

## ANÁLISIS DINÁMICO DE PLACAS LAMINADAS GRUESAS PERFORADAS

Rita F. Rango<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup> y Sergio Oller<sup>b</sup>

<sup>a</sup>ICMASa, INQUI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar), <http://www.ing.unsa.edu.ar>

<sup>b</sup>CIMNE. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España, [sergio.oller@upc.edu](mailto:sergio.oller@upc.edu), <http://www.cimne.upc.es>

**Palabras clave:** Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, Placas Laminadas Perforadas, Macro Elemento Finito.

**Resumen.** En este trabajo se emplean macro elementos de placa, formulados por los autores a partir de la cinemática de la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte (TSDT), para el estudio de vibraciones libres de estructuras de placas laminadas gruesas perforadas.

Mediante el uso de esta teoría se asegura una variación sinusoidal de los desplazamientos a lo largo del espesor y se verifica la condición de tensiones de corte nulas en las superficies superior e inferior del laminado, así como la compatibilidad de desplazamientos en el plano en las superficies interlaminares. Por otro lado, se evita el bloqueo por cortante y no se requiere el empleo de factores de corrección por corte.

El macro elemento formulado permite discretizar la superficie de una placa mediante una malla con la mínima cantidad de elementos, a diferencia del empleo de elementos finitos clásicos. Esto permite reducir notablemente el coste computacional, además de optimizar los cálculos repetitivos, permitiendo modificar parámetros geométricos y mecánicos, tales como espesor, número de capas, secuencia de apilamiento y ángulo de orientación de las fibras.

En este trabajo se obtienen, a partir del Principio de los Trabajos Virtuales, las ecuaciones dinámicas gobernantes y las condiciones de contorno. Asimismo, se determinan las variables primarias y secundarias necesarias para definir las funciones de aproximación de las componentes del campo de desplazamientos. A partir de esto, y mediante un planteo integral se desarrolla una formulación que se emplea en este trabajo para el análisis dinámico de placas laminadas gruesas perforadas, considerando diferentes condiciones de contorno.

Se presentan diferentes resultados numéricos que permiten destacar las ventajas de la formulación desarrollada y las aptitudes de la formulación frente a la sensible reducción del coste computacional. Además, para algunos casos particulares, los resultados numéricos obtenidos se comparan con los publicados por otros autores, mostrando una buena correlación.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos reforzados con fibras son muy importantes en muchas ramas de la ingeniería. En general, estos materiales pueden diseñarse para satisfacer requerimientos de resistencia, rigidez y otros parámetros en cualquier dirección, y son de particular interés en la fabricación de piezas para las industrias aeronáutica, aeroespacial, naval y de automóviles. Por otra parte, la aplicación de materiales compuestos con fines estructurales en obras civiles también está siendo relevante.

Para el análisis de placas de material compuesto laminado se han empleado a lo largo de los años diversas teorías, partiendo de la teoría de clásica (CLPT) (Timoshenko, 1959), la teoría de primer orden de deformación por corte (FSDT) (Reissner 1945; Mindlin 1951), hasta las teorías de deformación por corte de orden superior (HSDT). Las HSDT (Reddy, 1993) usan una función de la coordenada del espesor de la placa ( $z$ ) para representar el campo de desplazamiento no lineal a lo largo del mismo. El empleo de estas teorías conduce a una mejor estimación de las tensiones interlaminares. Las teorías trigonométricas (TSDT) (Mantari et al., 2012a, 2012b) usan un término sinusoidal para representar el desplazamiento no lineal a lo largo del espesor. Este tipo de modelos satisface la continuidad de desplazamiento y tensión de corte transversal en las interfaces. Las teorías trigonométricas satisfacen además la condición de contorno de tensión de corte transversal nula en los planos superior e inferior de la placa. Ferreira et al. (2005) aplicaron la TSDT al análisis estático de placas compuestas laminadas cruzadas simétricas, mientras que Xiang y Wang (2009) emplearon también la TSDT en el análisis de vibración libre de placas laminadas cruzadas simétricas.

En el presente trabajo se aplica un macro elemento finito enriquecido, desarrollado por los autores (Rango et al., 2012, 2013), que incorpora en su cinemática la TSDT. La metodología permite estudiar placas laminadas gruesas perforadas de forma general, a partir del ensamblaje de un número mínimo de macro elementos finitos. Este macro elemento finito se basa en la utilización de funciones de forma clásicas, enriquecidas con la incorporación de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt, y coordenadas naturales en las que se define un elemento isoparamétrico. La metodología se desarrolla y se aplica al estudio de la vibración libre de placas compuestas laminadas gruesas, con diferentes secuencias de apilamiento y con una perforación interna de forma general.

## 2 FORMULACIÓN DEL MACRO ELEMENTO

### 2.1 Energía de deformación y energía cinética

Sea la placa cuadrilátera laminada de espesor  $h$ , la cual en coordenadas Cartesianas  $(x, y)$  se muestra en la Figura 1, cuyo dominio en el plano resulta limitado por las rectas que unen sus esquinas consecutivas.

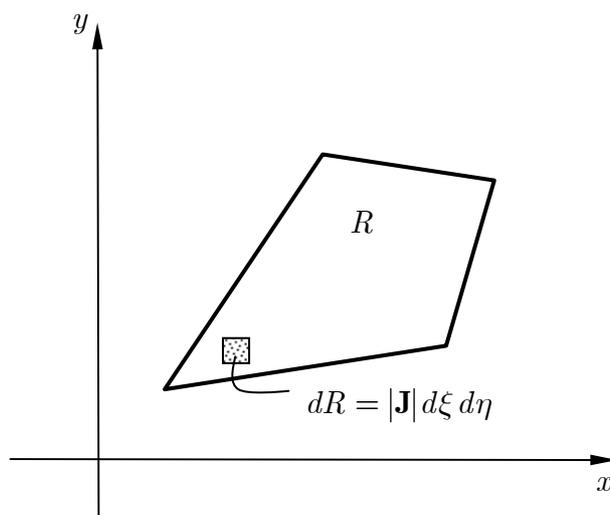


Figura 1: Placa cuadrilátera laminada

Cada capa del laminado es de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales y la secuencia de apilamiento es simétrica respecto del plano medio, como el ejemplo que muestra la Figura 2.

