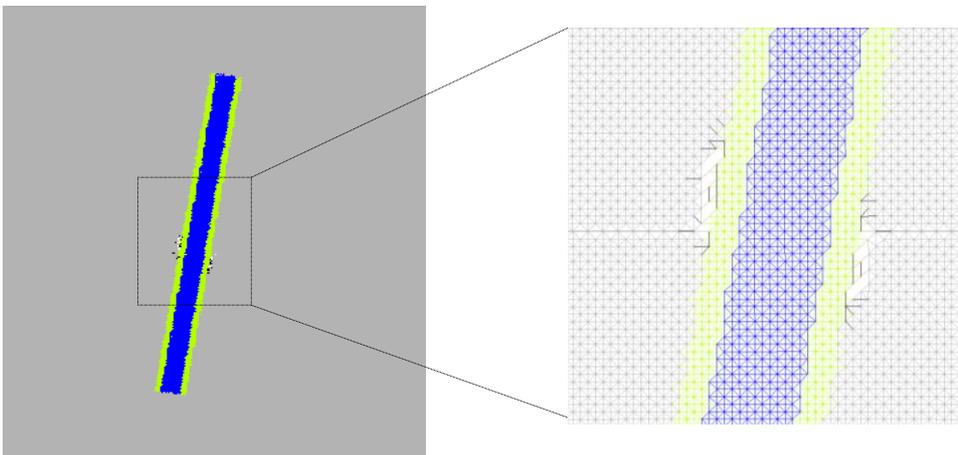


c)

