

## **PREDICCIÓN NUMÉRICA DE VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS PRODUCIDAS POR FUENTES DISTANTES**

**Oscar Möller<sup>a</sup>, Juan P. Ascheri<sup>b</sup>, Mauro Poliotti<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura, Consejo de Investigaciones (CIUNR), Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina, [moller@fceia.unr.edu.ar](mailto:moller@fceia.unr.edu.ar)*

*<sup>b</sup>Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina.*

**Palabras clave:** vibraciones en estructuras, transmisión de ondas en suelos, disipación, aislación de vibraciones.

**Resumen.** El funcionamiento de equipos industriales y el desarrollo de espectáculos deportivos en estadios, generan vibraciones que se transmiten por el suelo hasta distancias importantes, las que generan molestias en los habitantes de edificios y la posibilidad de daños en elementos no estructurales y eventualmente en la propia estructura resistente de una construcción. La representación completa de estos eventos debe incluir el modelo dinámico de la fuente de excitación, el modelo de transmisión de las vibraciones por el suelo y el modelo dinámico de la estructura a analizar, con las interacciones entre ellos. En este trabajo se estudia el desempeño de un software multifísica, comparando la solución analítica de la transmisión de ondas unidireccional con los resultados numéricos del software. Luego se realiza una aplicación tridimensional analizando la respuesta de un modelo simple de estructura ubicada en un suelo con propiedades elásticas lineales, y solicitada por una fuente que emite un impacto superficial a 50m de la estructura. Para evitar el reflejo de las ondas en los bordes del modelo se utilizan los dominios infinitos. Los resultados son alentadores para abordar problemas más complejos.

## 1 INTRODUCCIÓN

El funcionamiento de equipos industriales como martinets, balancines, plegadoras, compresores, máquinas rotantes desbalanceadas, etc., y el desarrollo de espectáculos deportivos en estadios, generan vibraciones que se transmiten por el suelo hasta distancias importantes, las que generan molestias en los habitantes de edificios y la posibilidad de daños en elementos no estructurales y eventualmente en la propia estructura resistente de una construcción.

La representación completa de estos eventos debe incluir el modelo dinámico de la fuente de excitación, el modelo de transmisión de las vibraciones por el suelo y el modelo dinámico de la estructura a analizar, con las interacciones entre ellos.

La caracterización de la acción que origina las vibraciones depende del sistema mecánico y aislación que disponga el equipo industrial, o del producido por el salto sincronizado de espectadores en un estadio deportivo (Parkhouse et al. 2006).

Existen soluciones analíticas en el dominio de las frecuencias para comportamiento elástico tanto del terreno por donde se propagan las vibraciones como del edificio receptor de dichas vibraciones. En 1904 Lamb estudió el problema de vibraciones de una fuerza vibrante simple actuando en un punto sobre la superficie de un espacio semi-infinito, que incluía fuerzas en sentido vertical y horizontal, el cual es generalmente referido como el problema dinámico de Boussinesq. Luego, diversos autores han encontrado soluciones analíticas en el dominio de las frecuencias para casos particulares, ver Das and Ramana (2010).

También es posible obtener la solución analítica de las vibraciones longitudinales y transversales de un edificio considerado como un continuo (Clough and Penzien, 1975).

En nuestro país se han realizado y publicado estudios de vibraciones en edificios producidos por conciertos de rock en el estadio de River Plate (Bertero y otros, 2010), e hincado de tablestacas (Bertero y otros, 2012).

En el medio local se han realizado numerosos trabajos de asistencia técnica sobre medición y evaluación de vibraciones producidas por equipos industriales y por partidos de fútbol en el estadio de NOB. Consisten en la medición de vibraciones en el edificio que plantea quejas, y la evaluación desde el punto de vista de las molestias a personas, IRAM 4078 (1989-1991), y afectación a las construcciones, IRAM 4077 (1997-2005).

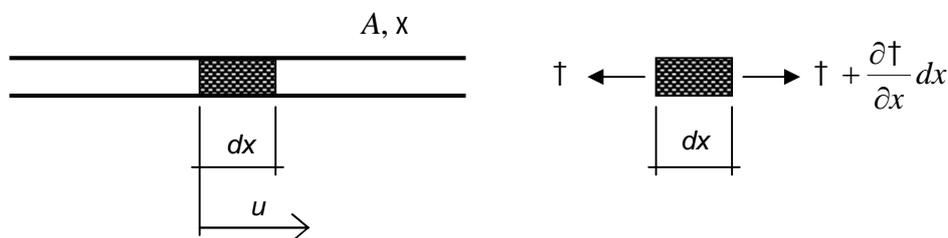
El interés del desarrollo y aplicación de los métodos numéricos para aproximar los movimientos en las estructuras, ya sea en aquella donde se desarrolla la excitación como en aquellas que son afectadas por la mismas, está relacionado principalmente con la predicción de la reducción de las vibraciones asociado con el estudio de factibilidad de proyectos y con el diseño de elementos disipadores o de aislación, como elementos correctivos en estructuras existentes o como elementos incorporados en nuevos proyectos.

En este primer trabajo sobre el tema, se estudia el desempeño del software COMSOL Multiphysics (2012), comparando la solución analítica de la transmisión de ondas unidireccional con los resultados numéricos del software. Luego se realiza una aplicación tridimensional analizando la respuesta de un modelo simple de estructura ubicada en un suelo con propiedades elástico lineales, y solicitada por una fuente que emite un impacto superficial a 50m de la estructura. Para evitar el reflejo de las ondas en los bordes del modelo se utilizan los dominios infinitos.

Los resultados son alentadores para abordar en el futuro problemas que incluyan excitaciones dinámicas más complejas y modelos de comportamiento no lineal para el suelo y la estructura.

## 2 TRANSMISIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAL

Se resume brevemente el problema de la transmisión de ondas en un sistema unidimensional de comportamiento elástico, el cual se representa en la Figura 1.



**Figura 1:** Onda longitudinal en una barra elástica

El equilibrio de fuerzas del elemento diferencial, a partir de la segunda ley de Newton, es:

$$-t A + \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) A = \frac{A dx \chi}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = \dots \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

siendo  $A$  el área de la barra,  $\chi$  el peso específico y  $\dots$  la densidad de masa. La relación constitutiva elástica lineal se expresa con

$$t = E v = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad. Reemplazando ec.(2) en ec.(1) resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\dots} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

El término  $v_c = \sqrt{E/\dots}$  es la velocidad de propagación de la onda de presión longitudinal.

La solución de la ec.(3) se puede expresar como

$$u = F(v_c t + x) + G(v_c t - x) \quad (4)$$

$F$  y  $G$  son funciones que dependen de las condiciones iniciales.