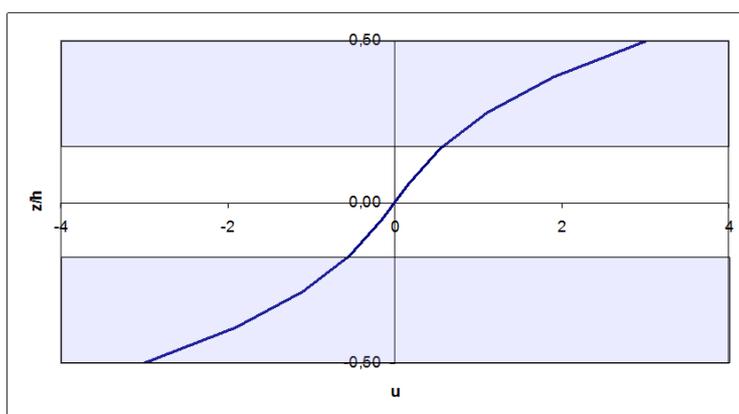


Figura 2: Ejemplo de laminado simétrico de 3 capas con variación de la deformación de la sección transversal según TSDT.

Basado en la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, el campo de desplazamientos propuesto está dado por:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = w_0$  son las componentes de desplazamiento a lo largo de los ejes  $(x, y, z)$  y  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son las rotaciones de las normales al plano medio alrededor de los ejes  $y$  y  $x$ ,

respectivamente. Para el análisis de vibraciones libres, los desplazamientos se asumen dependientes del espacio y del tiempo separadamente, siendo periódicos en el tiempo:  $w_0(x, y, t) = w(x, y) \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia natural.

Las componentes de deformación para la TSDT, considerando laminados simétricos, y en función de las Ecs. (1), resultan:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\ \sin \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \sin \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} (\phi_x) \\ \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} (\phi_y) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Las relaciones tensión-deformación en el sistema de coordenadas locales (ejes principales de ortotropía), para cada lámina, están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde los subíndices 1 y 2 corresponden, respectivamente, a la dirección paralela y perpendicular a la fibra, en el plano, y el subíndice 3 a la dirección normal al plano de la placa. Las componentes  $Q_{ij}$  están dadas por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \nu_{21}Q_{11}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{33} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{31}$$

donde  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{23}, G_{31}$  son las propiedades del material de cada lámina.

Mediante una transformación de coordenadas, las relaciones tensión-deformación en las coordenadas Cartesianas globales  $(x, y, z)$  resultan para cada lámina del laminado, dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

donde  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) son las denominadas rigideces reducidas transformadas (Reddy, 2003) y son función de las propiedades mecánicas de cada lámina y del ángulo de inclinación de las fibras ( $\beta$ ) respecto del eje  $x$ .

Las ecuaciones que gobiernan el problema se derivan a partir de la versión dinámica del Principio de los Trabajos Virtuales.

La energía virtual de deformación  $\delta U$  está dada por:

$$\delta U = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dz \right\} dx dy \quad (5)$$

Reemplazando las expresiones correspondientes de la Ec. (2) en la Ec. (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \sin \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \right\} dx dy \quad (6) \end{aligned}$$

La energía virtual cinética  $\delta K$  está dada por

$$\delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx dy \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material, considerada uniforme en el volumen del laminado.

Reemplazando en la Ec. (7) las Ecs. (1) del campo de desplazamiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[ \left( -z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_x \right) \left( -z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_x \right) + \right. \\ \left. + \left( -z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_y \right) \left( -z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_y \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (8) \end{aligned}$$

Reemplazando las Ecs. (6) y (8) en la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left( -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \sin \frac{\pi z}{h} \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz dx dy \right. \\ \left. - \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[ \left( -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_x \right) \left( -z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_x \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_y \right) \left( -z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_y \right) + \dot{w} \delta \dot{w} \right] dz dx dy \right\} dt \quad (9) \end{aligned}$$

Considerando las relaciones constitutivas (Reddy, 2003) y la energía cinética máxima correspondiente a un ciclo de vibración completa, la Ec. (9) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \bar{Q}_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
& + \bar{Q}_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \\
& + \left( \bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{22} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
& + \bar{Q}_{26} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] \left( \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \\
& + \left( \bar{Q}_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
& + \bar{Q}_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \sin \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{66} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] \left[ \left( \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \sin \frac{\pi z}{h} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] + \\
& + \left( \bar{Q}_{45} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{55} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \\
& + \left. \left( \bar{Q}_{44} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{45} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \Big\} dx dy \\
& - \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \omega^2 \rho \left[ \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_x \right) \left( -z \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \phi_x \right) + \right. \\
& + \left. \left( -z \frac{\partial w}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_y \right) \left( -z \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \delta \phi_y \right) + w \delta w \right] dz dx dy
\end{aligned} \tag{10}$$

donde  $\bar{Q}_{ij}$  son las rigideces mecánicas reducidas referidas a los ejes  $x, y$ .

Integrando a lo largo del espesor  $z$ , la Ec. (10) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_R \left[ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} A1_{11}^S & A1_{12}^S & A1_{16}^S \\ A1_{12}^S & A1_{22}^S & A1_{26}^S \\ A1_{16}^S & A1_{26}^S & A1_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
& + \int_R \left[ \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy \\
& - \int_R \left[ \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
& - \int_R \left[ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy \\
& + \int_R \left[ \delta \phi_y \quad \delta \phi_x \right] \begin{bmatrix} A2_{44}^S & A2_{45}^S \\ A2_{45}^S & A2_{55}^S \end{bmatrix} \left[ \phi_y \quad \phi_x \right]^T dx dy \\
& - \int_R \omega^2 \rho \left[ \frac{h^3}{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{2h^2}{\pi^2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \phi_x - \frac{2h^2}{\pi^2} \phi_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{h}{2} \phi_x \delta \phi_x + \right. \\
& \left. + \frac{h^3}{12} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{2h^2}{\pi^2} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \phi_y - \frac{2h^2}{\pi^2} \phi_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{h}{2} \phi_y \delta \phi_y + h w \delta w \right] dx dy
\end{aligned} \tag{11}$$

donde  $A1^S, A2^S, B^S, D$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
A1_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \sin^2 dz \left( \frac{\pi z}{h} \right), & A2_{ij}^S &= \left( \frac{\pi}{h} \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \cos^2 \left( \frac{\pi z}{h} \right) dz \\
B_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) dz, & D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz
\end{aligned}$$

