

UN MODELO BASADO EN LA COMBINACIÓN DE ESTADOS PARA EL ANALISIS DE LA CONSOLIDACIÓN EN SUELOS NO SATURADOS

Beneyto, Pablo A. *, Di Rado, Héctor A. *, Mroginski, Javier L. *, Awruch, Armando M. †

*Departamento de Mecánica Aplicada
Universidad Nacional del Nordeste
Av Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina
email: pbeneyto@ing.unne.edu.ar

†Centro de Mecánica Aplicada y Computacional (CEMACOM)
Universidad Federal do Rio Grande do Sul
Av Osvaldo Aranha 99, 3º Andar, 90035-190, Porto Alegre (RS), Brasil
email: awruch@orion.ufrgs.br

Palabras Clave: Suelo No Saturado, Succión, MEF.

Resumen. *El objetivo del presente trabajo es desarrollar una nueva formulación isotérmica que considera el comportamiento fenomenológico del medio no saturado basado en combinación de estados y con inclusión de la variación de la saturación con la succión. Debido a la capacidad de representar situaciones límites, el modelo establece un puente entre algunas de las diferentes formulaciones aparecidas en los últimos años y permite ser usada para los citados fines. Finalmente, mediante la utilización del método de los elementos finitos se resuelve el problema de una fundación superficial y se comparan los resultados con los obtenidos a partir de formulaciones simplificadas presentadas en trabajos previos.*

1. INTRODUCCIÓN

Si bien durante los primeros años el empirismo fue el procedimiento más explotado para abordar el estudio de suelos no saturados, en la actualidad las aplicaciones del método de los elementos finitos a modelos matemáticos de consolidación han evolucionado de manera tal que se han logrado importantes avances para predecir el comportamiento de este tipo de medio poroso con una base conceptual más fundamentada.

Surge del análisis de numerosas publicaciones especializadas en el tema, que la mayoría de los modelos adoptados parten de una modificación o adecuación de modelos realizados por Schrefler et al^{1,2} y Khalili et al,^{3,4} entre otros. Resulta de interés establecer un principio de criterios que puedan mediar entre las diferentes formulaciones y servir de herramienta para la toma de decisiones. Este intento por establecer dichos criterios durante el presente trabajo, condujo a la obtención de una nueva formulación que si bien constituye por si sola un nuevo enfoque para el problema y por lo tanto una alternativa de uso, se cree que su aporte fundamental permite definir en forma cualitativa, zonas de mejor desempeño para formulaciones simétricas simplificadas y zonas donde se debería recurrir casi obligatoriamente a esquemas mas complejos entre los cuales está el desarrollado en el presente artículo. Para la mencionada decisión, se usa el rango de variación de la saturación a lo largo del proceso definido a través de la curva característica.⁵

Por último es menester resaltar que el problema de flujo en medios porosos con o sin transporte de masa es de gran importancia en muchas disciplinas de la ingeniería. El análisis de este tipo de fenómenos, sin considerar efectos térmicos, es de relevancia para el estudio de estabilidad en edificios y otras estructuras civiles como presas de tierra en el área comprendida por la región N.E. de Argentina, sur de Paraguay y S.O. de Brasil. Por esta razón resulta de sumo interés rescatar los valores de formulaciones simples y especialmente si estas pueden conservar la simetría del sistema de ecuaciones redundando en ahorro sustancial de tiempo y memoria de máquina.

2. MODELO CONCEPTUAL

Se puede describir la formulación presentada como un conjunto de tres elementos, un modelo de deformación, un modelo de flujo de agua y otro de flujo de aire.

Las ecuaciones constitutivas mecánicas se expresan en términos de tensión efectiva, teniendo esto la ventaja de manejar una sola variable además de facilitar el pasaje de un sistema bifásico a uno trifásico pues mantiene el mismo conjunto de variables.

El modelo de flujo está basado en la interacción de las dos fases de fluido: agua y gas. El acoplamiento entre el flujo y el campo de deformaciones se realiza mediante la introducción de parámetros que relacionan las presiones de las fases agua y aire con un cambio en la configuración de la matriz de deformaciones.

3. ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

3.1. Equilibrio mecánico

Para describir la relación tensión-deformación en un suelo no saturado, se considera un volumen representativo de suelo sujeto a una tensión externa total σ_{ij} . El estado de tensiones en este volumen de suelo debe satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio⁵:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (1)$$

Extendiendo el concepto de tensiones efectivas a suelos no saturados y considerando los efectos de las presiones de agua y aire en los poros, la tensión total σ_{ij} y la tensión efectiva σ'_{ij} pueden relacionarse en forma incremental según la siguiente expresión:

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} - a_1 dp^w \delta_{ij} - a_2 dp^g \delta_{ij} \quad (2)$$

Siendo dp^w y dp^g diferenciales de presión de los poros de agua y aire respectivamente, y a_1 y a_2 los parámetros de tensión efectiva para las fases agua y aire. Se obtuvo³, a partir de la descomposición del estado general de tensiones en la suma de estados de fácil determinación de las deformaciones volumétricas, la siguiente forma de la ecuación de equilibrio mecánico:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \quad (3)$$

siendo:

$$a_1 = \frac{c_m}{c} - \frac{c_s}{c} \quad (4)$$

$$a_2 = 1 - \frac{c_m}{c} \quad (5)$$

$c_m = \frac{1}{K_m}$ Compresibilidad de la estructura de suelo con respecto a un cambio en la succión

$c = \frac{1}{K_T}$ Compresibilidad drenada de la estructura de suelo

Originalmente Khalili and Khabbaz³ no explicitan K_m . Una aproximación se logra luego de igualar la (3) con la ecuación de equilibrio mecánico obtenida por Lewis and Schrefler¹:

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} - \alpha S_w dp^w \delta_{ij} - \alpha S_g dp^g \delta_{ij} \quad (6)$$

Siendo S_w y S_g las saturaciones correspondientes a las fases agua y aire respectivamente, a partir de esta comparación, se obtiene la siguiente expresión del valor de la compresibilidad de la estructura de suelo ante un cambio en la succión (recordar que $S_w = f(p^g - p^w)$)

$$K_m = \frac{K_T K_s}{S_w K_s + S_g K_T} \quad (7)$$

Coincidiendo con la expresión cualitativa,^{3,6} dado que $S_w \rightarrow 1$ cuando $K_m \rightarrow K_T$

3.2. Modelo de Flujo. Fase Agua

El flujo de agua en suelos saturados y no saturados puede describirse mediante una combinación de la Ley de Darcy y de la de conservación de la masa de fluido. Según Darcy⁵ :

$$-\frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = -n_w c_f \frac{dp^w}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_w}{dt} \quad (8)$$

3.3. Modelo de Flujo. Fase Aire

El flujo de aire a través de un suelo no saturado es a menudo descripto usando la Ley de Fick.³ Para condiciones isotérmicas, y teniendo en cuenta la concentración de aire con respecto a una unidad de volumen de suelo, se puede obtener una forma modificada de dicha ley satisfaciendo la conservación de la masa de aire, y siguiendo exactamente los mismos procedimientos que para la fase agua se tiene:

$$-\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = -\frac{n_g}{P} \frac{dp^g}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_g}{dt} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) son las que describen el flujo de agua y aire a través de un medio poroso no saturado. Nótese que existen 2 ecuaciones y 4 incógnitas (p^w , p^g , V_w y V_g), por lo tanto se necesitan dos ecuaciones adicionales, las ecuaciones que pueden obtenerse relacionando dV_g/dt y dV_w/dt a las variables primarias p^w , p^g y a las componentes de desplazamientos u_i .

Esto supone habilitar las ecuaciones (6),(8) y (9) para resolverlas simultáneamente, siendo que los desplazamientos son explicitados en la ecuación (6) cuando se utiliza la ecuación constitutiva correspondiente.

3.4. Deformación del poro de agua y del poro de aire

Para establecer las relaciones requeridas entre dV_w/dt y las variables primarias de fluido, Khalili,³ considera un volumen representativo de medio poroso no saturado sujeto a las siguientes condiciones:

- 1) Correspondiente a una presión isotrópica externa de $d\bar{\sigma}$, una presión interna de agua dp^w , y una presión interna de aire dp^g .
- 2) Se refiere a presiones externas e internas iguales a dp^w .
- 3) Correspondiente a una presión externa y del poro de aire iguales a dp^w , y presión del agua igual a cero.