Es importante diferenciar la velocidad de propagación de onda  $v_c$  de la velocidad de las partículas. Si se considera un pulso rectangular de intensidad  $t_x$  y duración  $t_1$  aplicada en el extremo de una barra, inicialmente una pequeña zona de la barra estará comprimida y luego la compresión se irá transmitiendo a las zonas vecinas. Durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  la onda de presión habrá viajado una distancia

$$\Delta x = v_c \Delta t \quad (5)$$

Para cualquier tiempo  $t > t_1$ , el segmento de barra que estará comprimida tendrá una longitud

$$x_1 = v_c t_1 \quad (6)$$

Entonces, el acortamiento elástico y la velocidad de las partículas resultan

$$\Delta u = v x_1 = \frac{t_x}{E} x_1 = \frac{t_x}{E} v_c t_1 \rightarrow \dot{u} = \frac{t_x}{E} v_c \quad (7)$$

Se observa que la velocidad de las partículas depende de la intensidad de tensión  $\dagger_x$ , es decir, a medida que aumenta la intensidad, mayor es la velocidad de las partículas. Sin embargo, la velocidad de propagación de la onda depende solo de las propiedades del material. La velocidad de propagación de onda y la velocidad de las partículas tienen el mismo sentido cuando la onda es de compresión, y opuestas si la onda es de tracción.

En el extremo de la barra, la reflexión depende de las condiciones de borde. Los casos típicos son:

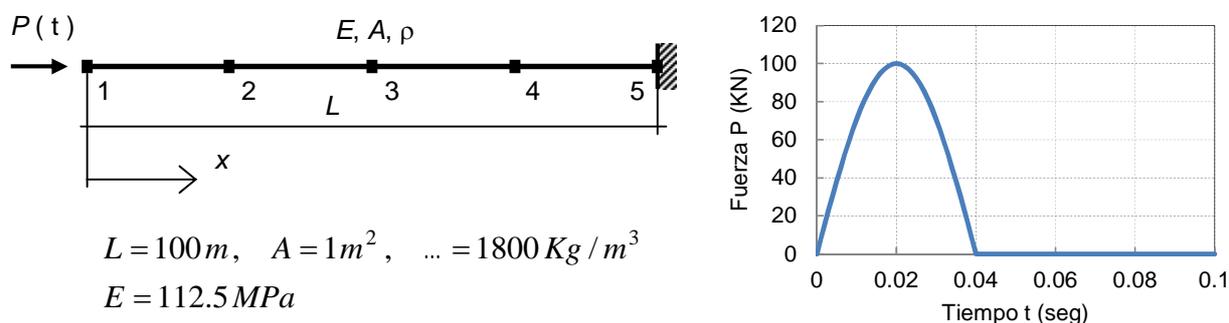
**Extremo fijo:** cuando la onda de compresión llega a un extremo fijo de la barra, la onda se refleja como una onda de compresión de la misma magnitud y forma, con una tensión doble en el extremo fijo donde la velocidad y el desplazamiento son nulos.

**Extremo libre:** una onda de compresión se refleja como una onda de tracción con la misma magnitud y forma, con tensión nula en el borde libre donde la velocidad y desplazamiento resultan en el doble de amplitud.

### 3 EJEMPLOS DE VALIDACIÓN NUMÉRICA

#### 3.1 Ejemplo 1: barra con extremo fijo

La barra que se muestra en la Figura 2 es solicitada por un pulso senoidal de media onda. Los valores numéricos se eligieron para representar aproximadamente las características de un suelo intermedio.



**Figura 2:** Barra con extremo fijo, puntos de control y definición del impulso

La velocidad de propagación de la onda resulta

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\dots}} = 250\text{ m/s} \quad (8)$$

Luego, el tiempo que tarda en llegar al extremo fijo es

$$t_L = \frac{L}{v_c} = 0.4\text{ s} \quad (9)$$

Reemplazando en la ec.(7)  $\dagger_x t_1$  por el impulso de la semionda seno, se obtiene el desplazamiento máximo

$$u = I \frac{v_c}{E} = \left( P_{\max} \frac{2 t_1}{f} \right) \frac{v_c}{E} = 5.66\text{ mm} \quad (10)$$

El algoritmo de integración en el tiempo utilizado en COMSOL es el denominado  $\alpha$ -generalizado, que es implícito, con precisión de segundo orden (Chung and Hulbert, 1993). Tiene un parámetro de control  $\dots_r$  para amortiguar las altas frecuencias. Para  $\dots_r = 1$  el método no tiene ningún amortiguamiento numérico, mientras que para  $\dots_r = 0$  tiene el máximo amortiguamiento. El valor por omisión es  $\dots_r = 0.75$ .

La precisión numérica de los resultados depende del tamaño de la malla y del paso de tiempo de integración de las ecuaciones de movimiento. Los criterios generalmente utilizados (Serón et al., 1990) son:

a) Debe haber al menos 10 nodos en cada longitud de onda para que pueda ser representada adecuadamente. La longitud de onda es la distancia recorrida por la perturbación en un tiempo entre dos máximos. Por ejemplo para una onda sinusoidal de frecuencia  $f$  y velocidad de propagación  $v_c$ , la longitud de onda es  $\lambda = v_c / f$ .

b) Para los métodos explícitos el paso de tiempo  $\Delta t$  debe satisfacer la condición de Courant:  $\check{S}_{cr} \Delta t = 2$ , donde  $\check{S}_{cr}$  es la mayor frecuencia de vibración del sistema. Se demuestra (Géradin and Rixen, 1994) que esa condición equivale a que  $\Delta t$  sea el tiempo que tarde la onda en recorrer la dimensión de un elemento. Si bien los métodos implícitos no tienen esa restricción, no es posible utilizar un paso temporal mucho mayor que el de los métodos explícitos para obtener buena precisión en los resultados.

El modelo numérico en COMSOL se realizó con elementos tipo viga (beam) utilizando una discretización con longitud máxima de elementos de 0.50m y un paso de tiempo de 0.002seg. La longitud del pulso aplicado es 10m, es decir hay 20 nodos para representarlo, y el frete de onda avanza en cada paso de tiempo una distancia 0.002seg x 250m/seg = 0.50m, es decir el tamaño de un elemento.

Los resultados de desplazamiento función del tiempo para puntos de control ubicados en el extremo libre, a 25, 50 y 75m, se presentan en la Figura 3.