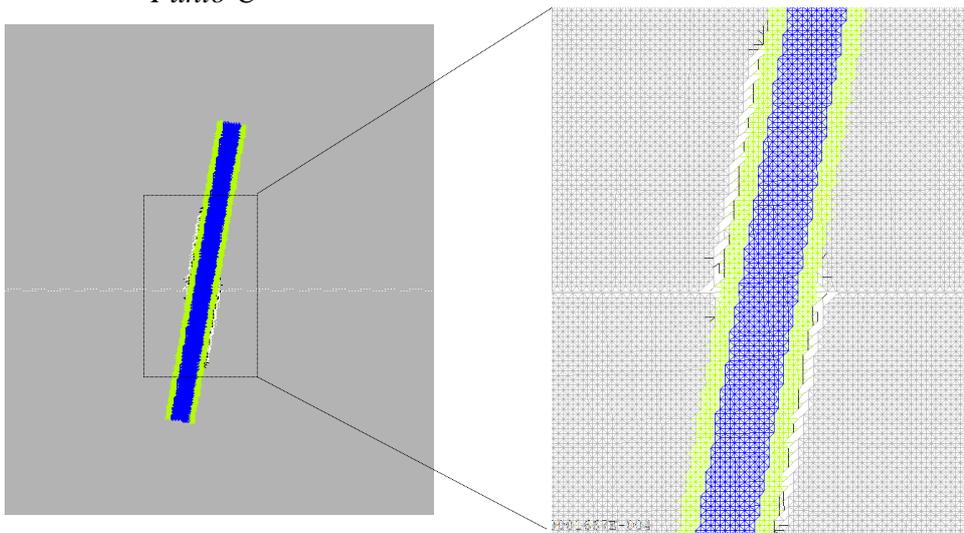
*Punto A*



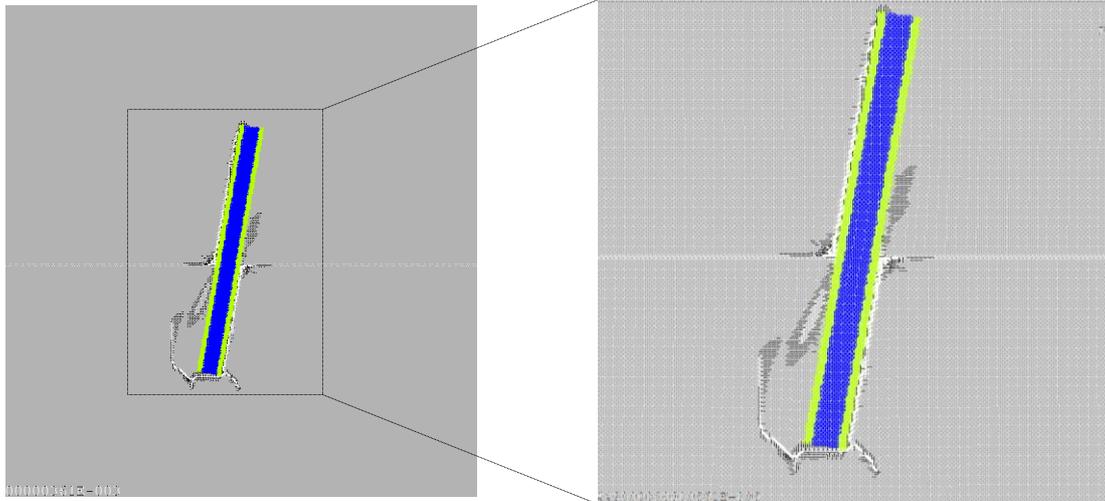
*Punto B*



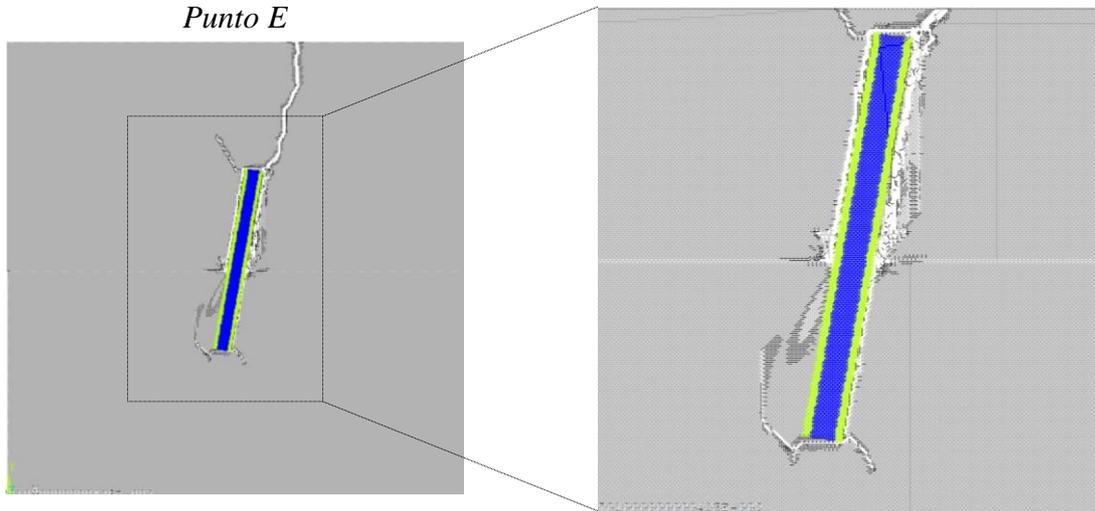
*Punto C*



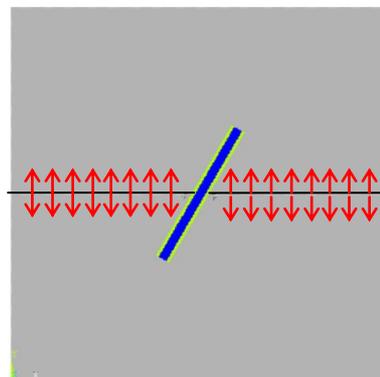
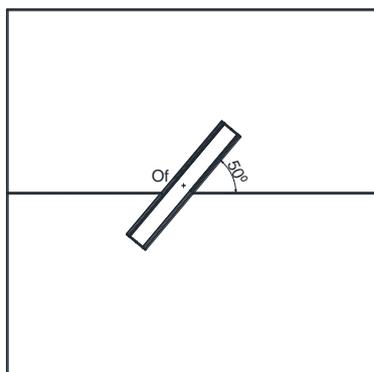
*Punto D*