A partir de este análisis, y luego de aplicar el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (2)], [(1) - (3)], y [(2) - (3)], Khalili y Khabbaz³ obtienen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_w} \text{div} (\rho_w S_w \nu^s) - \frac{n S_w}{K_w} \dot{p}_w - \frac{\alpha - n}{K_s} S_w^2 \dot{p}_w + \alpha S_w \frac{d\epsilon_{ii}}{dt} - \frac{\alpha - n}{K_s} S_g S_w \dot{p}_g \\ & - \left(\frac{\alpha - 2}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha - 2}{K_s} S_w dp^w \right) \dot{S}_w + S_w \frac{\alpha - 2}{K_T} \left(S_g \frac{dp^c}{dt} dp^c \dot{S}_g \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Para extender el razonamiento anterior a la fase aire, se agregan dos nuevos estados:

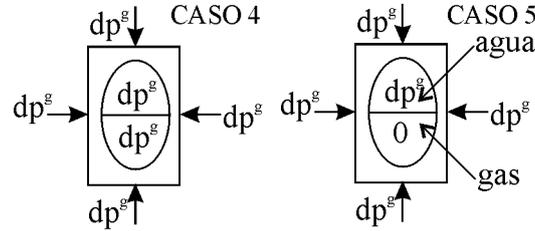


Figura 1: Casos 4 y 5

CASO (4):

$$dV^{III} = V c_s dp^g$$

$$dV_w^{III} = n_w V c_s dp^g$$

$$dV_g^{III} = n_g V c_s dp^g$$

CASO (5):

$$dV^{IV} = V (c - c_m + c_s) dp^g$$

$$dV_w^{IV} = n_w V (c - c_m + c_s) dp^g$$

$$dV_g^{IV} = \text{Desconocido}$$

El caso (4) se refiere a presiones externas e internas iguales a dp^g .

El caso (5) corresponde a una presión externa y del poro de agua iguales a dp^g , y presión del aire igual a cero.

A partir de este nuevo análisis, aplicando el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (4)], [(1) - (5)], y [(4) - (5)], se obtienen las siguientes relaciones:

$$(dV - dV_w) dp^g = -dV_g^{IV} dp^g + V [(c - c_m + c_s) d\bar{\sigma} - n_w (c - c_m + c_s) dp^w] dp^g \quad (11)$$

$$V (c - c_m + c_s) (dp^g - n_w dp^g) dp^g - dV_g^{IV} dp^g = V (c_s dp^g - n_w c_s dp^g) dp^g \quad (12)$$

$$(dV + dV_w - dV_g) dp^g = V c_s dp^g \bar{\sigma} - n_w V c_s dp^g dp^w - n_g V c_s dp^g dp^g \quad (13)$$

Resolviendo las ecuaciones ((11) - (13)) para dV_g , y reemplazando en la ecuación (9) se puede obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) &= -\frac{n S_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\ -\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) & \end{aligned} \quad (14)$$

Donde: $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$

4. ECUACIONES QUE GOBIERNAN LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS NO SATURADOS

Ordenando las ecuaciones que gobiernan la consolidación no saturada, quedan las siguientes expresiones:

EQUILIBRIO MECANICO: reemplazando por sus valores los coeficientes de la Ec. (3) se tiene:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \quad (15)$$

FASE AGUA: operando a partir de la Ec. (10), se obtiene:

$$\left\{ \frac{nS_w}{K_w} - \left[\frac{\alpha - n}{K_s} S_w \left(dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_w - dp^g \frac{dS_w}{dp^c} \right) - S_w \frac{\alpha - n}{K_T} \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w = 0 - \frac{1}{\rho_w} \text{div} (\rho_w S_w \nu^{\nu s}) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \quad (16)$$

FASE AIRE: las ecuaciones constitutivas correspondientes a esta fase pueden obtenerse mediante operaciones algebraicas a partir de la Ec. (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\ & - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} \frac{dS_w}{dt} &= \frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt} \\ \frac{dS_g}{dt} &= \frac{dS_g}{dp^c} \frac{dp^c}{dt} = - \frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt} \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \left(\frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g^2 \right) \dot{p}^g + \\ & \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \dot{p}^c = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Realizando la descomposición $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$, puede expresarse la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \\
 & \left\{ \frac{\alpha - n}{K_s} S_w S_g + S_g \left[\frac{\alpha - n}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{\alpha - n}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \\
 - & \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{\alpha - n}{K_s} S_g^2 - S_g \left[\frac{\alpha - n}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{\alpha - n}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^g = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Finalmente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}'_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_1 \dot{p}^g \delta_{ij} \\
 -\frac{1}{\rho_w} \text{div} (\rho_w S_w \nu^{ws}) &= a_1 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{11} \dot{p}^w - a_{12} \dot{p}^g \\
 -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) &= a_2 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{21} \dot{p}^w - a_{22} \dot{p}^g
 \end{aligned} \tag{20}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha S_w \\
 a_2 &= \alpha S_g \\
 a_{11} &= \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^w \right\} \\
 a_{12} &= \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^w \right\} \\
 a_{21} &= \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^g \right\} \\
 a_{22} &= \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^g \right\}
 \end{aligned}$$