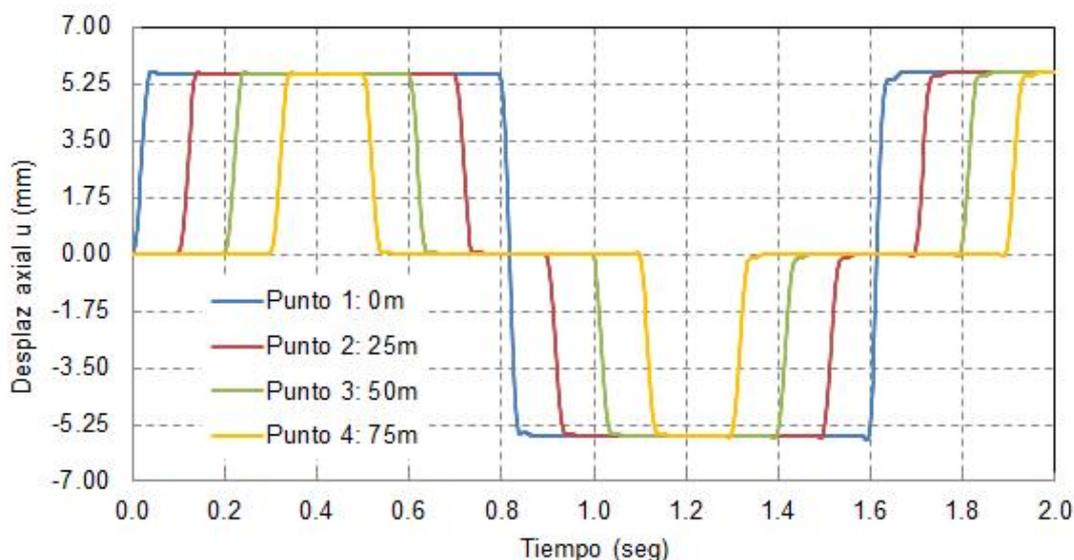


Figura 3: Desplazamientos en barra con extremo fijo

El desplazamiento máximo es 5.63mm en el extremo de la barra, punto 1, para  $t = 0.04$ seg. Luego hay una pequeña atenuación a 5.56mm debido a la utilización del parámetro  $\dots_r = 0$  para eliminar pequeñas oscilaciones de alta frecuencia (relativa al pulso de la onda). Esta diferencia menor al 2% con respecto al valor teórico se considera aceptable para lograr una

solución libre de “ruidos”.

Los mismos resultados se obtienen en los otros puntos de control, con arribo de la onda en tiempos de 0.1seg, 0.2seg y 0.3seg, exactamente coincidentes con la velocidad de propagación.

Cuando la onda retorna de la reflexión en el extremo fijo, el desplazamiento se anula debido a que la onda es también de compresión pero de sentido opuesto. Cuando la onda reflejada llega al extremo libre, se refleja como onda de tracción con el doble de desplazamiento y de sentido opuesto. Ese hecho se observa en la Figura 3 para el punto 1 y tiempo 0.8seg, resultando un desplazamiento -5.60mm.

La onda de tracción luego va arribando a los otros puntos de control y produciendo desplazamientos negativos de -5.60mm en todos ellos. El proceso se repite indefinidamente debido a que se supuso amortiguamiento material nulo.

La fuerza en el extremo libre y la reacción del apoyo fijo en el otro extremo de la barra se muestran en la Figura 4. Se observa el rebote de la onda en el extremo fijo con el doble del valor máximo de la carga, es decir 200kN, y con tiempo de arribo de 0.4seg exactamente. Pequeña distorsión numérica se produce después del rebote. El proceso se repite cada 0.8seg que es el tiempo que tarda en llegar hasta el extremo libre y regresar al extremo fijo.

En resumen, los resultados numéricos son muy aproximados, y en algunos casos exactos, a los resultados analíticos.

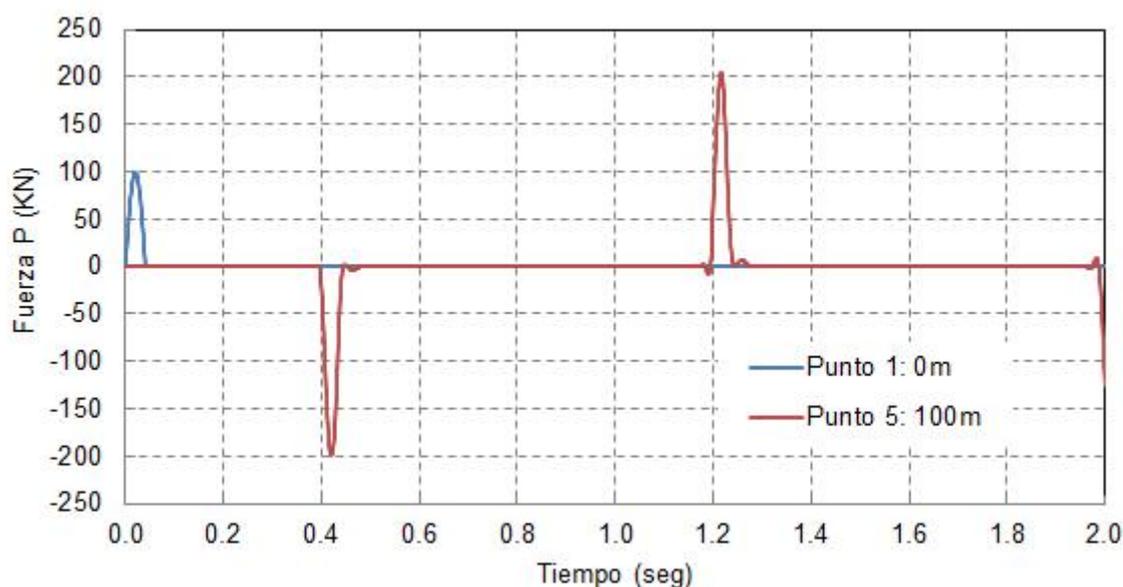


Figura 4: Fuerza aplicada y reacción en el extremo fijo

### 3.2 Ejemplo 2: barra libre - libre

En este ejemplo se analiza la misma barra presentada en la Figura 2, solicitada por un pulso senoidal de media onda, pero ahora con ambos extremos libres. Los resultados de desplazamientos se presentan en la Figura 5.

Como ambos extremos están libres, cada reflexión es de signo opuesto (compresión-tracción) y con el doble de desplazamiento. Así la barra va “reptando” con sucesivos acortamientos y alargamientos. La solución numérica reproduce la solución analítica con muy buena aproximación.

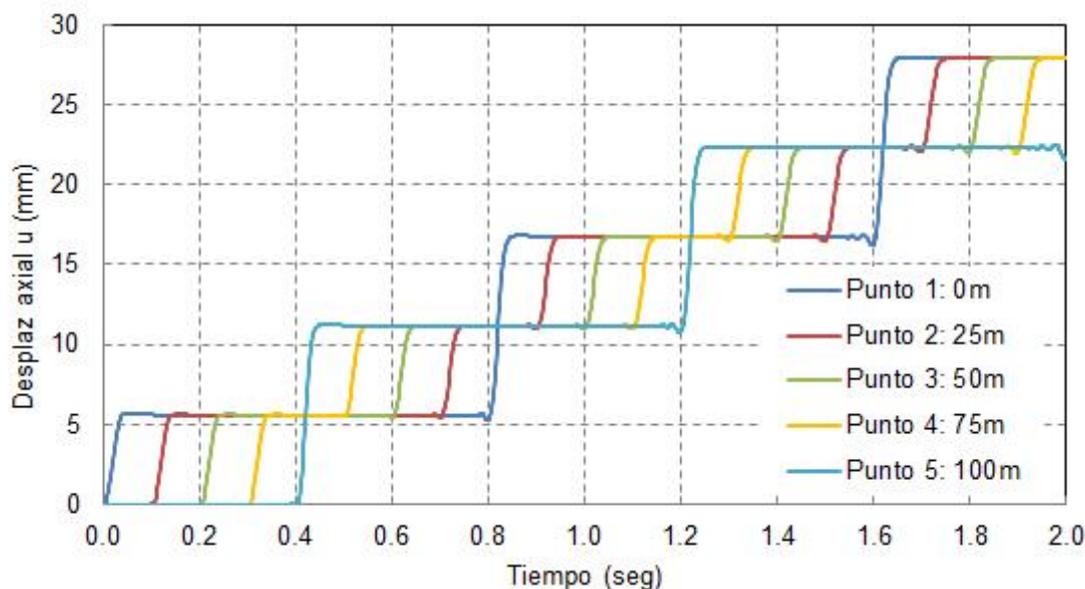


Figura 5: Desplazamientos en barra con ambos extremo libres

### 3.3 Ejemplo 3: barra semi infinita

Para analizar un fenómeno de transmisión de ondas en un medio semi infinito, pero sus efectos en un dominio limitado, se presenta el problema de la reflexión indeseada en los contornos del dominio finito utilizado para la discretización y solución numérica del problema. Entonces, en los contornos finitos se deben introducir condiciones de borde artificiales adecuadas para dejar pasar las ondas y no perturbar la solución correcta.