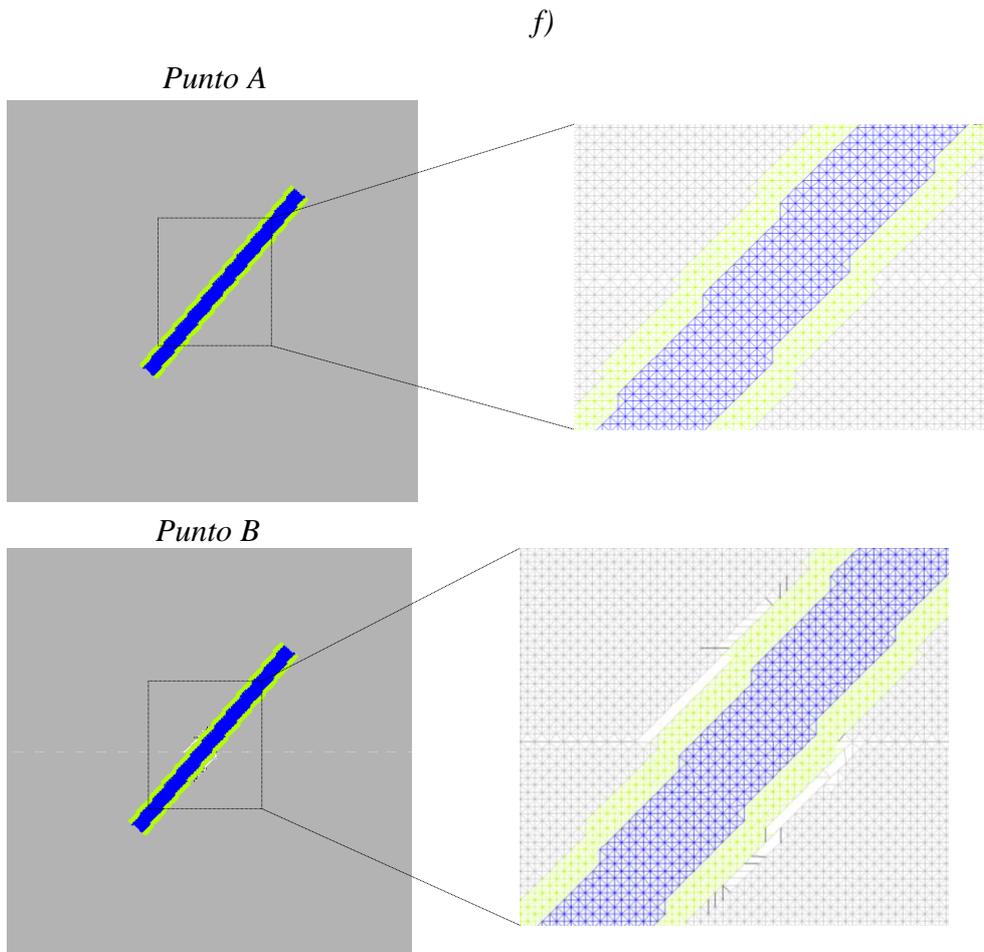
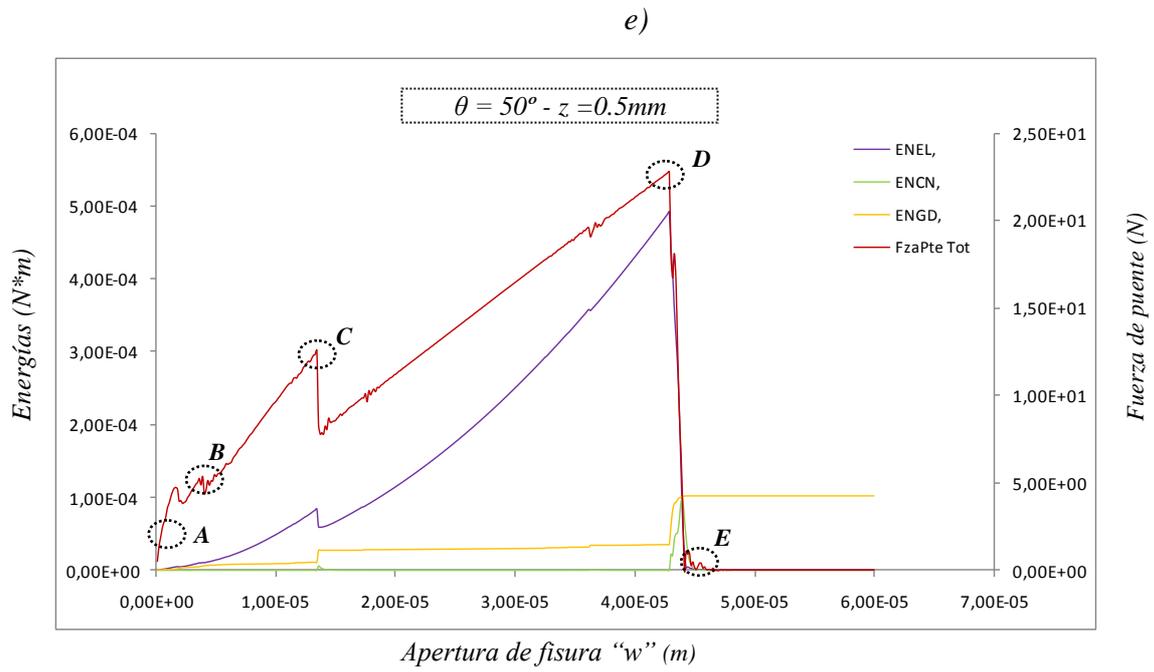