y siendo:

$$\begin{aligned}
 C_s &= \frac{ndS_w}{dp^c} \\
 C_s^w &= -S_w \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \\
 C_s^g &= -S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right)
 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones acoplado no simétrico que permite modelar el comportamiento del suelo no saturado ante el fenómeno de consolidación.

5. EJEMPLO NUMÉRICO

En este ejemplo se pretende modelar la consolidación de suelos no saturados mediante la formulación (20) adoptando dos situaciones, la primera teniendo en cuenta la variación de la saturación con la succión, lo que conduce a sistemas de solución no simétricos, y la segunda sin considerar dicha variación, haciendo $dS_w/dp^c = 0$ (sistemas de solución simétricos).

El ejemplo consiste en una masa de suelo de 10m x 10m sometida a las cargas de una fundación superficial (ver figura 2). La discretización se realizó mediante elementos finitos serendipitos de 8 nodos, haciendo una mayor concentración de elementos en la cercanía de las cargas, con el objeto de poder representar mejor las variaciones de presión generadas en dicha zona.

Datos del problema:

Carga: $q = 100$ kpa

Módulo de elasticidad: $E = 100$ kpa

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0.3$

Ángulo de fricción interna(rad): $\varphi = 0.1745$

Cohesión: $C = 100$ kpa

Relación de vacíos inicial: $e = 0.6$

Coefficiente de Compresibilidad grano: $k_s = 10000000$ kpa

Coefficiente de Compresibilidad fluido: $k_f = 1000000$ kpa

Coefficiente de Permeabilidad: $k = 0.000864$ m/día

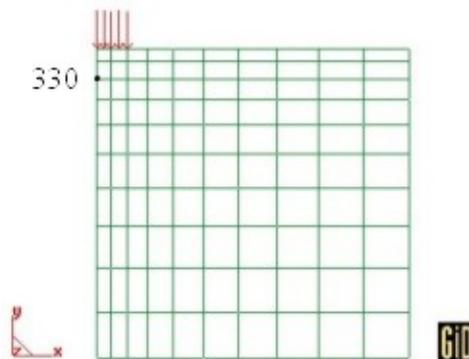


Figura 2: Mallado y cargas en la masa de suelo

En cuanto a las condiciones de contorno impuestas (ver figura 3) se ha restringido los desplazamientos según el eje x y el eje z en todos los nodos laterales y en la base se restringió además el eje y . El drenaje solo se permite por la superficie. De este modo, y por la simetría meridional del ejemplo, solo basta con modelar la mitad de la masa de suelo.

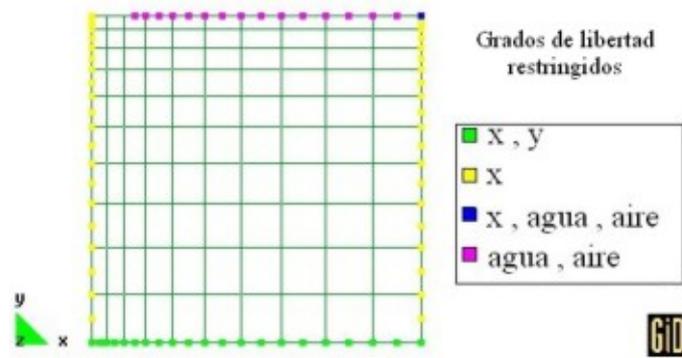


Figura 3: Condiciones de contorno de la masa de suelo

A continuación se presentan los resultados de presión de poro de agua y descenso correspondientes al nodo 330 mostrado en la figura 2 para formulaciones simétricas y no simétricas, pudiendo observarse que para valores extremos de saturación la diferencia entre ambas formulaciones se minimiza, lo cual justifica la utilización del modelo simétrico simplificado para dichos casos.