## 2.2 Mapeo de la geometría de la placa

La técnica de mapeo es comúnmente usada en análisis por elementos finitos o en conjunto con otros métodos, para estudiar el comportamiento dinámico de placas de diversas formas geométricas. Nallim et al. (2005) y Nallim y Oller (2008) combinaron el mapeo de espacios con el método de Ritz para encontrar la respuesta estática y dinámica de placas laminadas delgadas, simétricas y no simétricas. La placa tiene una forma arbitraria, que en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  representa un dominio  $R$ . Las expresiones analíticas correspondientes a esta placa pueden ser expresadas en otras variables mediante el uso de una aplicación que

transforma un dominio cuadrado  $\tilde{R}$  en el dominio  $R$ . El dominio  $\tilde{R}$  corresponde a la placa de referencia o elemento generatriz y está definido en sus coordenadas naturales por las simples ecuaciones de su contorno  $\xi = \pm 1$  y  $\eta = \pm 1$ . La aplicación que realiza la transformación entre  $R$  y  $\tilde{R}$  (o lo que es equivalente, entre  $(x, y)$  y  $(\xi, \eta)$ ) está dada por (Zienkiewicz, 1991; Reddy, 1993):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 4$  son las coordenadas de las cuatro esquinas de la región cuadrilátera  $R$  y  $M_i(\xi, \eta)$  son las funciones lineales de interpolación o funciones de forma que definen la geometría del elemento, y que están dadas por:

$$M_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \quad (13)$$

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  son las coordenadas naturales de la  $i$ -ésima esquina.

El objetivo de la transformación de espacios es aplicar la metodología en la placa cuadrada de referencia como un único macro elemento finito. Para ello, es necesario escribir las expresiones del campo de desplazamientos y sus derivadas en las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ . Para esto se aplica sucesivamente la regla de derivación de funciones compuestas (el desarrollo para las funciones que aproximan los giros  $\phi_x$  y  $\phi_y$ , es igual al presentado para la función  $w$  que aproxima las deflexiones) y están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|\mathbf{J}|} & -\frac{J_{12}}{|\mathbf{J}|} \\ -\frac{J_{21}}{|\mathbf{J}|} & \frac{J_{11}}{|\mathbf{J}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$y \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [Op^{(1)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} + [Op^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde  $[Op^{(1)}]$  y  $[Op^{(2)}]$  son los operadores que permiten realizar la transformación de espacios y están dados por:

$$[Op^{(1)}] = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & -a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & -b'_3 \\ -c'_1 & -c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}, \quad [Op^{(2)}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 a'_i \beta'_i \\ \sum_{i=1}^3 b'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 b'_i \beta'_i \\ -\sum_{i=1}^3 c'_i \alpha'_i & -\sum_{i=1}^3 c'_i \beta'_i \end{bmatrix}$$

$$\text{siendo: } a'_1 = \frac{J_{22}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad a'_2 = \frac{J_{12}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad a'_3 = 2 \frac{J_{12} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_1 = \frac{J_{21}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_2 = \frac{J_{11}^2}{|\mathbf{J}|^2}, \quad b'_3 = 2 \frac{J_{11} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2}$$

$$c'_1 = \frac{J_{21} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad c'_2 = \frac{J_{11} J_{12}}{|\mathbf{J}|^2}, \quad c'_3 = \frac{J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2}$$

$$\alpha'_1 = \frac{-J_{11,\xi} J_{22} + J_{12,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, \quad \alpha'_2 = \frac{-J_{21,\eta} J_{22} + J_{22,\eta} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, \quad \alpha'_3 = \frac{J_{11,\eta} J_{22} - J_{22,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|}$$

$$\beta'_1 = \frac{J_{11,\xi} J_{12} - J_{12,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, \quad \beta'_2 = \frac{J_{21,\eta} J_{12} - J_{22,\eta} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, \quad \beta'_3 = \frac{-J_{11,\eta} J_{12} + J_{22,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|}$$

y donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas y su expresión es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i M_{i,\xi} & \sum y_i M_{i,\xi} \\ \sum x_i M_{i,\eta} & \sum y_i M_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Mientras que

$$dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (17)$$

### 2.3 Polinomios ortogonales

Las funciones incógnitas  $w, \phi_x, \phi_y$  de la Ec. (11) se aproximan mediante el producto de funciones de forma en coordenadas naturales  $\xi, \eta$  por los respectivos desplazamientos generalizados.

$$w(\xi, \eta) = \{N^w(\xi, \eta)\}^T \{c^w\}$$

$$\phi_x(\xi, \eta) = \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_x}\} \quad (18)$$

$$\phi_y(\xi, \eta) = \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_y}\}$$

donde:

$\{c^w\}, \{c^{\phi_x}\}, \{c^{\phi_y}\}$  son los vectores de desplazamientos generalizados incógnitas y

$$\{N^{(\bullet)}(\xi, \eta)\} = [p_1^{(\bullet)}q_1^{(\bullet)}, p_1^{(\bullet)}q_2^{(\bullet)}, p_1^{(\bullet)}q_3^{(\bullet)}, p_1^{(\bullet)}q_4^{(\bullet)}, p_1^{(\bullet)}q_5^{(\bullet)}, \dots, p_1^{(\bullet)}q_n^{(\bullet)},$$

$$p_2^{(\bullet)}q_1^{(\bullet)}, p_2^{(\bullet)}q_2^{(\bullet)}, p_2^{(\bullet)}q_3^{(\bullet)}, p_2^{(\bullet)}q_4^{(\bullet)}, p_2^{(\bullet)}q_5^{(\bullet)}, \dots, p_2^{(\bullet)}q_n^{(\bullet)},$$

$$p_3^{(\bullet)}q_1^{(\bullet)}, p_3^{(\bullet)}q_2^{(\bullet)}, p_3^{(\bullet)}q_3^{(\bullet)}, p_3^{(\bullet)}q_4^{(\bullet)}, p_3^{(\bullet)}q_5^{(\bullet)}, \dots, p_3^{(\bullet)}q_n^{(\bullet)}, \dots, \quad (\bullet) = w, \phi_x, \phi_y$$

$$p_n^{(\bullet)}q_1^{(\bullet)}, p_n^{(\bullet)}q_2^{(\bullet)}, p_n^{(\bullet)}q_3^{(\bullet)}, p_n^{(\bullet)}q_4^{(\bullet)}, p_n^{(\bullet)}q_5^{(\bullet)}, \dots, p_n^{(\bullet)}q_n^{(\bullet)}] = \mathbf{N}^{(\bullet)}$$

son los vectores que incluyen las funciones de forma.