*Punto E*



*d)*





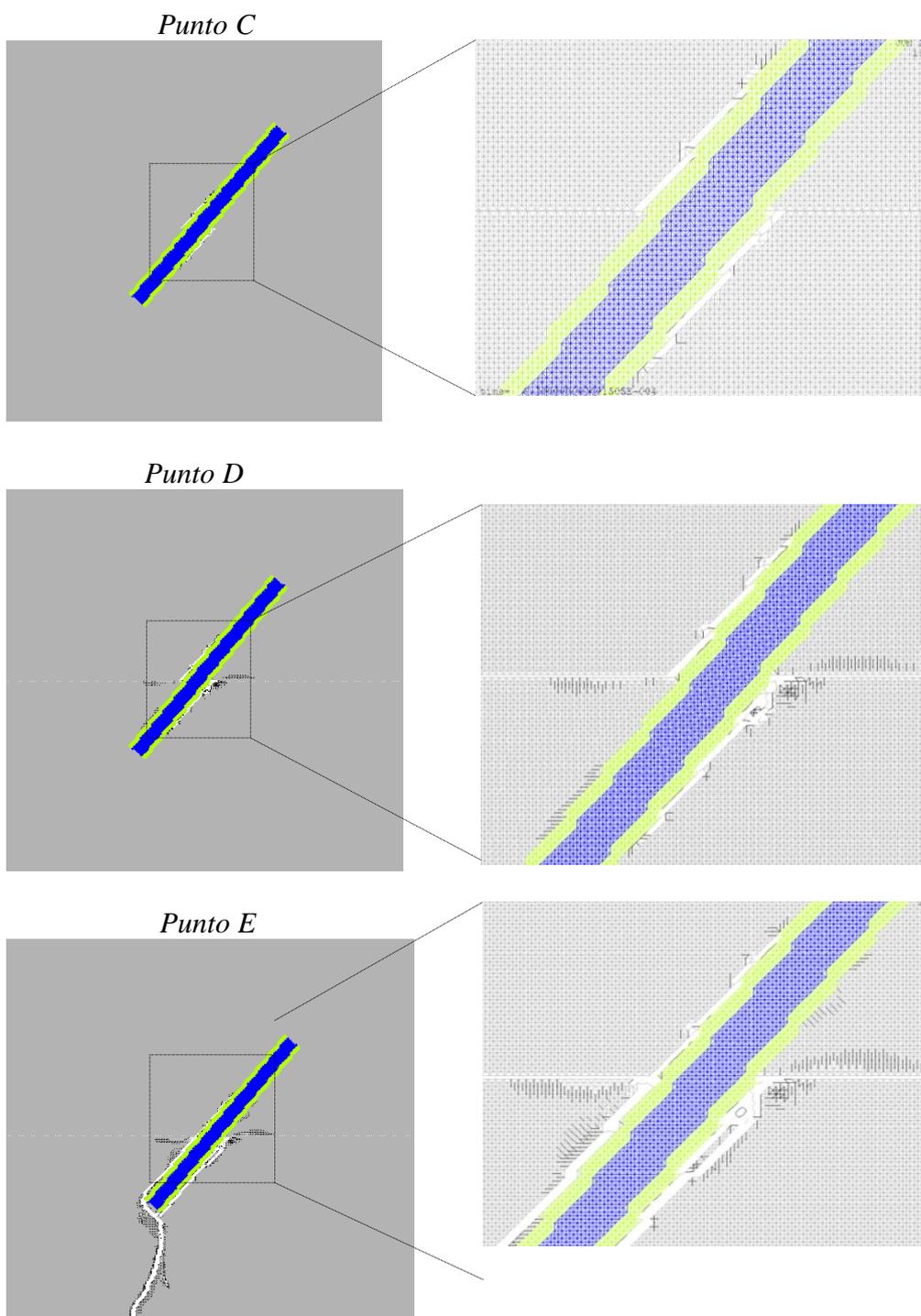


Figura 14: a) Esquema del modelo analizado y modelación en el DEM.  $\theta = 80^\circ - z = 0.5\text{mm}$ .  
 b) Relación entre fuerza de puente y apertura de fisura  $w$  para  $\theta = 80^\circ - z = 0.5\text{mm}$ .  
 c) Proceso de rotura del modelo analizado.  
 d) Esquema del modelo analizado y modelación en el DEM.  $\theta = 80^\circ - z = 0.5\text{mm}$ .  
 e) Relación entre fuerza de puente y apertura de fisura  $w$  para  $\theta = 80^\circ - z = 0.5\text{mm}$ .  
 f) Proceso de rotura del modelo analizado.

Se puede observar que a medida que la fisura comienza a abrirse, la fibra resiste dicha

apertura y la fuerza de puente comienza a aumentar, hasta que llegamos al punto D, instante en el cual el modelo rompe, por lo tanto la energía elástica cae y la energía cinética comienza a tomar valores distintos de cero. La apertura registrada en el punto D es la apertura de fisura crítica para el modelo analizado.

Haciendo el mismo procedimiento para los 90 casos corridos, la apertura de fisura máxima registrada será nuestro valor  $w^*$ , apertura de fisura para la cual todas las fuerzas de puente son nulas, que para nuestro caso  $w^*=6.00e-5$  m.

## 5.2 Tensión en el compuesto y tenacidad a la fractura.

Para hallar la curva  $\sigma_c - w$  para el compuesto, se computan las tracciones transmitidas a través de la fisura de la matriz integrando las fuerzas que contribuyen aquellas fibras que están activas en la acción de puenteo. Así, para cada apertura de fisura  $w$ , la tensión  $\sigma_c$  del compuesto se obtiene según la ecuación (26).