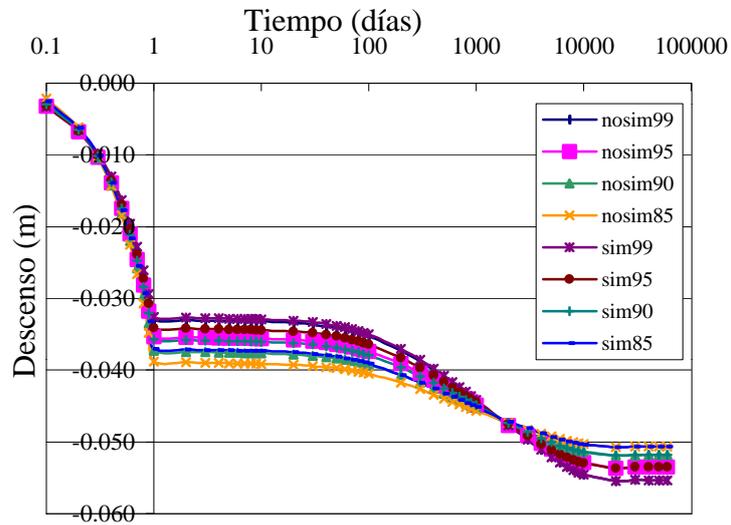


Figura 4: Descensos del nodo 330 para diferentes grados de saturación

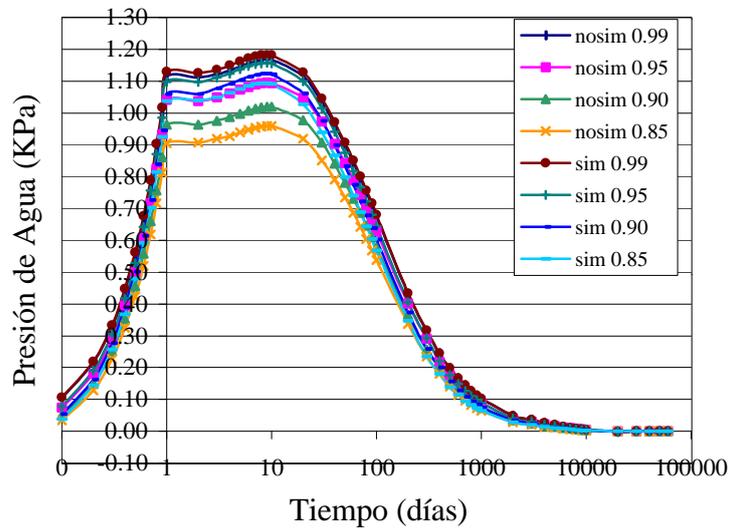


Figura 5: Presión de poro de agua del nodo 330 para diferentes grados de saturación