A partir de la solución general dada en ec.(4), cuando la onda incidente  $G$  encuentra un borde artificial, la onda debe pasar sin ninguna modificación para seguir propagándose hacia el infinito. No se debe generar ninguna onda reflejada  $F$  que se propague en la dirección opuesta. La onda  $G$  satisface esas condiciones de borde pero la  $F$  no.

Se demuestra, ver Wolf (1988), que si se utiliza como condición de borde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x=L,t) + \frac{\dot{u}}{v_c}(x=L,t) = 0 \quad (11)$$

que es cumplida estrictamente por  $G$  y resulta en  $F = 0$ , y se la denomina condición de radiación. La interpretación física de la condición de borde en  $x=L$  se obtiene multiplicando ec.(11) por  $EA$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{EA}{v_c} \dot{u} = 0 \rightarrow N + c \dot{u} = 0 \quad (12)$$

de donde resulta

$$c = A \dots v_c \quad (13)$$

La ec.(12) expresa el equilibrio en el borde artificial entre el esfuerzo normal y la fuerza de un amortiguador viscoso de coeficiente  $c$ , el cual reemplaza la parte de la barra hasta el infinito. Una importante ventaja para soluciones en el dominio del tiempo es que  $c$  no depende de la frecuencia.

En este ejemplo, en la barra de la Figura 2 se reemplaza el extremo fijo por un amortiguador viscoso de constante  $c = 450 \text{ KN seg} / \text{m}$  como resultado de aplicar la ec.(13). Los resultados numéricos obtenidos con COMSOL se reproducen en la Figura 6, utilizando la misma discretización y parámetros de los Ejemplos 1 y 2.

La onda va llegando a cada punto de control en el tiempo exacto de acuerdo a la velocidad de propagación. El desplazamiento máximo es  $5.66 \text{ mm}$ , igual al teórico y luego se produce una pequeña atenuación a  $5.58 \text{ mm}$  de acuerdo con lo explicado en el Ejemplo 1.

Luego, este desplazamiento permanece constante en el tiempo, señalando que no hay ninguna reflexión en el borde artificial.

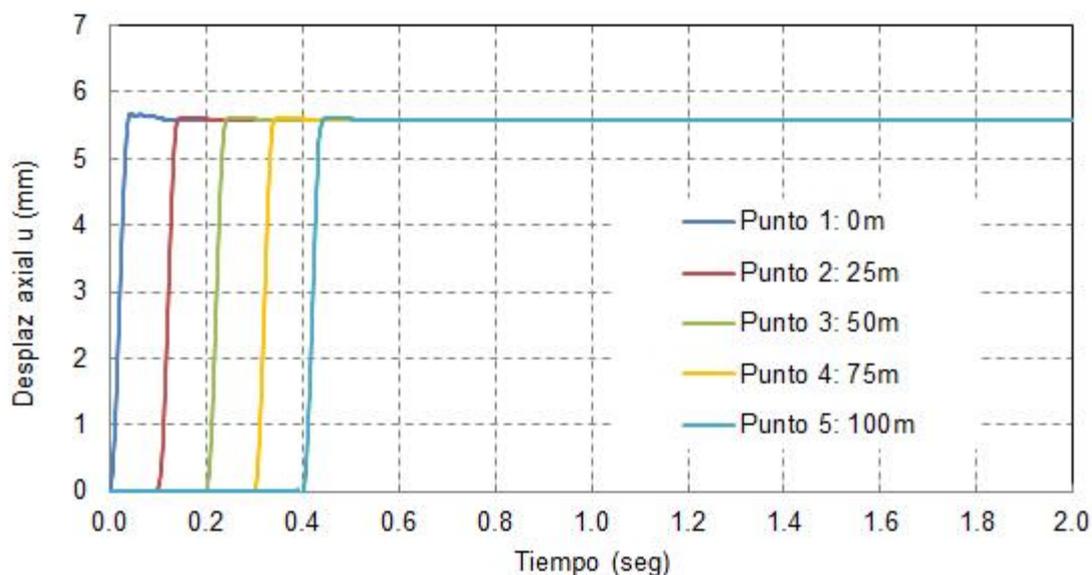


Figura 6: Desplazamientos en barra con extremo absorbente

## 4 TRANSMISIÓN DE ONDAS EN MEDIO ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL

### 4.1 Ondas en medio elástico infinito

Se resumen brevemente las ecuaciones diferenciales del movimiento en un medio elástico infinito (Das and Ramana, 2010)

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\dots} \nabla^2 \bar{v} = v_p^2 \nabla^2 \bar{v} \quad (14)$$

Donde  $\bar{v} = v_x + v_y + v_z$ , con  $v_x = \partial u / \partial x$ ,  $v_y = \partial v / \partial y$ ,  $v_z = \partial w / \partial z$ , y las constantes de Lamé  $\lambda = E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ ,  $G = E / (2(1 + \nu))$ , con  $E$  módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Considerando las rotaciones como  $\check{S}_x = 1/2 (\partial w / \partial y - \partial v / \partial z)$ ,  $\check{S}_y = 1/2 (\partial u / \partial z - \partial w / \partial x)$ , y  $\check{S}_z = 1/2 (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ , se obtiene

$$\frac{\partial^2 \check{S}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\dots} \nabla^2 \check{S}_x = v_s^2 \nabla^2 \check{S}_x \quad (15)$$

Otras dos ecuaciones como la ec.(15) se escriben para  $y$ ,  $z$ . En la ec.(14) es

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \tag{16}$$

la velocidad de ondas de dilatación, o también denominada ondas primarias (ondas-P) u ondas de compresión. Similarmente, de ec.(15) se obtiene la velocidad de las ondas de distorsión u ondas de corte (ondas-S)

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{17}$$

En resumen, hay dos tipos de ondas que se propagan en un medio elástico infinito y con velocidades diferentes. La relación entre ellas es

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \tag{18}$$

La ec.(18) muestra que la relación entre las velocidades siempre es mayor que 1, y además que para coeficiente de Piosson 0.5 la velocidad de las ondas P tiende a infinito.

#### 4.2 Ondas en semi-espacio elástico – Ondas de Rayleigh

Además de las ondas P y S descritas en el apartado anterior, cerca del borde de un semi-espacio existen otro tipo de ondas denominadas ondas de Rayleigh.