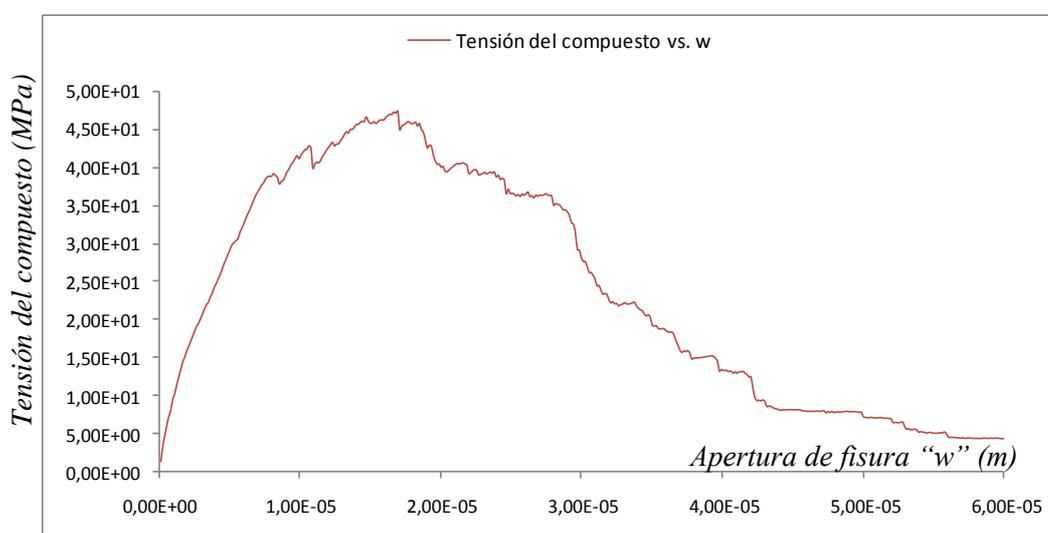


Figura 15: Tensión en el compuesto en función de la apertura de fisura para todos los casos analizados aplicando ecuación (26).

Integrando el área bajo la curva  $\sigma_c - w$ , el valor de la tenacidad a la fractura del material compuesto reforzado por el conjunto de fibras analizadas es de:

$$G_c = 3656.23 \text{ KN/m} = 365623 \text{ N/m}$$

Como el  $G_c$  del mortero tiene un valor de alrededor de 100 N/m, se ha podido aumentar la tenacidad de la matriz en el orden de 3000 veces mediante la incorporación de fibras de Spectra 900.

## 5.3 Análisis de los procesos de ruptura

A continuación se detallan los procesos de ruptura para uno de los casos analizados en este trabajo. Tomando una fibra con un ángulo de inclinación  $\theta=60^\circ$  y  $z=0\text{mm}$ , se han podido observar los siguientes procesos de ruptura:

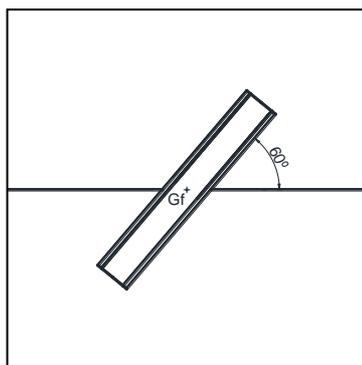


Figura 16: Esquema del modelo analizado;  $\theta = 60^\circ$  -  $z=0\text{mm}$ .

En los primeros instantes de carga, la fibra antes de desprenderse de la matriz ejerce una presión intensa sobre la matriz que hace que las tensiones generadas por esta presión alcancen un máximo, valor mayor que la resistencia de la matriz, produciéndose spalling (ruptura de la matriz cercana al punto de salida de la fibra). Este efecto se puede observar en la [Figura 17](#):

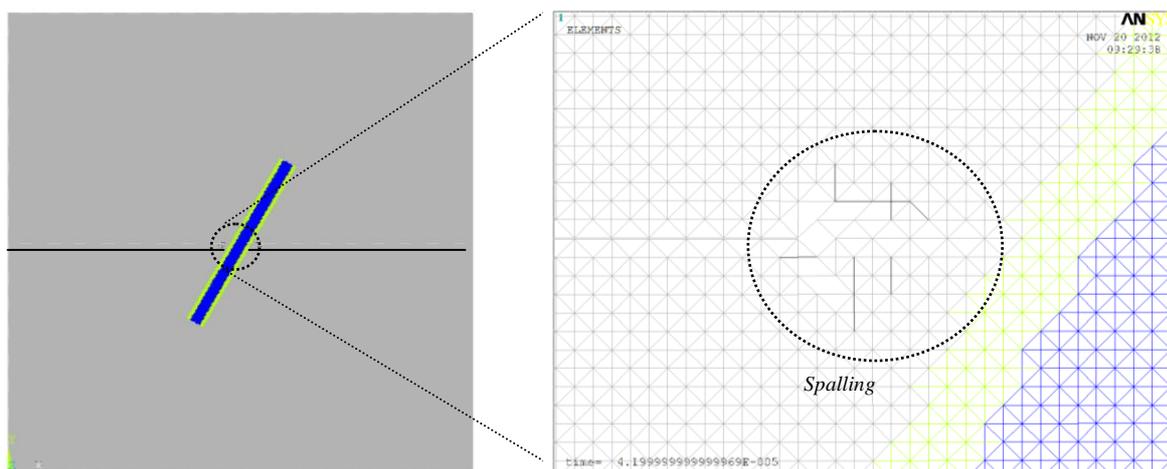


Figura 17: Efecto Spalling para uno de los casos analizados.  
 $\theta = 60^\circ$  -  $z=0\text{mm}$