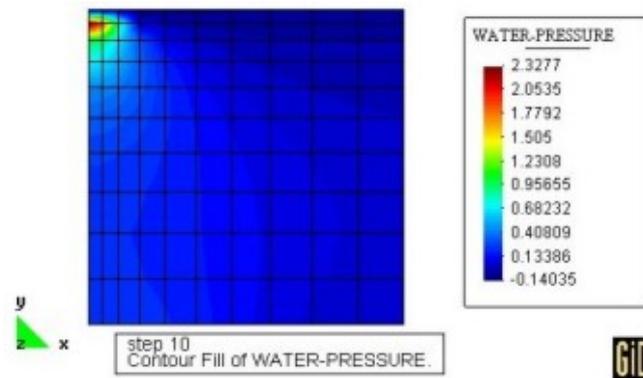


Figura 6: Presión de poro de agua luego de finalizada la carga

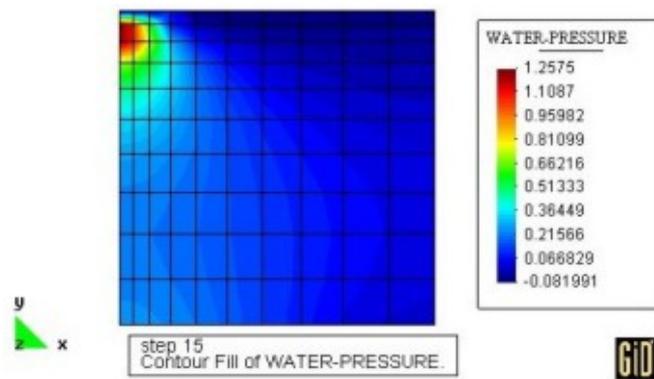


Figura 7: Presión de poro de agua a los 5 días

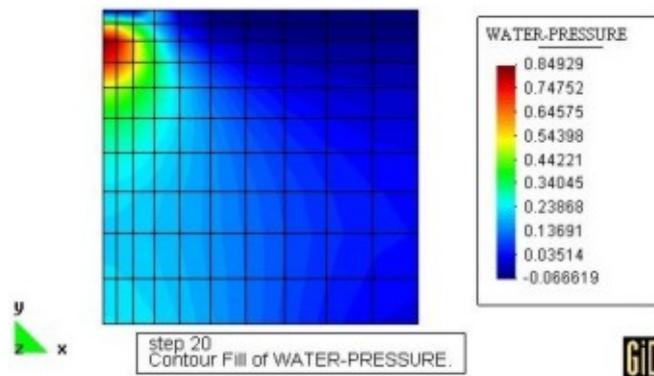


Figura 8: Presión de poro de agua a los 20 días

6. CONCLUSIONES

- Se ha presentado un modelo matemático para la simulación del proceso de consolidación de suelos no saturados basado en el comportamiento básico del suelo no saturado.
- Se amplían trabajos anteriores,^{3,4} mediante el agregado de su interacción con otros métodos y la consideración de la variación de la saturación con relación a la succión.
- Se han establecido puntos de contacto entre el modelo aquí presentado y las formulaciones basadas en ecuaciones de conservación,^{1,2,5} de amplia aplicación a problemas más complejos.
- Se muestra que las ecuaciones (20) contienen perfectamente a los casos saturados^{6,7} y al caso parcialmente saturado sin considerar la variación de la saturación con la succión.³ Esto último es importante porque la formulación resultante conduce a matrices simétricas.
- Mediante la formulación desarrollada es posible recomendar límites de aplicabilidad de los modelos con matrices simétricas³ y condiciones en las que formulaciones más complejas y generales con matrices no simétricas, deben ser usadas.

REFERENCIA

- [1] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley and Sons, (1987).
- [2] D. Gawin, P. Baggio, and B.A. Schrefler. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *Int. Journal for numerical methods in fluids*. John Wiley and Sons, **20**, 969–987 (1995).
- [3] N. Khalili and M.H. Khabbaz. On the theory of three-dimensional consolidation in unsaturated soils. *Unsaturated soils*. Alonso and Delage (eds), pages 745–750 (1995).
- [4] N. Khalili and B. Loret. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *International Journal of solid and structures*. Pergamon., (2001).
- [5] E.E. Alonso, A. Lloret, J. Delahaye, A. Gens, and G. Volckaert. Coupled analysis of backfill hydration test. *International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, **22**, 1–27 (1998).
- [6] H.A. Di Rado, A.M. Awruch, and P.A. Beneyto. Consolidation in saturated porous media. implementation and numerical problems. *Computational Mechanics. New Trends and Applications. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) and Fourth World Congress on Computational Mechanics*. Buenos Aires. Argentina., (1998).
- [7] P.A. Beneyto, H.A. Di Rado, A.M. Awruch, and J.E. Manzóllilo. Análisis de fundaciones directas usando el método de los elementos finitos. *Centro de Información Tecnológica (CIT)*, (1999).
- [8] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, (1991).

- [9] J.H. Atkinson and P.L. Bransby. *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics*. University Series in Civil Engineering. McGraw Hill, (1978).
- [10] D.G. Fredlund and Rahardjo H. *Soils Mechanics for unsaturated soils*. Wiley and Sons Inc., (1993).
- [11] T.W. Lambe and R.V. Whitman. *Soil Mechanics*. John Wiley and Sons, (1979).
- [12] S. Idelsohn and E. Oñate. Finite element and finite volumes. two good friends. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **37**, 3323–3341 (1994).
- [13] S.L. Barbour. The soil-water characteristic curve: a historical perspective. *Canadian Geotechnical Journal*, **35**, 873–894 (1998).
- [14] M. A. Biot. General theory of three - dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, (1941).
- [15] D.G. Fredlund and A. Xing. Equations for the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, **31**, 521–532 (1994).
- [16] H.A. Di Rado, P.A. Beneyto, J.L. Mroginski, J.E. Manzollillo, and A.M. Awruch. Análisis tridimensional de la consolidación de suelos saturados utilizando el mef. *Mecánica Computacional*, **23** (2004).