

IMPLEMENTACIÓN DE UNA FORMULACIÓN DE BAJO ORDEN PARA MATERIALES INCOMPRESIBLES EN HEMODINÁMICA

Joaquín Aranciaga^a, Daniel E. Caballero^a, Nicolás F. Agüero Parisi^a, Guillermo A. Lombera^a, Pablo J. Blanco^{b,c}, Gonzalo D. Ares^{b,c} and Santiago A. Urquiza^{a,c}

^a*Departamento de Mecánica, Universidad Nacional de Mar del Plata, Av. J.B. Justo 4302, B7608FDQ, Mar del Plata, Argentina, santiago.urquiza@fi.mdp.edu.ar, <http://www.fi.mdp.edu.ar/>*

^b*Laboratório Nacional de Computação Científica, Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, 25651-075, Petrópolis, Brazil, pjblanco@lncc.br, feij@lncc.br, <http://www.lncc.br/>*

^c*Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Medicina Assistida por Computação Científica, Brazil, <http://www.lncc.br/prjhemol/>*

Keywords: FSI, formulación ALE, Hemodinámica, ecuaciones de Navier-Stokes, .

Resumen. Es un hecho conocido que las formulaciones de elementos finitos de bajo orden presentan comportamientos anómalos al modelar materiales cercanos al límite de la incompresibilidad. En tales situaciones, aparecen oscilaciones espurias y *locking* como consecuencia de la incapacidad de este tipo de elementos para representar adecuadamente campos que preserven el volumen. Aun así, suele preferirse el uso de estos elementos en problemas a gran escala debido a su simplicidad y bajo coste computacional.

Muchas alternativas vienen siendo propuestas para adecuar estas formulaciones en torno al límite de la incompresibilidad. En problemas geoméricamente lineales existen diversas formulaciones que funcionan exitosamente; sin embargo en regímenes no lineales la incompresibilidad es considerablemente más demandante, y el desarrollo de elementos eficientes y robustos no es directo de ninguna manera. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se analiza el comportamiento numérico del elemento denominado F-bar. Este elemento es utilizado en varios casos de prueba con soluciones conocidas en la literatura, poniéndose en evidencia que presenta buen desempeño para la captura de los campos de desplazamientos, pero mostrando modos espurios en los campos de presiones. Finalmente se aplica esta formulación en un problema de hemodinámica computacional: simulación de un segmento de pared arterial carótida humana bajo la aplicación de presión interna.

1. INTRODUCCIÓN

Existen muchos problemas prácticos en el ámbito de la ingeniería y la bioingeniería en los que se requiere modelar materiales cuasi-incompresibles. Ejemplos de ello son el análisis de materiales cuyo comportamiento es el de una goma elástica, o materiales que se encuentran en régimen plástico o elastoplástico. En tales situaciones, en cuanto se las trata numéricamente con elementos de bajo orden, suelen aparecer oscilaciones espurias y *bloqueo*¹ en los campos asociados. Estos fenómenos están relacionados con la incapacidad de los dichos elementos de representar adecuadamente la preservación del volumen. Aun así, en problemas a gran escala, suele preferirse el uso de este tipo de elementos, debido a su simplicidad y bajo costo computacional.

Históricamente, el tratamiento numérico de las condiciones de incompresibilidad en la mecánica del continuo ha sido problemático. Por un lado, las propiedades de los operadores no son heredadas cuando se pasa del continuo al problema discreto. Por otro, encontrar interpolaciones de Elementos Finitos consistentes con la condición de incompresibilidad se dificulta enormemente. Por ese motivo, usualmente se ha apelado a relajar los espacios de definición del problema a través de la introducción de multiplicadores de Lagrange. Dos cuestiones surgen inmediatamente cuando esta vía es utilizada. En primer lugar las incógnitas se ven incrementadas. En segundo lugar, surgen cuestiones de compatibilidad entre los campos involucrados. Normalmente, esto redundaría en la necesidad del empleo de elementos con distinto orden de interpolación para las variables primales que para los multiplicadores. Estas son algunas de las razones por las que sigue resultando atractivo el empleo de formulaciones cuasi-incompresibles con elementos de bajo orden de interpolación. Sin embargo, el desempeño de las formulaciones de bajo orden es extremadamente pobre al modelar materiales cercanos al límite de la incompresibilidad, siempre que no se tomen medidas para controlar los efectos que aparecen en dicho límite.