Los primeros polinomios de  $\mathbf{N}^{(\bullet)}$ ,  $(\bullet) = w, \phi_x, \phi_y$  son los polinomios de Hermite  $p_i^w(\xi)$ ,  $q_j^w(\eta)$  ( $i, j = 1 \dots 4$ ) y  $p_i^{\phi_x}(\xi)$ ,  $q_j^{\phi_x}(\eta)$ ,  $p_i^{\phi_y}(\xi)$ ,  $q_j^{\phi_y}(\eta)$  ( $i, j = 1, 2$ ). A ellos se les suma un número adecuado de polinomios de Gram-Schmidt para formular el macro elemento enriquecido:  $p_i^w(\xi)$ ,  $q_j^w(\eta)$  ( $i, j = 5 \dots n$ ) y  $p_i^{\phi_x}(\xi)$ ,  $q_j^{\phi_x}(\eta)$ ,  $p_i^{\phi_y}(\xi)$ ,  $q_j^{\phi_y}(\eta)$  ( $i, j = 3 \dots n$ ) (Rango et al., 2013; Nallim y Oller, 2008; Nallim et al., 2005).

### 3 ECUACIONES ELEMENTALES

Reemplazando las expresiones de Ec. (18) en Ec.(11) y aplicando la técnica de mapeo de espacios, se puede obtener:

$$0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_y}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A1_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_y}] \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_y}] \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_y}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \mathbf{c}^w \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \quad \delta \mathbf{c}^{\phi_y}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A2_{ij}^S \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{N}^\phi \\ 0 & \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

$$- \omega^2 \rho h \{ \delta \mathbf{c} \} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}^w)^2 + \frac{h^2}{12} [(\mathbf{A1}')^2 + (\mathbf{A2}')^2] & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 & 0 \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' & 0 & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \{ \delta \mathbf{c} \} \quad (19)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1} &= \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta}, & \mathbf{A2} &= -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta} \\
 \mathbf{A3} &= a'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + a'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - a'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 a'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\
 \mathbf{A4} &= b'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + b'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - b'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 b'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\
 \mathbf{A5} &= -c'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} - c'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} + c'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} - \sum_{i=1}^3 c'_i \left( \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\
 \mathbf{A1}' &= \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \\
 \mathbf{A2}' &= -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Finalmente, cancelando los desplazamientos nodales virtuales, la Ec. (20) resulta:

$$\{[K^E] - \omega^2[M^E]\}\{c^E\} = 0 \tag{21}$$

donde  $[K^E]$  es la matriz de rigidez del elemento mapeado usando TSDT y está dada por:

$$\begin{aligned}
 [K^E] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [B1][A1^s][B1]^T + [B3][D][B3]^T + [B3][-B^s][B1]^T \right. \\
 &\quad \left. + [B1][-B^s][B3]^T + [B2][A2^s][B2]^T \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{22}$$

con:

$$[B1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix}, [B2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix}, [B3] = \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

y  $[M^E]$  es la matriz de masa del macro elemento en coordenadas naturales, dada por:

$$[M^E] = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}^w)^2 + \frac{h^2}{12} [(\mathbf{A1}')^2 + (\mathbf{A2}')^2] & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 & 0 \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' & 0 & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \tag{24}$$

#### 4 ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES

El ensamblaje de los macro elementos desarrollados se lleva a cabo igualando las variables primarias de dos macro elementos adyacentes, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 3. De esta manera se arriba a la ecuación global que permite el análisis de vibraciones libres de la estructura completa, dada por:

$$\{[K^G] - \omega^2 [M^G]\} \{c^G\} = \{0\} \quad (25)$$

donde  $[K^G]$  es la matriz de rigidez global de la estructura ensamblada,  $[M^G]$  es su matriz de masa, y  $\{c^G\}$  es el vector global de desplazamientos nodales generalizados, que, a partir de correctos vectores de indexación permite obtener los  $\{c^E\}$  de cada macro elemento de la malla adoptada. A su vez, cada  $\{c^E\}$  está formado por sub-vectores  $\{c^w\}$ ,  $\{c^{\phi_x}\}$ ,  $\{c^{\phi_y}\}$  que permiten obtener las funciones de desplazamientos, de todo el dominio del macro elemento.

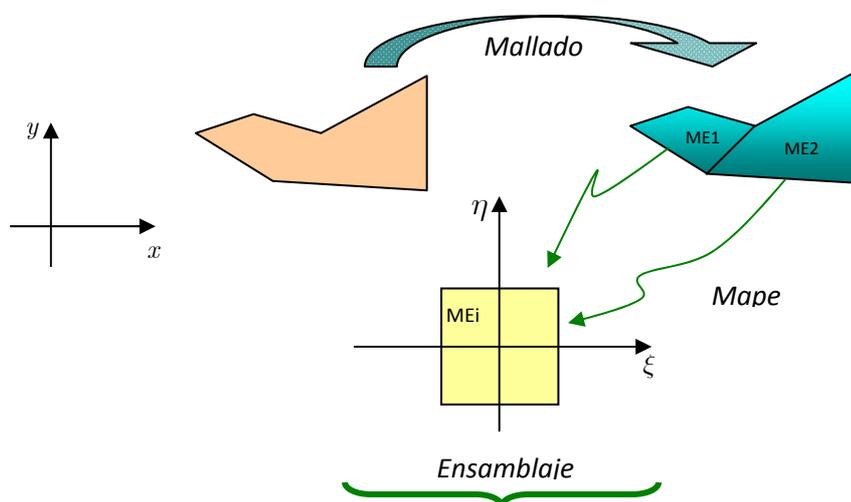


Figura 3: Esquema genérico de ensamblaje de macro elementos.

#### 5 ESTUDIO DE CONVERGENCIA Y VALIDACIÓN

A continuación se lleva a cabo el estudio de convergencia y verificación realizado para la frecuencia fundamental de vibración correspondiente a una placa laminada cuadrada SSSS de cuatro capas, con esquema de laminación (0/90/90/0). Se plantean dos relaciones de espesor y se listan los adimensionales de frecuencia para diversas relaciones de ortotropía. Las propiedades son:

$$E_1 = 40E_2, \nu_{12} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad \text{y} \quad G_{23} = 0.5E_2.$$

En la Tabla 1 se resumen los valores obtenidos para la primera frecuencia de vibración de la placa, usando desde dos polinomios de Gram-Schmidt hasta cinco, y se muestran los valores de referencia de Liu et al. (2007) y los de Xiang y Wang (2009), quienes emplearon una teoría de orden superior y funciones de base radiales multicuadráticas.