Se sigue cargando y se produce el despegue (debonding) de las caras traccionadas de la matriz, debido a que la fibra tiene mayor módulo de elasticidad. Esto se puede observar en la [Figura 18](#):

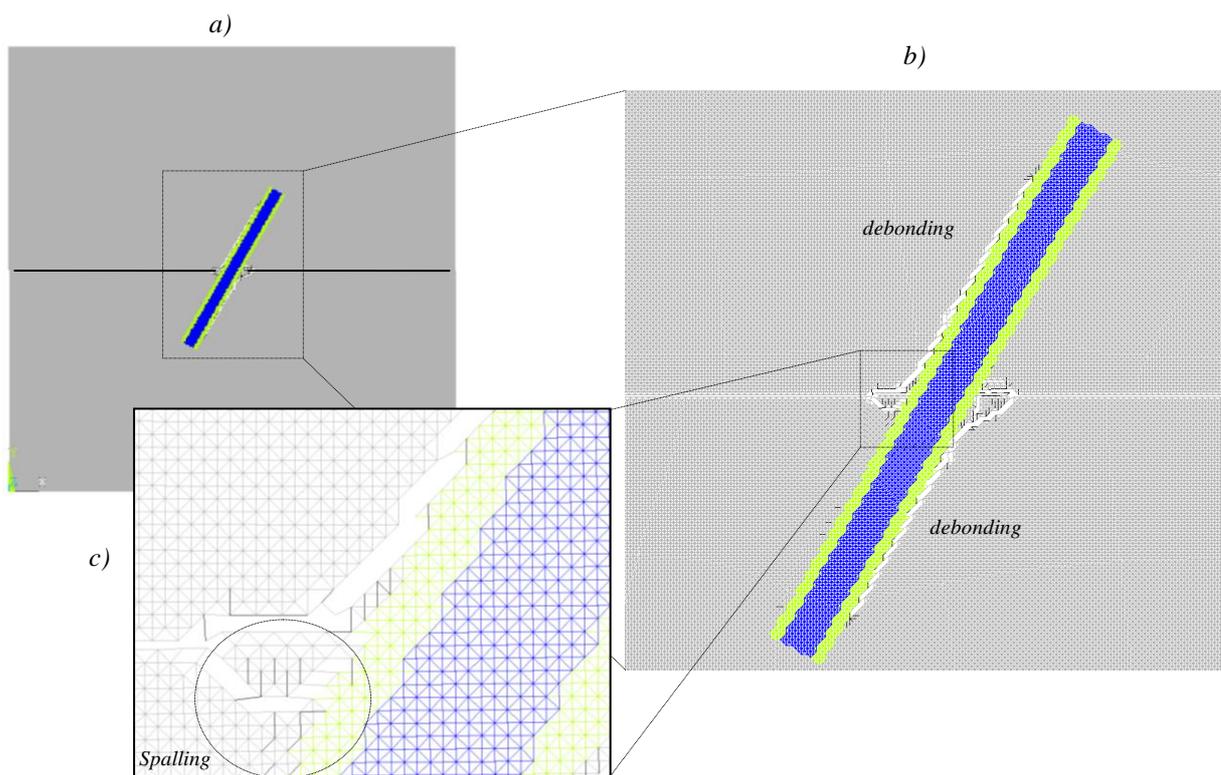
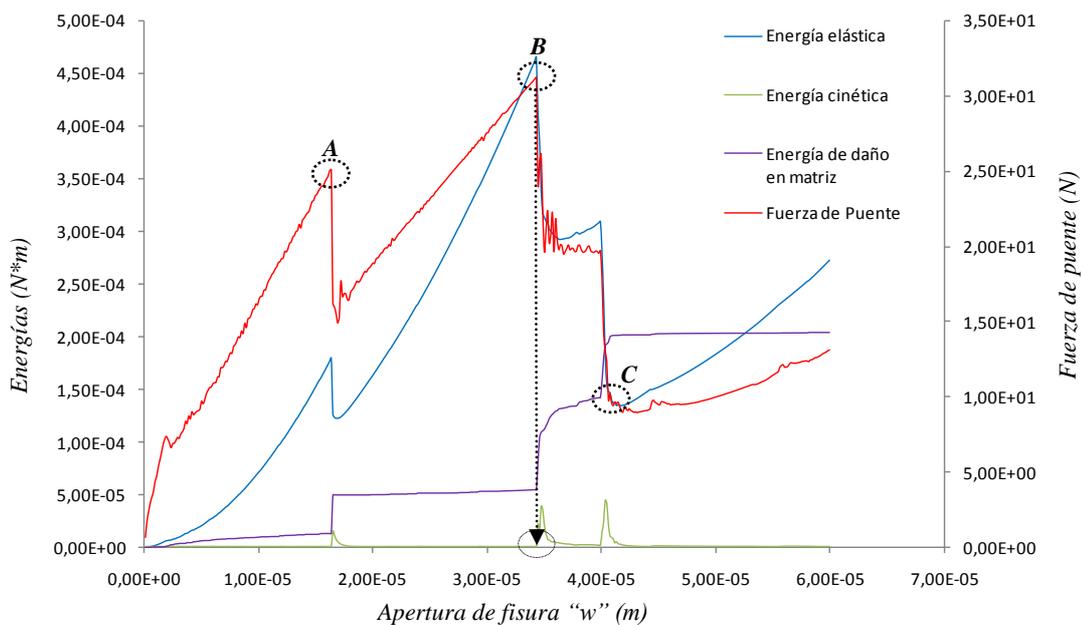