Muchas formulaciones han sido propuestas para mejorar el funcionamiento de este tipo de elementos cerca del límite de la incompresibilidad. En problemas geoméricamente lineales existen diversas formulaciones que funcionan exitosamente; sin embargo en regímenes no lineales la incompresibilidad es considerablemente más demandante, y el desarrollo de elementos eficientes y robustos no es de ninguna manera trivial. En el contexto hemodinámico, las paredes arteriales deben ser tratadas como materiales incompresibles con niveles de deformación que no pueden considerarse infinitesimales. En este contexto resulta atractivo implementar el elemento denominado F-bar, cuyos detalles, especificaciones y características pueden encontrarse en [de Souza Neto et al. \(1996\)](#). Consecuentemente, este trabajo se orienta a evaluar el desempeño de dicha formulación en casos de interés para la aplicación a la simulación de las paredes arteriales. Se dedica aquí, una breve sección para indicar las principales suposiciones que adopta y para resaltar los aspectos más importantes del mismo, detalles más específicos pueden consultarse en la referencia original.

De tal forma, este trabajo está orientado al desarrollo de una formulación de elementos finitos, capaz de modelar de forma adecuada materiales cercanos al límite de incompresibilidad usando el elemento F-bar con vistas a su aplicación al modelado de las paredes arteriales. En perspectiva, se pretende integrar este elemento a un conjunto de técnicas de análisis utilizadas para resolver el flujo sanguíneo en las arterias del cuerpo humano, que permita, a su vez, realizar una aproximación más realista al problema de modelado y simulación en hemodinámica. De

¹Este fenómeno produce una disminución en los valores de los desplazamientos esperados, e incluso el bloqueo total de los mismos. En inglés se lo denomina *locking*.

esta manera, en las secciones siguientes, luego de una breve reseña de la mecánica del continuo necesaria y de la introducción de la nomenclatura adecuada, se analiza el comportamiento del elemento F-bar en casos de soluciones conocidas para luego aplicarlo a un caso simple de reproducción del comportamiento de la pared arterial.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección se presenta de modo conciso una introducción de la nomenclatura utilizada en la descripción de la mecánica del continuo del problema. Se describe el proceso de linealización de la formulación variacional de la ecuación de equilibrio mecánico para materiales compresibles, y se presentan los resultados para materiales incompresibles, deducidos en [Urquiza et al. \(2012\)](#).

2.1. Breve reseña sobre la mecánica del continuo para grandes deformaciones

Sea \mathcal{B} un cuerpo para el cual se identifica una configuración material o de referencia, simbolizada Ω_m , cuyas coordenadas son \mathbf{x}_m . El mismo cuerpo se encuentra en estado de equilibrio mecánico en una configuración actual o espacial, Ω_s , cuyas coordenadas son \mathbf{x}_s . A partir de aquí los subíndices m y s implican que la descripción está dada en términos de las coordenadas materiales (\mathbf{x}_m) y espaciales (\mathbf{x}_s), respectivamente. Se puede observar un esquema en la figura 1.

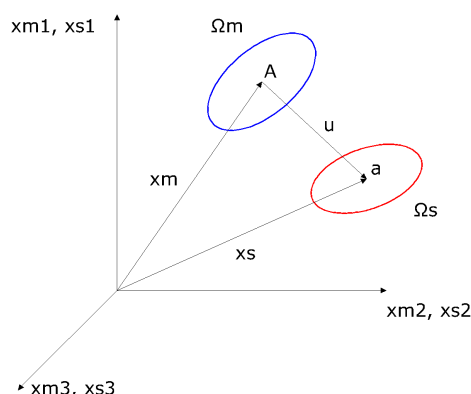


Figura 1: Esquema de un cuerpo descrito en coordenadas espaciales y materiales.

. Además, esta introducción de aspectos básicos está dirigida a definir y explicitar aspectos de la notación.