Si se considera un frente de onda plano (independiente de y) como se muestra en la Figura 7, el campo de desplazamientos puede expresarse como

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{19}$$

donde  $w, \Phi$  son funciones potenciales. Luego de algunos desarrollos (Das and Ramana, 2010) se llega a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 w, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \Phi \tag{20}$$

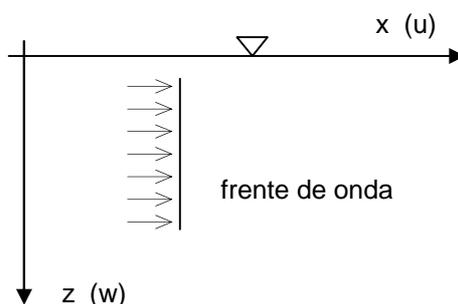


Figura 7: Onda plana en un semi-espacio elástico

Si se considera una onda sinusoidal moviéndose en la dirección x positiva, las funciones potenciales se pueden expresar como

$$w = F(z) \exp[i(\check{S}t - f x)] \quad \Phi = G(z) \exp[i(\check{S}t - f x)] \tag{21}$$

donde  $F(z)$  y  $G(z)$  son funciones de la profundidad y  $f = 2\pi / (\text{long onda})$ . Sustituyendo

ecs.(21) en ecs.(20), introduciendo las condiciones de borde en  $z = 0$ :  $\dagger_x = 0$ ,  $\dagger_{zx} = 0$  y  $\dagger_{zy} = 0$ , teniendo en cuenta que

$$\text{long onda} = \frac{\text{veloc onda}}{(\tilde{S}/2f)} = \frac{v_r}{(\tilde{S}/2f)} \rightarrow f = \frac{\tilde{S}}{v_r} \quad (22)$$

donde  $v_r$  es la velocidad de la onda de Rayleigh, operando se obtiene la solución con

$$V^6 - 8V^4 - (16r^2 - 24)V^2 - 16(1 - r^2) = 0 \quad (23)$$

con

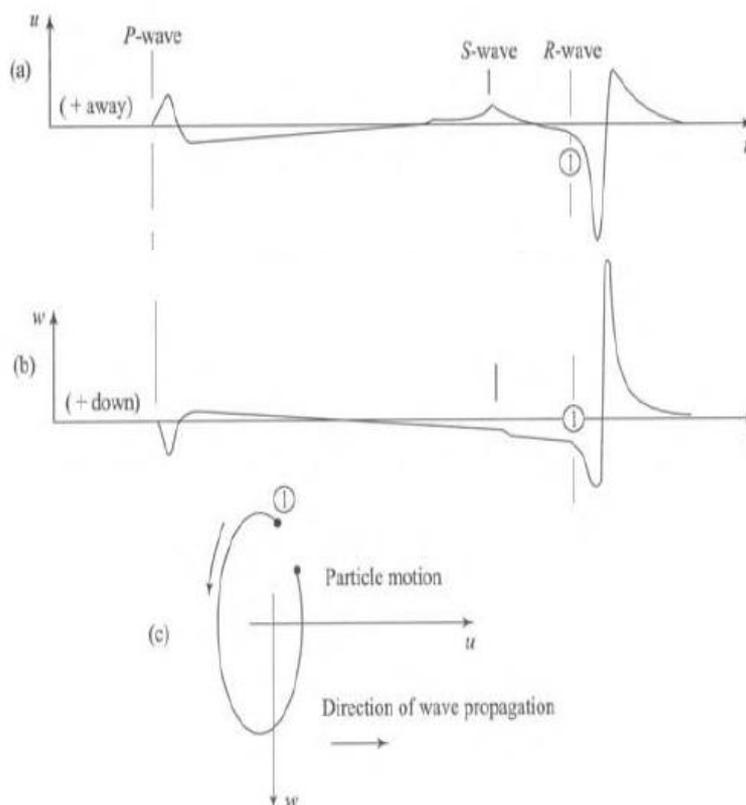
$$V^2 = \frac{v_r^2}{v_s^2} \quad r^2 = \frac{v_s^2}{v_p^2} = \frac{(1 - 2\nu)}{(2 - 2\nu)} \quad (24)$$

A partir del coeficiente de Poisson se calcula  $r^2$  con la segunda de ec.(24), luego se resuelve la ec.(23) que es cúbica en  $V^2$  y finalmente con la primera de ec.(24) se calcula  $v_r$  en función de  $v_s$  o de  $v_p$  con  $r^2$ .

También se puede luego resolver el campo de desplazamientos  $u$ ,  $w$  de las partículas, y se obtiene que es un trayectoria elíptica retrogradante, ver Figura 8(c), con su eje mayor perpendicular a la superficie.

### 4.3 Atenuación de las ondas con la distancia

Si un impulso de corta duración se genera en la superficie de un semi-espacio elástico, las ondas de cuerpo (P y S) se transmiten en el medio con un frente semiesférico. Las ondas de Rayleigh se propagan radialmente con un frente de ondas cilíndrico. A cierta distancia, los desplazamientos del suelo tendrán una forma como la mostrada en la Figura 8.