$a/h$	$E_1/E_2$	Macro elemento $m = 2$	Macro elemento $m = 3$	Macro elemento $m = 4$	Macro elemento $m = 5$	Xiang y Wang (2009)	Liu et al. (2007)
5	3	7.396	6.267	6.250	6.248	-	6.557
	10	9.645	8.146	8.116	8.113	8.421	8.270
	20	11.452	9.486	9.440	9.433	9.671	9.528
	30	12.699	10.273	10.216	10.211	10.416	10.279
	40	13.694	10.816	10.749	10.742	10.938	10.773
10	3	7.830	7.089	7.084	7.080	-	7.240
	10	10.903	9.761	9.749	9.741	9.912	9.847
	20	13.698	12.183	12.161	12.159	12.316	12.225
	30	15.670	13.857	13.825	13.822	13.943	13.987
	40	17.204	15.121	15.079	15.073	15.213	15.112

Tabla 1: Valores de la primera frecuencia  $\Omega = \omega a^2 / h \sqrt{\rho/E_2}$  de placa cuadrada SSSS laminada (0/90/90/0)

Se observa que a partir del uso de tres polinomios, las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, mostrando además convergencia estable y sin oscilaciones, y con una muy buena concordancia con los resultados de Liu et al (2007) y Xiang y Wang (2009).

## 6 EJEMPLOS NUMÉRICOS DE ENSAMBLAJE

Los ejemplos de esta sección tienen por finalidad presentar la aplicación del ensamblaje de los macro elementos propuestos, al estudio dinámico de dos estructuras con presencia de perforación interna.

### 6.1 Placa triangular con perforación central

La primera estructura estudiada se presenta en Figura 4. El esquema de laminación adoptado es  $(\beta, -\beta, -\beta, \beta)$  de material E-glass/epoxi, cuyas propiedades son:

$E_1 = 60.7GPa$ ,  $E_2 = 24.8GPa$ ,  $G_{12} = 12GPa$ ,  $G_{13} = 0.5E_2$ ,  $G_{23} = 0.2E_2$ ,  $\nu_{12} = 0.23$  y una relación de espesor  $a/h = 10$ . Los adimensionales de frecuencias naturales de vibración  $\Omega = \omega a^2 / h \sqrt{\rho/E_2}$  y las correspondientes formas modales se presentan en las Figs. 5, 6, 7 y 8, para valores de  $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  respectivamente.

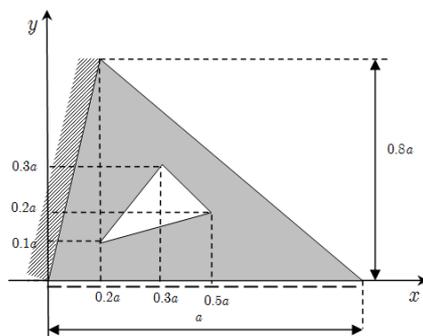


Figura 4: Geometría de placa triangular con perforación.

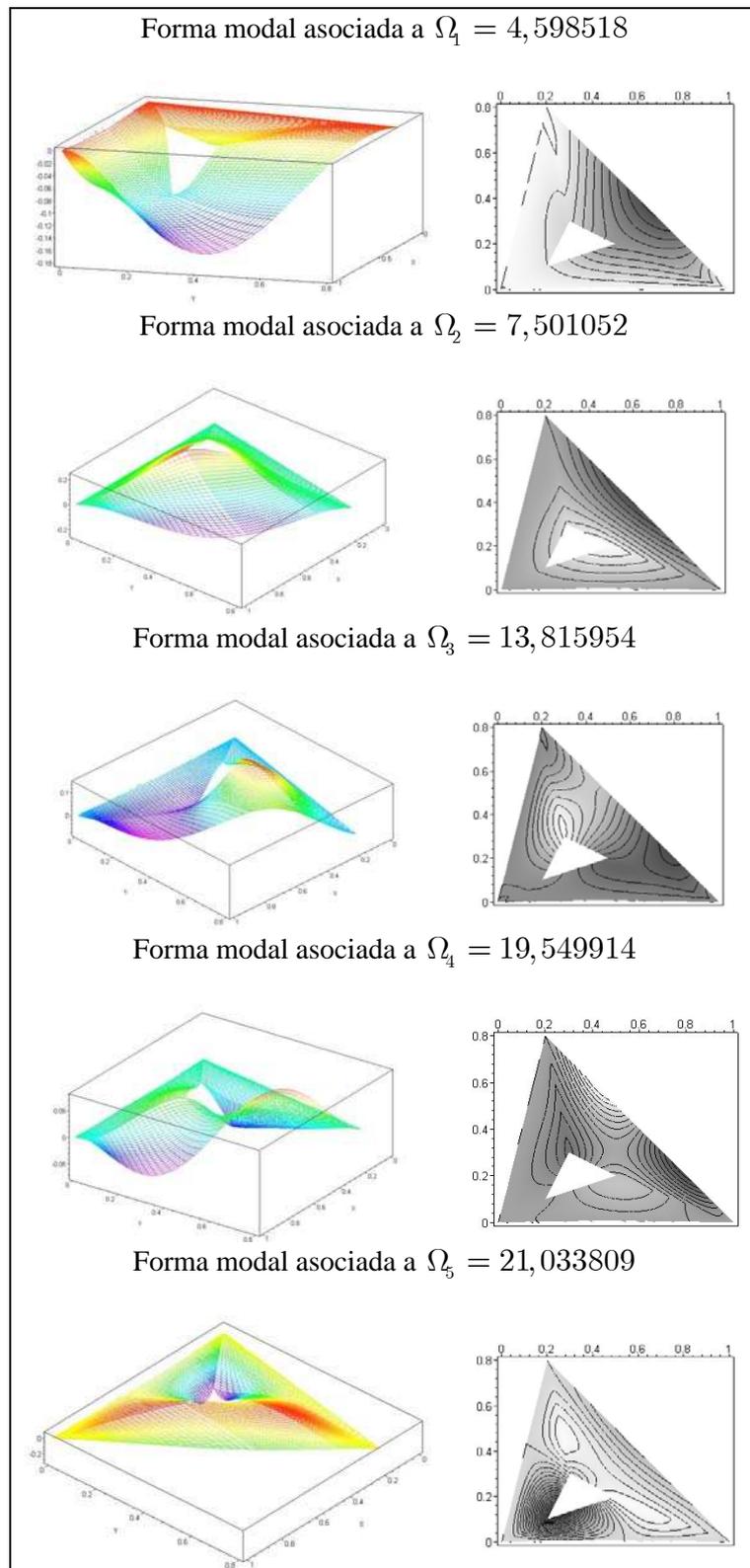


Figura 5: Formas modales asociadas a las cinco primeras frecuencias de placa con  $\beta = 0^\circ$