El mapeo de la configuración actual a la configuración de referencia está dado por la función $\phi : \Omega_m \rightarrow \Omega_s, \mathbf{x}_m \mapsto \mathbf{x}_s = \phi(\mathbf{x}_m)$ de manera tal que explícitamente se puede escribir:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_m + \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_m) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s) \quad (2)$$

Donde $\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_m) = \phi(\mathbf{x}_m) - \mathbf{x}_m$ es el campo de desplazamientos definido en la configuración material y $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s)$ definido en la configuración actual.

A continuación definimos el tensor gradiente de deformación \mathbf{F}_m y su tensor inverso \mathbf{F}_m^{-1} :

$$d\mathbf{x}_s = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \mathbf{x}_m} d\mathbf{x}_m = \mathbf{F}_m d\mathbf{x}_m \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_m = \nabla_{\mathbf{x}_m} \mathbf{x}_s ; \mathbf{F}_m^{-1} = \nabla_{\mathbf{x}_s} \mathbf{x}_m \quad (4)$$

Además es necesario contar con las definiciones de algunas medidas de deformación y de distintas descripciones del estado de tensiones que son utilizadas ampliamente al tratar problemas de grandes deformaciones:

Medidas de deformación:

Definamos rápidamente las siguientes medidas clásicas de deformación:

El tensor de deformación derecho de Cauchy-Green, $\mathbf{C}_m = \mathbf{F}_m^T \mathbf{F}_m$. El tensor de deformación de Green-Lagrange $\mathbf{E}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_m^T \mathbf{F}_m - \mathbf{I})$ y su tasa temporal que queda expresada como:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{1}{2}((\nabla_{\mathbf{x}_m} \mathbf{u}_m)^T \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_m^T (\nabla_{\mathbf{x}_m} \mathbf{u}_m)) \quad (5)$$

Finalmente, definamos el operador Gradiente simétrico:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}_s) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}_s} \mathbf{u}_s + (\nabla_{\mathbf{x}_s} \mathbf{u}_s)^T) \quad (6)$$

Cabe aclarar que si el operador Gradiente simétrico es aplicado a un campo de desplazamientos, tiene la interpretación de ser un tensor que mide las deformaciones cuando éstas son pequeñas, en tanto que mide velocidades de deformación cuando es aplicado a un campo de velocidades.

Descripción de estados de equilibrio de tensiones:

A la hora de plantear el problema de equilibrio mecánico de un cuerpo, es muy conveniente utilizar el principio de potencias virtuales. De esta manera, el estado de equilibrio de un cuerpo queda definido por el siguiente problema variacional:

Encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_s \in \mathcal{U}_s$ de manera tal que el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}_s$ sea capaz de satisfacer la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \, d\Omega_s = \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{f}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \, d\Omega_s + \int_{\Gamma_{N_s}} \mathbf{g}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \, d\Gamma_s \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s, \quad (7)$$

donde ρ_s es la densidad, Γ_{N_s} es la frontera de Neumann, cuyas coordenadas están dadas por $\mathbf{y}_s = \mathbf{x}_s|_{\Gamma_{N_s}}$. Además, \mathbf{f}_s es una carga volumétrica definida en Ω_s , mientras que \mathbf{g}_s es una carga que actúa en la frontera de Neumann Γ_{N_s} . Siendo $\boldsymbol{\sigma}_s$ las tensiones de Cauchy.

La variedad lineal \mathcal{U}_s y su espacio lineal asociado $\hat{\mathcal{V}}_s$ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_s &= \{\mathbf{u}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_s); \mathbf{u}_s = \bar{\mathbf{u}}_s \text{ on } \Gamma_{D_s}\}, \\ \hat{\mathcal{V}}_s &= \{\hat{\mathbf{v}}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_s); \hat{\mathbf{v}}_s = 0 \text{ on } \Gamma_{D_s}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Esta ecuación puede reescribirse en la configuración de referencia usando como variable independiente \mathbf{x}_m . Entonces, la ecuación (7) se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \frac{1}{2}((\nabla_{\mathbf{x}_m} \hat{\mathbf{v}}_m) \mathbf{F}_m^{-1} + \mathbf{F}_m^{-T} (\nabla_{\mathbf{x}_m} \hat{\mathbf{v}}_m)^T) \det \mathbf{F}_m \, d\Omega_m = \\ \int_{\Omega_m} \rho_m \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{v}}_m \, d\Omega_m + \int_{\Gamma_{N_m}} \mathbf{g}_m \cdot \hat{\mathbf{v}}_m \det \mathbf{F}_m |\mathbf{F}_m^{-T} \mathbf{n}_m| \, d\Gamma_{N_m} \\ \forall \hat{\mathbf{v}}_m \in \hat{\mathcal{V}}_m, \quad (9) \end{aligned}$$