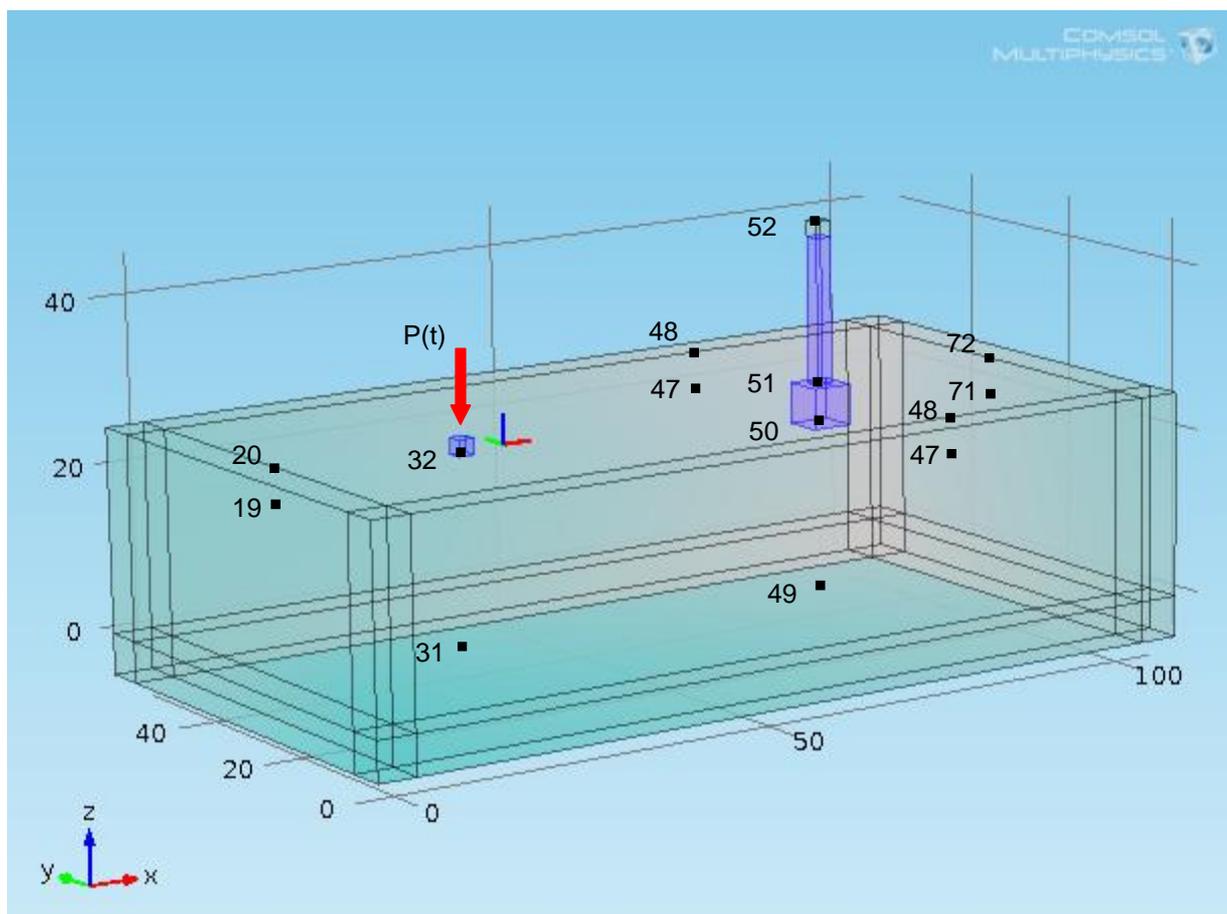


**Figura 8:** Sistema de ondas a partir de una fuente superficial (Das and Ramana, 2010)

A mayor distancia de la fuente, la energía entregada se distribuye en una superficie cada vez más grande. Se demuestra que las amplitudes de las ondas de cuerpo son proporcionales a  $1/r$ , mientras que las ondas de Rayleigh son proporcionales a  $1/\sqrt{r}$ , es decir se atenúan más lentamente que las de cuerpo. La pérdida de amplitud de las ondas por la distancia se denomina *amortiguamiento geométrico*. Además, está el *amortiguamiento material* debido a la disipación de energía por las características propias del material.

## 5 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Las soluciones analíticas se pueden obtener solamente para casos simples. Los problemas reales son más complejos y entonces se recurre a las soluciones numéricas aproximadas aplicando por ejemplo en método de elementos finitos. La Figura 9 muestra una aplicación resuelta mediante el software COMSOL (2012). Es una base de hormigón sobre la que impacta un peso de  $100\text{KN}$  que cae libremente desde una altura de  $5\text{m}$ . Se supone que toda la cantidad de movimiento se traduce en un impulso  $P(t)$  de forma de media onda senoidal de duración  $t_1 = 0.1\text{seg}$ , resultando el valor pico de la carga  $P_0 = 1586\text{KN}$ . A  $50\text{m}$  de distancia hay una estructura que es afectada por las vibraciones transmitidas. Tiene una base representada por un cubo de  $5\text{m}$  de lado, altura  $20\text{m}$  y masa superior de  $200000\text{Kg}$ . Las propiedades elásticas del suelo se eligieron como  $E = 112.5\text{MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 1800\text{Kg/m}^3$ .



**Figura 9:** Geometría y puntos de control

Se analizó un dominio de 100m de largo por 50m de ancho y 25m de profundidad, discretizado con elementos tipo tetraedros, tanto para el suelo como para la base donde se aplica el impulso y la estructura completa, totalizando 20127 grados de libertad. En la Figura 9 también se indican los puntos de control donde se analizarán los desplazamientos.

Para evitar las reflexiones de onda en los contornos del dominio finito, en lugar de utilizar amortiguadores como se describió en la sección 3.3, se utilizan los dominios o elementos infinitos (COMSOL Reference Manual, 2012), que son los elementos dispuestos en el contorno del dominio analizado como se muestra en la Figura 9.

El concepto de los dominios infinitos es introducir una función de estiramiento como una función de coordenadas adimensional  $\zeta$  que varía linealmente desde 0 para el límite del dominio a analizar, hasta 1 para el infinito.

$$\zeta = \frac{\mathbf{n}_\zeta \cdot \mathbf{x} - x_0}{\Delta_w} \quad (25)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas original no escalado,  $\Delta_w$  el espesor original del elemento infinito,  $x_0$  la distancia de referencia para que  $\zeta = 0$  en el borde, y  $\mathbf{n}_\zeta$  versor en la dirección del estiramiento.

El vector de coordenadas escalado  $\mathbf{x}'$ , en el cual las ecuaciones son reformuladas dentro del dominio del elemento infinito, resulta

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_\zeta f(\zeta) \quad (26)$$

Donde  $f(\zeta)$  es la función escalar de estiramiento,  $\mathbf{x}_0$  es la proyección del vector de coordenadas no escalado  $\mathbf{x}$  sobre la superficie  $\zeta = 0$ . La función de estiramiento se define con

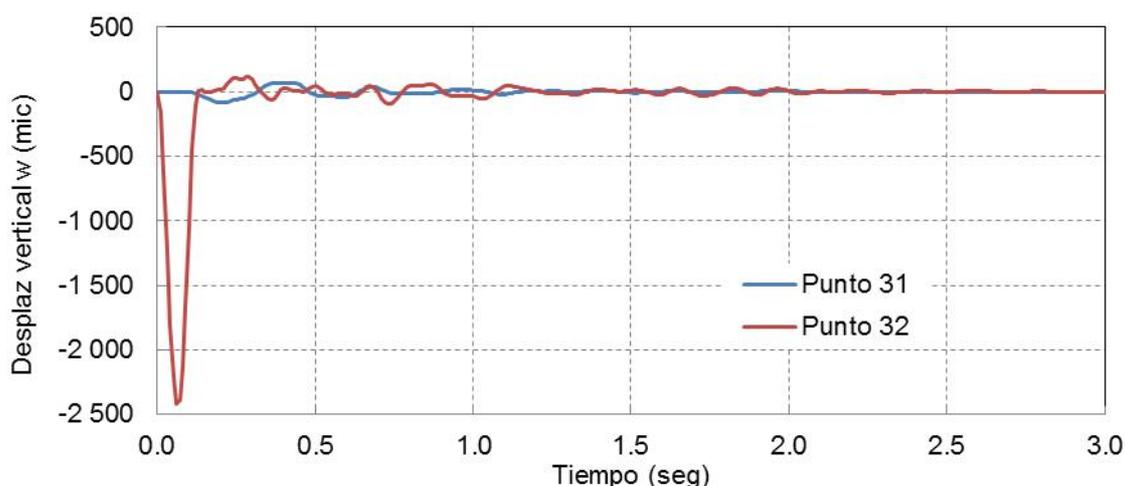
$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{\chi - \zeta} \Delta_p \quad \text{donde} \quad \chi = \frac{\Delta_s + \Delta_p}{\Delta_s} \quad (27)$$

Siendo  $\Delta_p$  es la distancia al polo o foco del problema, definida por omisión en COMSOL como la dimensión característica de la geometría, y  $\Delta_s$  el espesor escalado del dominio del elemento infinito, definido por omisión como  $10^3$  veces la dimensión característica de la geometría, es decir una cantidad muy grande pero no infinita para evitar problemas numéricos. Estos dos parámetros también pueden ser definidos por el usuario. Si se utilizan los valores por omisión, el estiramiento de las coordenadas presenta un comportamiento cercano a  $1/r$  que es adecuado para la resolución de la malla.