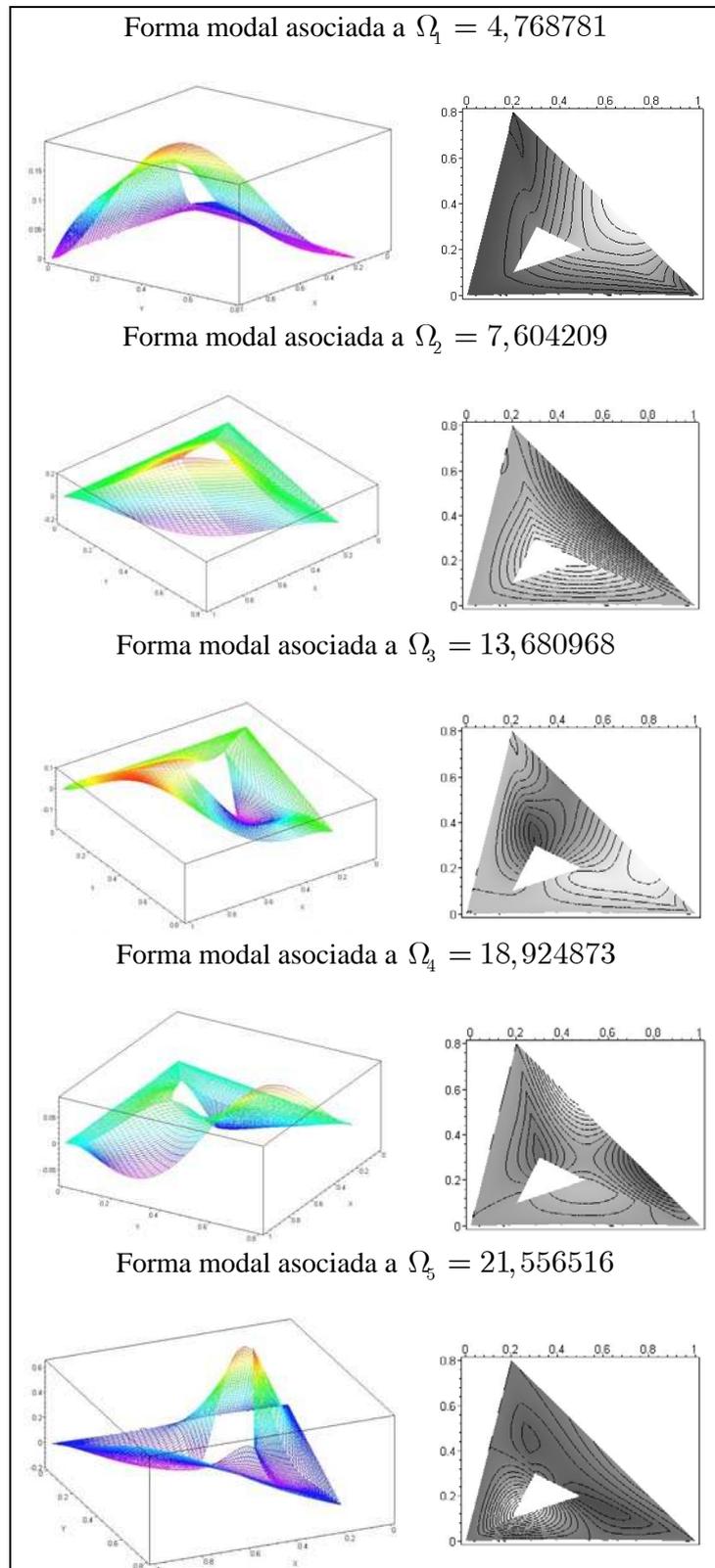


Figura 6: Formas modales asociadas a las cinco primeras frecuencias de placa con  $\beta = 30^\circ$