Figura 18: a) Efecto debonding para uno de los casos analizados.  $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$ . b) Zoom en las cercanías de la fibra. c) Spalling.

A continuación, en la Figura 19, se presenta un gráfico de fuerza de puente vs apertura de fisura “w”, en el que se señalan puntos característicos que ayudan a entender mejor la ocurrencia de dichos procesos de ruptura.



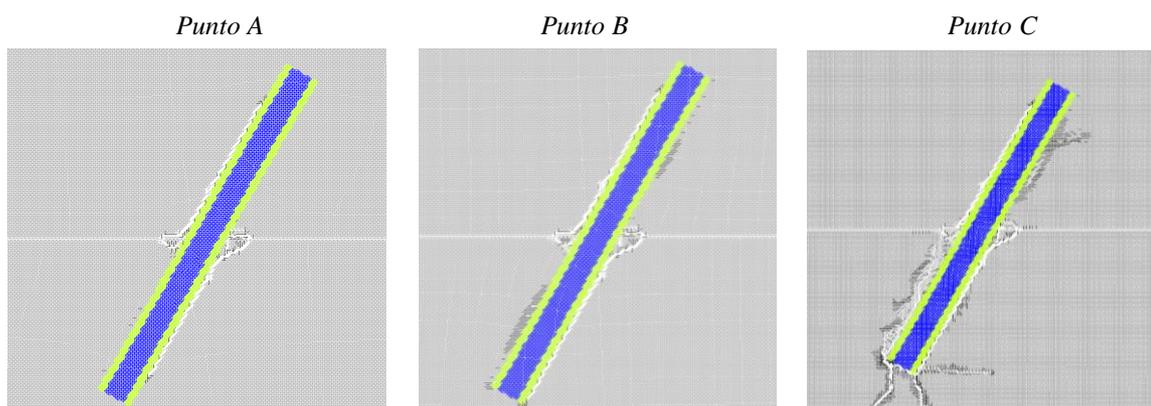


Figura 19: curva Fza puente vs w Para uno de los casos analizados.  
 $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo, fue propuesto un modelo para calcular el aumento de la tenacidad de la matriz frágil contribuido por la adición de fibras. A través de la implementación de programación numérica, se analizó la contribución que aporta cada fibra interviniente en la acción de puenteo en el aumento en la tenacidad del material compuesto. Por los resultados obtenidos y los observaciones realizadas podemos concluir puntos importantes:

- Para un mismo valor de  $z$ , se ha podido observar que cuanto menor sea la inclinación  $\theta$  de la fibra respecto de la horizontal, mayor será la fuerza de puente que toma la fibra y también se registra mayor apertura de fisura para llegar a la ruptura del modelo.
- Para una fibra con orientación paralela al plano de la fisura, la fuerza de puente resistida será nula y no participa en el aumento en la tenacidad del material compuesto.
- Se verifica el aumento en la tenacidad del material compuesto al reforzarlo con este tipo de fibras.
- Se ha podido observar que para todos los casos con inclinación de fisura distinta a  $90^\circ$  la matriz nunca rompe del lado comprimido de la fibra.
- Observando las curvas de Fuerza de puente vs  $w$  para los casos  $\theta=80^\circ$  y  $\theta=50^\circ$  (ver Figura 14), se puede apreciar el efecto spalling entre los puntos A y B. Luego del punto B comienza el despuegue (debonding) de la matriz respecto de la fibra, con un cambio de pendiente en la curva que representa la fuerza de puente. En el punto C se produce una caída en la curva seguida de un nuevo cambio de pendiente debido a la pérdida de rigidez debido a la zona despegada y al inicio de la flexión de la fibra.