El tiempo de procesamiento en PC estándar fue de 174seg, y en la Figura 10 se muestran los resultados de desplazamientos verticales en puntos inmediatamente debajo de la base que recibe el impacto, Pto.32, y en el fondo del dominio analizado, Pto.31.

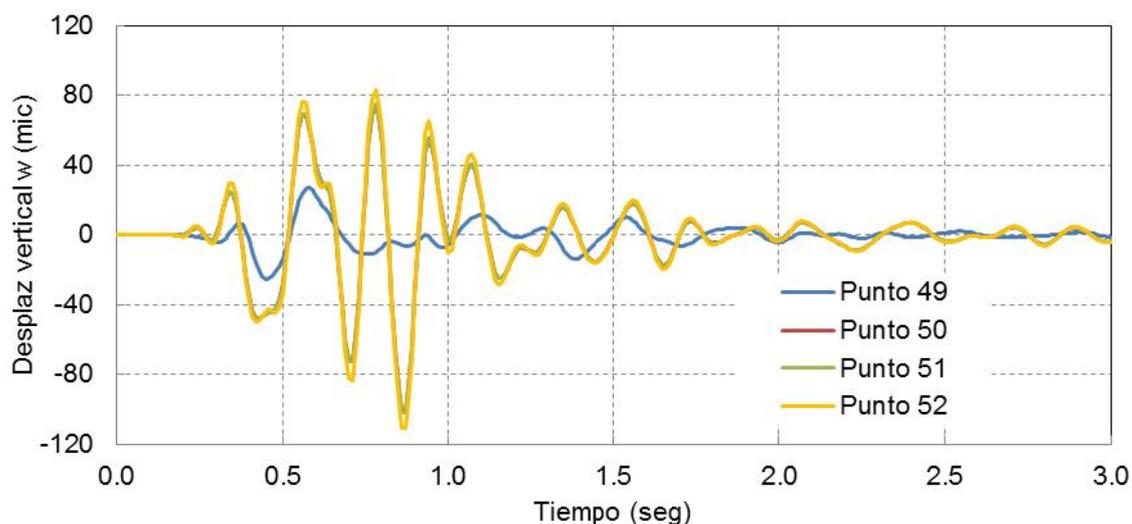
Debajo de la aplicación del impacto, la forma del desplazamiento es similar al impulso, mientras que en el fondo, a 25m, la amplitud ya se ha reducido considerablemente por el amortiguamiento geométrico. También se observa que no llegan ondas reflejadas, y que los desplazamientos tienden a cero por el amortiguamiento material.

En las Figuras 11 y 12 se presentan los desplazamientos en correspondencia con la estructura ubicada a 50m de la fuente de impacto. A partir de las ecs.(16) y (17) la velocidad de ondas de dilatación, ondas-P, es  $v_p = 225\text{m/seg}$ , y la velocidad de ondas de corte, ondas-S, resulta  $v_s = 85\text{m/seg}$ . La velocidad de las ondas de Rayleigh es similar a las ondas de corte.



**Figura 10:** Desplazamientos en puntos de control referidos a la base

El tiempo para recorrer  $50m$  es de  $0.22seg$  para las ondas P,  $0.59seg$  para las ondas S y  $0.64seg$  para las de Rayleigh. Se observa en las Figuras 11 y 12 que en  $0.19seg$  arriban las primeras ondas y que en  $0.56seg$  hay otro pico en el desplazamiento del suelo, Ptos.49 y 50. Las ondas tienen un poco más de velocidad que en los cálculos analíticos, lo que estaría indicando un comportamiento algo más rígido del modelo debido a la discretización. De todas maneras los resultados se consideran aceptables.

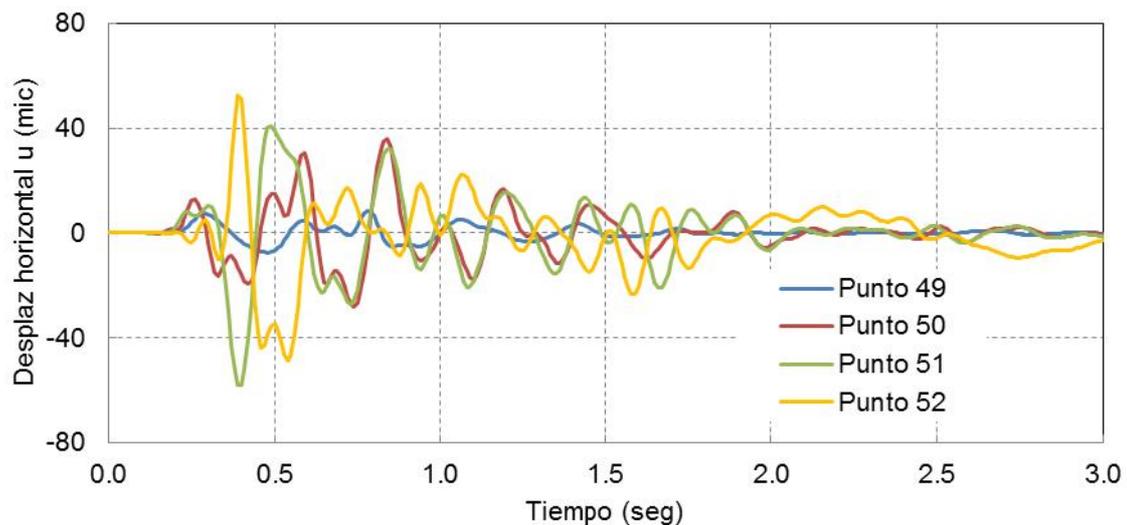


**Figura 11:** Desplazamientos verticales en puntos de control referidos a la estructura

En la Figura 11 los desplazamientos verticales son casi coincidentes para los tres puntos de la estructura, con solo pequeñas diferencias en los picos para el Pto.52 del extremo superior, mientras que en el fondo del dominio discretizado, Pto.49, los desplazamientos son bastante menores por la mayor distancia y amortiguamiento geométrico. Luego de pasadas las ondas, la estructura y suelo tienen una vibración libre amortiguada que tiende a cero. No se observan reflexiones de los contornos.