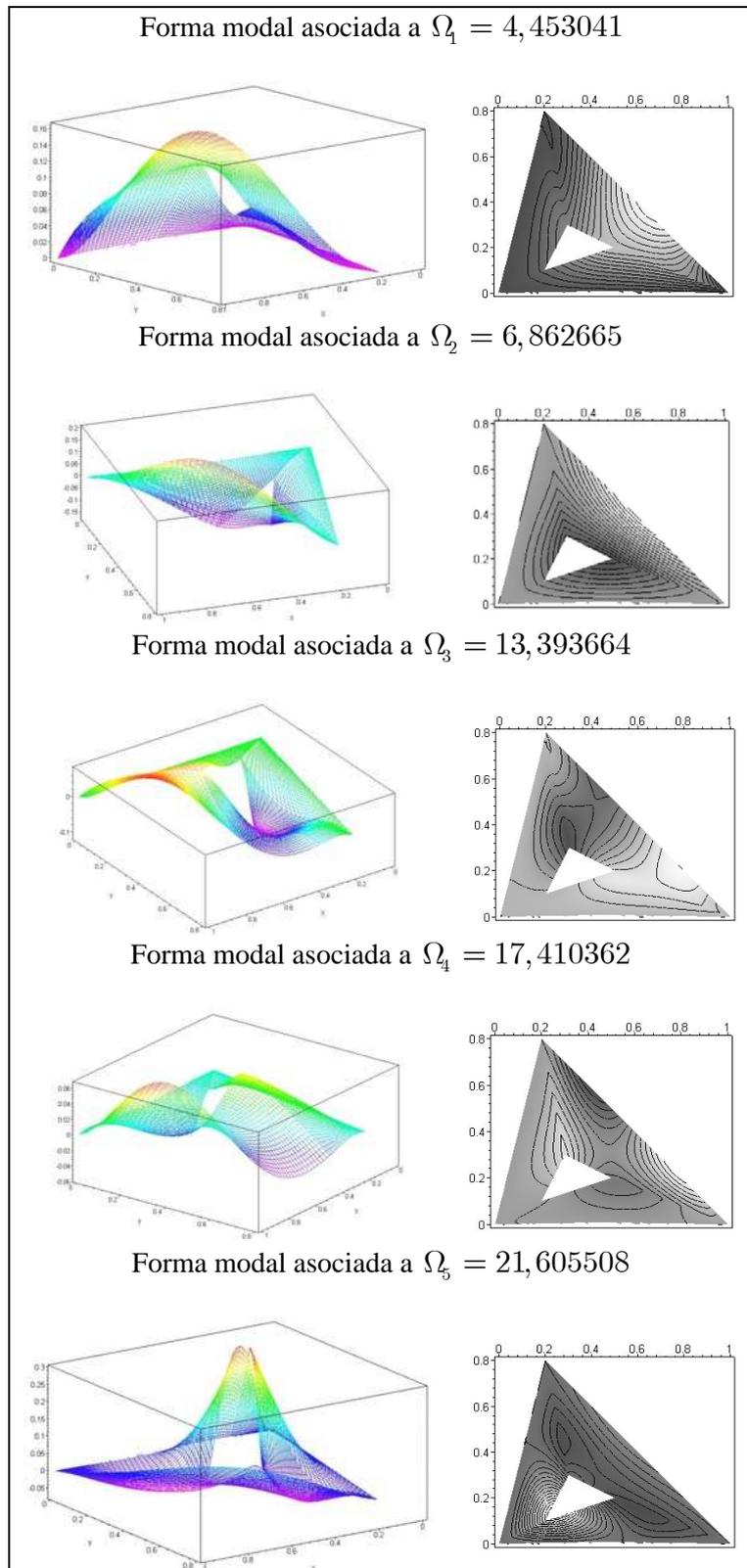


Figura 7: Formas modales asociadas a las cinco primeras frecuencias de placa con  $\beta = 60^\circ$

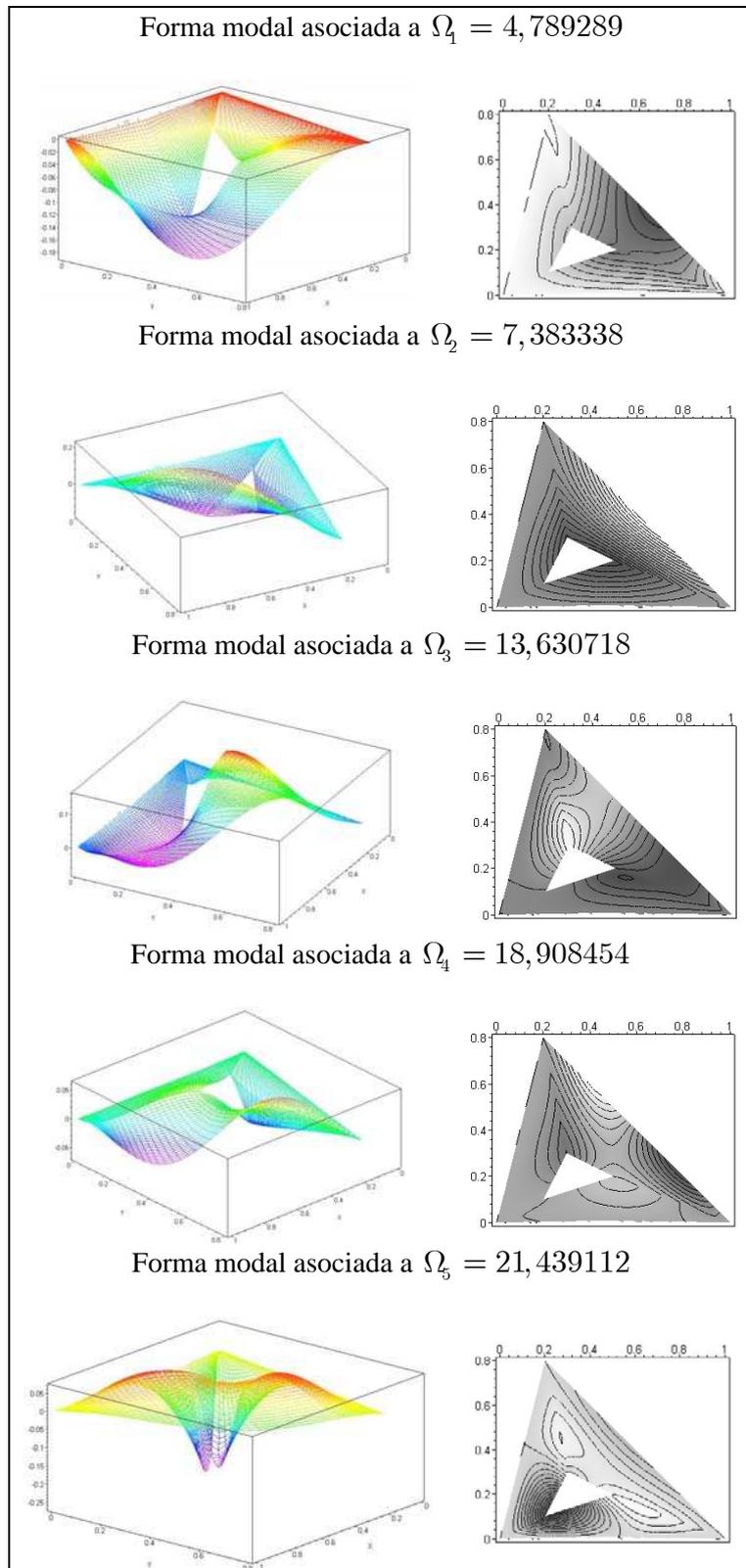


Figura 8: Formas modales asociadas a las cinco primeras frecuencias de placa con  $\beta = 90^\circ$

## 6.2 Placa irregular perforada

La segunda estructura que se analiza es la que se muestra en Figura 9, empotrada en sus lados paralelos a los ejes  $x, y$ , y con dos apoyos puntuales en coincidencia con los círculos negros (Fig. 9). El esquema de laminación adoptado es  $(0,90,0)$  del mismo material E-glass/epoxi del ejemplo anterior y una relación de espesor  $a/h = 10$ .

Los adimensionales de frecuencias naturales de vibración  $\Omega = \omega a^2 / h \sqrt{\rho / E_2}$  y las correspondientes formas modales se presentan en la Fig. 10.