## 7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrios D'ambra, Ricardo; Iturrioz, I. ; Coceres, Hector ; Kostaschi, Luis ; Tech, Tomas ; Cisilino, Adrian . Cálculo Del Factor De Intensidad De Tensiones Utilizando El Método De Los Elementos Discretos. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v. 4, p. 1-22, 2007.

Brighenti, R., Carpinteri A., Spagnoli, A., Scorza, D.: "Cracking behaviour of fibre-reinforced cementitious composites: A comparison between a continuous and discrete computational

- approach". *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 103:103–114.
- Brighenti, R., Carpinteri A., Spagnoli, A., Scorza, D.: "Continuous and lattice models to describe crack paths in brittle-matrix composites with random and unidirectional fibres". *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 108:170–182.
- Dalguer L.A., Irikura K., Riera J.D., y Chiu H.C. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 chi-chi, taiwan, earthquake: brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91, 2001.
- Dalguer, A., Irikura, K., and Riera J. D., Generations of New Cracks Accompanied by Dynamic Shear Rupture Propagation of the 2000 Tottori (Japan), Earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 93, pp. 2236-2252, 2003.
- Hayashi, Y., Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear. Porto Alegre. *Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, 1982.
- Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Discrete Elements dynamic response of elastoplastic subjected to impulsive loadings. *Communications in Numerical Methods in Engineering* , v. II, p. 1-10, 1995.
- Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete Plates and Shells. *International Journal Of Nuclear Engeneering And Design*, v. 1, p. 1-10, 1998.
- Iturrioz, I. ; Miguel, Leticia F F ; Riera, Jorge Daniel . Dynamic fracture analysis of concrete or rock plates by means of the Discrete Element method. *Latin American Journal of Solids and Structures (Impresso)* , v. 6, p. 229-246, 2009.
- Iturrioz, I. ; G. Lacidogna ; A. Carpinteri . Acoustic emission detection in concrete specimens: Experimental analysis and lattice model simulations. *International Journal of Damage Mechanics* , v. 8, p. 1-44, 2013.
- Iturrioz, I. ; Lacidogna, G. ; Carpinteri, A. . Experimental analysis and truss-like discrete element model simulation of concrete specimens under uniaxial compression. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 110, p. 81-98, 2013.
- Kosteski, Luis ; D'ambra, Ricardo Barrios ; Iturrioz, I. . Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el Método de los Elementos Discretos compuestos por barras. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* , v. 24, p. 323-343, 2008.
- Kosteski, L., Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica. *Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Nordeste, Resistencia – Chaco*, 2008.
- Kosteski, L. E. ; Kosteski, Luis ; Barrios D Ambra, Ricardo ; Iturrioz, I. . Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International Journal of Fracture (Print)* , v. 174, p. 139-161, 2012.
- LI Victor. C.; WANG, Youjiang.; BACKER, Stanley. A micromechanical model of tension softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *J. Mech Phys. Solids*, 1991; 39[5]:607- 625.
- Maccaferri.; Empresa do Grupo Industrial Maccaferri. *Maccaferri América Latina*. 2002-2007.
- Miguel L.F.F. Critério constitutivo para o deslizamento com atrito ao longo da falha sísmica. *Dissertação doutorado., Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre*, 2005.
- Miguel, Leticia F F ; Riera, Jorge Daniel ; Iturrioz, I. . Influence of size on the constitutive

- equations of concrete or rock dowels. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 1, p. 699, 2008.
- Miguel, Leticia F F ; Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Size Effects and Mesh Independence in Dynamic Fracture Analysis of Brittle Materials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 56, p. 1-16, 2010.
- Nayfeh A.H. y Hefzy M.S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. *AIAA Journal*, 16:779–787, 1978.
- Pavan, Alcione R. Modelagem Matemática de tenacificação de materiais cerâmicos através da adição de microfibras. 2006. 155 f. *Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí 2006.*
- Piaceski, Neiva F. Modelagem matemática do efeito de spalling à tenacificação de materiais compostos reforçados por fibras. 2009. 155 f. *Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí 2009.*
- Rios R.D. y Riera J.D. Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. *Engineering Structures.*, 26:1115–1125, 2004.
- Rocha, M.M., Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil. Porto Alegre. *Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.*
- Rocha M.M., Riera J.D., y Krutzik N.J. Extension of a model that aptly describes fracture of plain concrete to the impact analysis of reinforced concrete. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A*, 61:1096–1101, 1991.
- Spellmeyer, T., Barrios D'Ambra, R., e Iturrioz, I., Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos. *ENIEF XII, Córdoba, Argentina (2001). Mecánica Computacional. Vol 20 pp.506-513, 2001.*
- William, D.; Callister, Jr. *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução. 5ª ed. LTC. Rio de Janeiro, 2002.*