donde ρ_m es la densidad expresada en la configuración de referencia ($\rho_m = \rho_s (\phi(\mathbf{x}_m))$)², Γ_{N_m} es la superficie de Neumann en la descripción material con coordenadas \mathbf{Y}_m , y su versor normal saliente es \mathbf{n}_m .

Haciendo uso de la simetría de $\boldsymbol{\sigma}_m$ e introduciendo el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y la tasa temporal del tensor de Green-Lagrange asociado a las velocidades virtuales $\hat{\mathbf{v}}_m$ es posible plantear el equilibrio de la siguiente manera:

Encontrar $\mathbf{u}_m \in \mathcal{U}_m$ tal que \mathbf{S}_m sea capaz de satisfacer:

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{S}_m \cdot \hat{\mathbf{E}}_m \, d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \rho_m \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{v}}_m \, d\Omega_m + \int_{\Gamma_{N_m}} \mathbf{g}_m \cdot \hat{\mathbf{v}}_m \det \mathbf{F}_m |\mathbf{F}_m^{-T} \mathbf{n}_m| \, d\Gamma_{N_m} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_m \in \hat{\mathcal{V}}_m. \quad (10)$$

donde el segundo tensor de Piola-Kirchhoff está definido como:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{1}{\det \mathbf{F}_m} \mathbf{F}_m \mathbf{S}_m \mathbf{F}_m^T \quad (11)$$

Ahora, los campos de desplazamientos admisibles y sus variaciones asociadas en referencia a la configuración material quedan expresados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m &= \{ \mathbf{u}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega_m); \mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{u}}_m \text{ on } \Gamma_{D_m} \}, \\ \hat{\mathcal{V}}_m &= \{ \hat{\mathbf{v}}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega_m); \hat{\mathbf{v}}_m = 0 \text{ on } \Gamma_{D_m} \}. \end{aligned} \quad (12)$$

De las ecuaciones (7) y (10) se observa la dualidad entre $(\boldsymbol{\sigma}_s, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s)$ y $(\mathbf{S}_m, \hat{\mathbf{E}}_m)$.

Al tratar con materiales incompresibles, se debe considerar la condición que debe satisfacerse en el campo de desplazamientos. La misma se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la masa:

$$dm = \rho_m \cdot dV_m = \rho_s \cdot dV_s \quad (13)$$

Para los diferenciales de volumen se cumple que

$$dV_s = J \cdot dV_m \quad (14)$$

Siendo $J = \det \mathbf{F}_m$, el jacobiano de la deformación. Aplicando esto en la ecuación de conservación de la masa 13 se obtiene:

$$\rho_s \cdot J = \rho_m$$

Finalmente, la hipótesis de incompresibilidad implica que las densidades no varíen para cada partícula ($\rho_m = \rho_s$), motivo por el cual, la condición de incompresibilidad en la configuración material se expresa como $\det \mathbf{F}_m = 1$. En la configuración espacial, la condición se puede escribir $1 = \det \mathbf{F}_s^{-1}$ o $\det \mathbf{F}_s = 1$ de manera indistinta. Usualmente esta condición es relajada utilizando multiplicadores de Lagrange, que permiten eludir las dificultades de la definición de campos admisibles isocóricos Bonet and Wood (1997). La idea principal en este trabajo, es sortear el uso de multiplicadores utilizando un elemento de bajo orden, con una formulación modificada convenientemente para que no se produzca bloqueo en el campo de desplazamientos.