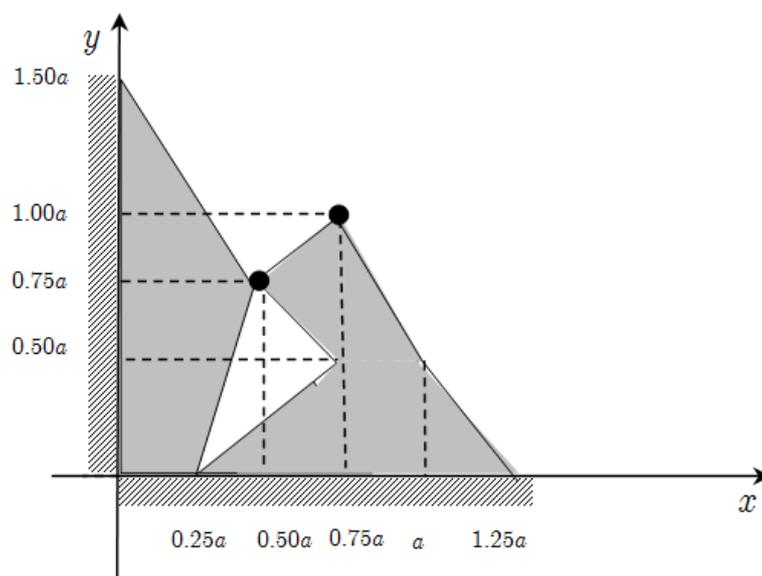


Figura 9: Geometría de placa perforada.

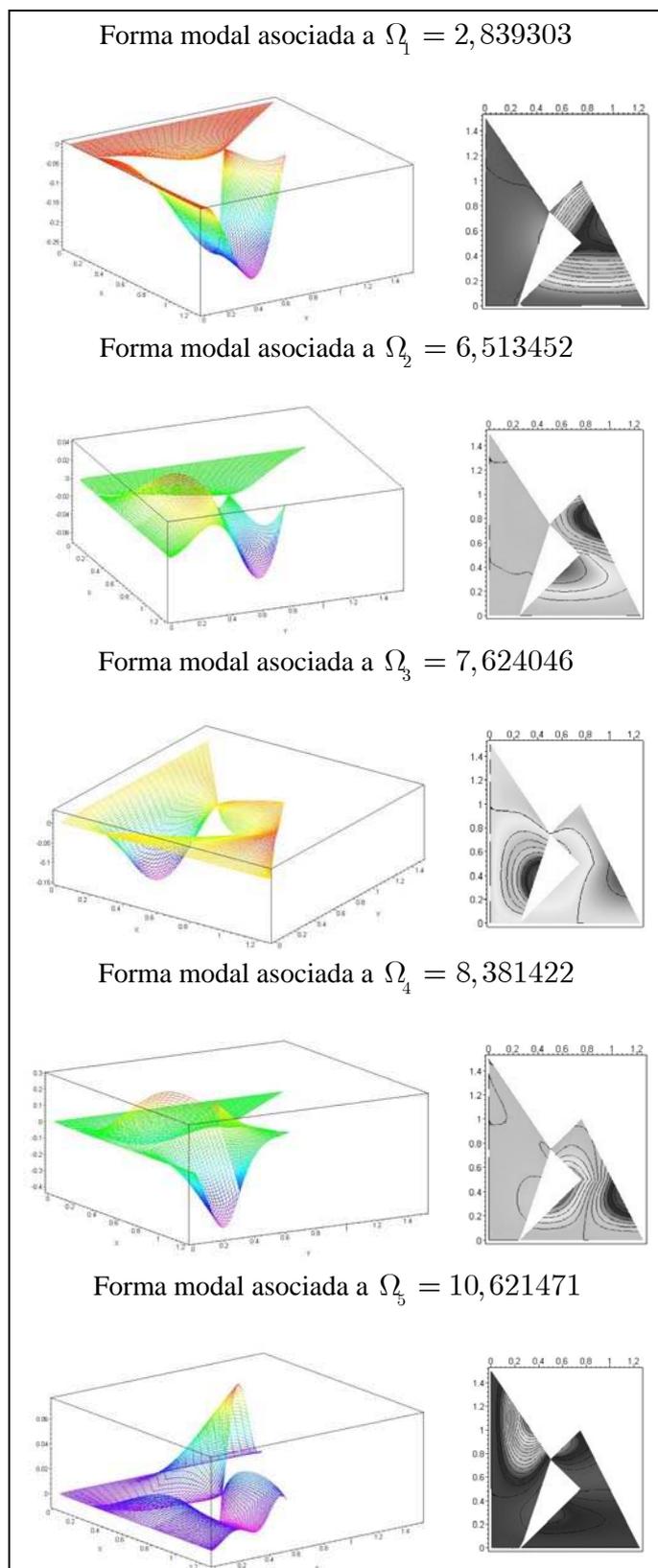


Figura 10: Formas modales asociadas a las cinco primeras frecuencias de placa perforada

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un macro elemento finito enriquecido, basado en la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte, implementado en un programa de computadora que permite mediante la técnica adecuada, el ensamblaje de dos o más macro elementos,

Se incluye el estudio de vibraciones libres de placas laminadas perforadas, en las cuales se varía el ángulo de orientación de la fibra.

La formulación presentada es particularmente útil en el análisis de placas laminadas gruesas, para las cuales el uso de elementos finitos clásicos significa un elevado número de elementos en la malla de discretización, particularmente para las frecuencias altas.

Una malla de macro elementos enriquecidos contiene el número de elementos mínimo, necesario para representar la geometría de la estructura que se estudia.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET, a través del PIP 0105/2010 y el Proyecto CIUNSa N°1903.

## REFERENCIAS

- Ferreira, A.J.M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & Structures*, 83:2225-2237, 2005.
- Liu, L., Chua, L.P., Ghista, D.N., Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates. *Composite Structures*, 78:58-69, 2007.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C., Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94:1991-2000, 2012a.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C., A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. *Computers & Structures*, 94-95:45-53, 2012b.
- Mindlin, R.D., Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31-38, 1951.
- Nallim, L.G., Oller, S., Grossi, R.O., Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1797-1822, 2005.
- Nallim, L. G., Oller, S., An analytical - numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plate. *Composite Structures Journal*, 85: 311-325, 2008.
- Rango, R.F., Nallim, L.G., Oller, S., Formulación y ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras laminadas. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*. 9: 4-21, 2012.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements. *Composite Structures*, 101:94-103, 2013.
- Reddy, J.N., *Finite Element Method*. McGraw Hill, 1993.
- Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Second Edition. CRC Press, United States of America, 2003.
- Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 12:69-76, 1945.

- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*. New York McGraw-Hill, 1959.
- Xiang, S., Wang, K., Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47:304-310, 2009.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method, fourth ed.* McGraw-Hill, 1991.