La figura 12 presenta los desplazamientos horizontales. Los Ptos.50 y 51, abajo y arriba de la fundación, tienen desplazamientos en fase pero con magnitudes diferentes hasta  $0.6seg$ , que se puede interpretar por la diferente combinación del arribo de ondas de cuerpo y de Rayleigh,

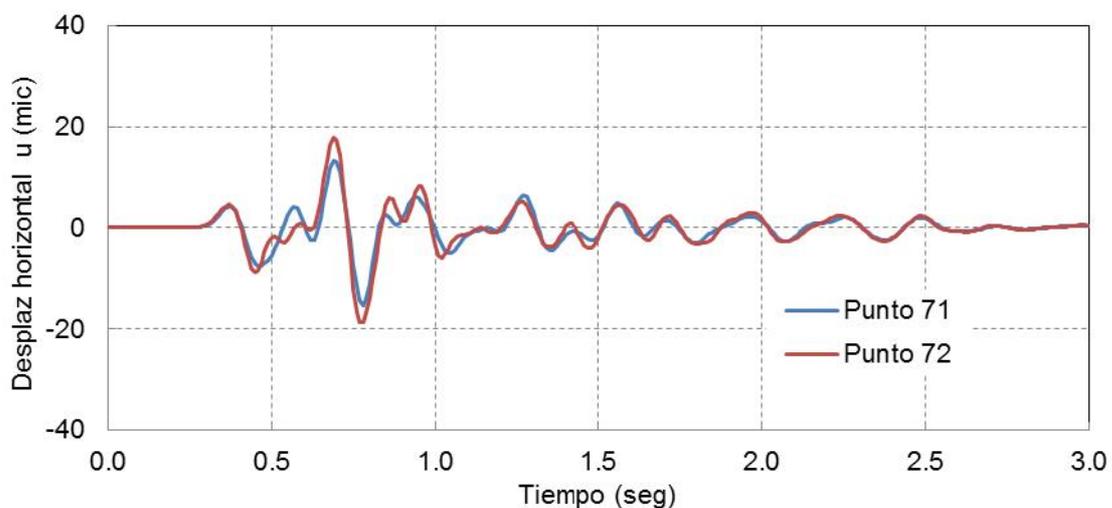
de mayor incidencia en superficie. Después que pasó el tren de ondas, en el periodo de vibración libre amortiguada las amplitudes ya coinciden. El Pto.52, en la parte superior de la estructura, tiene desplazamientos en sentido opuestos a los de la base. Es correcto debido a la inercia de la masa superior de 200000Kg, es decir cuando la base se mueve para adelante, la masa superior lo hace hacia atrás. Los desplazamientos en el fondo del dominio, Pto.49, son de menor amplitud, y no se observan reflexiones.



**Figura 12:** Desplazamientos horizontales en puntos de control referidos a la estructura

Los desplazamientos verticales son mayores que los horizontales, más significativo a partir de 0.56seg con el arribo de las ondas S y de Rayleigh, lo que estaría de acuerdo con las amplitudes de la onda de Rayleigh, de forma elíptica y con el eje mayor en la dirección vertical, ver Figura 8.

En la Figura 13 se pueden observar los desplazamientos horizontales en puntos de control ubicados sobre uno de los bordes del dominio discretizado, ver Figura 9. El arribo de las ondas P ocurre en 0.29seg un poco antes de 0.33seg calculado con  $v_p$  teórico. El otro pico se observa en 0.7seg aproximadamente, un poco inferior a 0.88seg calculado teóricamente.



**Figura 13:** Desplazamientos horizontales en puntos de control referidos al borde

Hay que considerar la presencia del bloque de fundación de mayor rigidez que el suelo. En el punto de superficie, Pto.72, la amplitud es ligeramente superior al del Pto.71 ubicado a 5m de profundidad, que se puede interpretar por la mayor influencia de las ondas de Rayleigh. Las amplitudes son menores que en los Ptos.50 y 51, ver Figura 12, que es coherente por la mayor distancia y amortiguamiento geométrico.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el desempeño numérico del software COMSOL Multiphysics para representar el fenómeno de transmisión de ondas por el suelo, y entonces poder predecir los desplazamientos de una estructura solicitada por una perturbación dinámica con fuente distante.

En el fenómeno de transmisión unidimensional, los resultados numéricos coinciden con los valores de la solución analítica, tanto para condiciones de borde fijo-libre como para libre-libre. La representación de un dominio unidimensional semi-infinito mediante un borde absorbente con un amortiguador viscoso ubicado a una distancia finita, también produce resultados coincidentes con las soluciones analíticas, especialmente en lo referente a que no refleja ninguna onda en el extremo artificial.

Para la aplicación a problemas tridimensionales, como son los problemas reales, se analizó el impacto sobre una base de hormigón que genera un tren de ondas que se transmite por un suelo considerado como medio elástico y afecta a una estructura ubicada a 50m de distancia.

Los resultados numéricos muestran que se captura adecuadamente el fenómeno, con tiempos de arribo de las ondas algo menores a los teóricos, indicando un modelo un poco más rígido. Cualitativamente los desplazamientos obtenidos son coherentes, y no se observan reflexiones en los bordes del dominio discretizado, con lo que se infiere que los elementos infinitos cumplen adecuadamente su función. En síntesis, la herramienta numérica es alentadora para abordar problemas más complejos.

En los próximos trabajos se tratará la verificación cuantitativa de los desplazamientos, la utilización de otras discretizaciones y tipos de elementos, la utilización de modelos de suelo no lineal, por ejemplo Mohr-Coulomb, y la utilización de otras fuentes de perturbación dinámica más realistas.

## REFERENCIAS

- Bertero, R.D., Lehmann, A.V., Verri, A., Vaquero, S., Mussat, J.M. Vibraciones en edificios cercanos originados por espectáculos musicales en estadios. *Memorias 21 Jornadas de Ingeniería Estructural*, AIE, T-006, 2010.
- Bertero, R.D., Mussat, J.M., Verri, A., Lehmann, A.V. Vibraciones en edificios originadas por la hinca de tablestacas en centros urbanos. *Memorias 22 Jornadas de Ingeniería Estructural*, AIE, T-053, 2012.
- Clough, R.W, Penzien, J. *Dynamics of Structures*. Mc Graw-Hill, 1975.
- Chung, J., Hulbert, G.M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. *J. Appl. Mech.*, 60: 371–375, 1993.
- COMSOL Multiphysics Reference Manual, version 4.3, Comsol, 2012.
- Das, B.M., Ramana, G.V. *Principles of Soil Dynamics*. 2nd Ed, Cengage Learning, 2010.
- Gérardin, M., Rixen, D., *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural*

- Dynamics*. John Wiley & Sons, 1994.
- IRAM 4077 Vibraciones mecánicas y choques. Vibraciones en edificios. *Instituto Argentino de Normalización*. Parte I, 1997. Parte 2, 2005.
- IRAM 4078 Guía para la exposición humana a vibraciones del cuerpo entero. *Instituto Argentino de Normalización*. Parte I, 1989. Parte II, 1990. Parte III, 1991.
- Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society* (London) A203, I-42, 1904.
- Parkhouse, J.G. and Ewins, D.J. Crowd-induced rhythmic loading. *Structures & Buildings* 159, 247-259, 2006.
- Seron, F.J., Sanz, F.J., Kindelan, M., Perez, C. El método de los elementos finitos para el modelado de la ecuación de ondas con un procesador vectorial. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol.6 (4) 573-593, 1990.
- Wolf, J.P. *Soil-structure-interaction analysis in time domain*. Prentice Hall, Inc, 1988.