²En general cualquier cantidad ($\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_s (\phi(\mathbf{x}_m))$)

Vale la pena aclarar que ambas formulaciones variacionales (7) y (10) son completamente equivalentes al nivel de continuo. Al introducir las aproximaciones correspondientes a los espacios funcionales discretos (aproximación de elementos finitos), las formulaciones difieren. Además, en este trabajo se planteará el equilibrio a partir de su formulación en la configuración espacial (7).

2.2. Linealización

Para el proceso de linealización se utiliza el método de Newton-Raphson. La linealización de la formulación variacional es realizada en la descripción material asumida como conocida, y luego se convierten las expresiones a su forma espacial. Es importante mencionar que en este desarrollo no se tiene en cuenta la existencia de no linealidades provenientes del estado de cargas \mathbf{f}_s y \mathbf{g}_s , debido a que en hemodinámica el hecho de que la presión sea una carga seguidora no es de gran relevancia, ya que no es común que se produzcan inestabilidades geométricas derivadas de este tipo de cargas, por lo que no se requiere de dichas exigencias, al menos para los casos presentados en este trabajo.

La motivación para trabajar de esta manera surge de dos hechos significativos. El primero es que trabajando en la descripción material se puede dejar de lado la operación de integrar volumétricamente en un dominio desconocido (es decir, cuya configuración es parte de la solución), el cual es, justamente, la principal incógnita del problema. Y el segundo es que las relaciones constitutivas que nos permiten obtener el estado tensional para las correspondientes deformaciones están expresadas en la configuración de referencia.

La formulación variacional (7) puede ser escrita de manera abstracta (pero a la vez más expresiva, debido a que \mathcal{R}_{Ω_s} representa el residuo en la ecuación de equilibrio mecánico) en la siguiente forma:

Encontrar $\mathbf{u}_s \in \mathcal{U}_s$ tal que:

$$\langle \mathcal{R}_{\Omega_s}(\mathbf{u}_s), \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Omega_s} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s, \quad (15)$$

en el cual el operador \mathcal{R}_{Ω_s} tiene en cuenta la respuesta constitutiva del material y el efecto de las cargas. El operador posee como variables independientes las coordenadas espaciales \mathbf{x}_s , por lo que se utiliza la notación Ω_s para representar esta dependencia. Aplicando el conocido método de linealización de Newton-Raphson se obtiene:

$$\langle \mathcal{R}_{\Omega_s}(\mathbf{u}_s), \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Omega_s} + \left. \frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{R}_{\Omega_s + \tau \delta \Omega_s}(\mathbf{u}_s + \tau \delta \mathbf{u}_s), \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Omega_s + \tau \delta \Omega_s} \right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s, \quad (16)$$

donde $\delta \Omega_s$ es la variación del dominio, producto de los desplazamientos $\delta \mathbf{u}_s$. Por lo tanto, el problema lineal consiste en encontrar $\delta \mathbf{u}_s \in \mathcal{U}_s$ tal que:

$$\langle \mathcal{D}_{\Omega_s}(\mathbf{u}_s) \delta \mathbf{u}_s, \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Omega_s} = - \langle \mathcal{R}_{\Omega_s}(\mathbf{u}_s), \hat{\mathbf{v}}_s \rangle_{\Omega_s} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s, \quad (17)$$

donde $\mathcal{D}_{\Omega_s}(\mathbf{u}_s)$ es el operador tangente. En el caso más general, este operador es capaz de tener en cuenta las no linealidades provenientes del estado de carga además de las no linealidades geométricas y constitutivas. El operador tangente surge del segundo término en el lado izquierdo de la ecuación (16). A continuación se presentan las expresiones restantes para caracterizar los elementos presentes en la ecuación mencionada.

Con un poco de álgebra y definiendo:

$$\mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s(\delta \mathbf{u}_s) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_s} \mathbf{F}_s \left(\frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial \mathbf{E}_m} \right)_s \mathbf{F}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s(\delta \mathbf{u}_s) \mathbf{F}_s \mathbf{F}_s^T, \quad (18)$$

El problema linealizado resulta:

Encontrar $\delta \mathbf{u}_s \in \mathcal{U}_s$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} [\mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s(\delta \mathbf{u}_s) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s + (\nabla_{\mathbf{x}_s} \delta \mathbf{u}_s) \boldsymbol{\sigma}_s \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s)] d\Omega_s = \\ - \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s d\Omega_s + \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{f}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\Omega_s + \int_{\Gamma_{N_s}} \mathbf{g}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\Gamma_s \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s. \end{aligned} \quad (19)$$

El primer término de la izquierda es derivado de la respuesta constitutiva del material, y en notación indicial puede ser escrito de la siguiente manera:

$$[\mathbf{D}_s]_{ijkl} = \frac{1}{\det \mathbf{F}_s} [\mathbf{F}_s]_{ia} [\mathbf{F}_s]_{jb} [\mathbf{F}_s]_{kc} [\mathbf{F}_s]_{ld} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial \mathbf{E}_m} \right)_s \right)_{abcd}. \quad (20)$$

El segundo término en el lado izquierdo es la contribución a la matriz tangente de las no linealidades geométricas, que son el resultado de que la configuración final de equilibrio es desconocida de antemano. Se hace evidente que el tensor de cuarto orden \mathbf{D}_s y el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_s$ dependen de la configuración de equilibrio, es decir, $\mathbf{D}_s = \mathbf{D}_s(\mathbf{u}_s)$ y $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}_s)$.

Dada la matriz tangente y el estado de tensiones, el problema (19) constituye un único paso en el algoritmo iterativo tipo Newton mediante el cual es alcanzado el estado de equilibrio.

2.3. Materiales incompresibles

En el caso de materiales incompresibles se busca una expresión paralela a la (19). El desarrollo de esta formulación puede seguirse en [Urquiza et al. \(2012\)](#). La formulación queda expresada de la siguiente manera:

Encontrar $\delta \mathbf{u}_s \in \mathcal{U}_s$ y $\delta p_s \in \mathcal{P}_s$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} [p_s ((\nabla_{\mathbf{x}_s} \delta \mathbf{u}_s)^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_s} \delta \mathbf{u}_s \operatorname{div}_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s) \\ + \mathbf{D}_s^D \boldsymbol{\varepsilon}_s(\delta \mathbf{u}_s) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s + (\nabla_{\mathbf{x}_s} \delta \mathbf{u}_s) \boldsymbol{\sigma}_s^D \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s)] d\Omega_s \\ - \int_{\Omega_s} \delta p_s \operatorname{div}_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s d\Omega_s = - \int_{\Omega_s} (-p_s \operatorname{div}_{\mathbf{x}_s} \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_s^D \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s) d\Omega_s \\ + \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{f}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\Omega_s + \int_{\Gamma_{N_s}} \mathbf{g}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\Gamma_s \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \hat{\mathcal{V}}_s, \end{aligned} \quad (21)$$

y

$$- \int_{\Omega_s} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_s} \delta \mathbf{u}_s \hat{q}_s d\Omega_s = \int_{\Omega_s} (1 - (\det \mathbf{F}_s)^{-1}) \hat{q}_s d\Omega_s \quad \forall \hat{q}_s \in \mathcal{P}_s. \quad (22)$$

Nótese que esta formulación lleva arraigada un grado de libertad adicional a los tres ya existentes (desplazamientos en las tres direcciones coordenadas): la presión. Esto da un indicio del porqué del esfuerzo en resolver problemas incompresibles (o cuasi-incompresibles) con derivaciones de la formulación desarrollada para materiales compresibles.

Partiendo del problema linealizado planteado en 17, se formula el esquema iterativo de Newton para el cálculo del equilibrio mecánico del sistema. Consecuentemente, se termina operando con el problema lineal descrito en la ecuación (19). Cabe destacar, que en la convergencia con la variable de iteración k , los incrementos de desplazamientos terminan siendo nulos, i.e., $\delta \mathbf{u}_s^{k+1} \rightarrow 0$. Además, la configuración del cuerpo converge a Ω_s , lo que implica que el equilibrio mecánico es alcanzado en la configuración espacial.

2.4. Ecuaciones constitutivas hiperelásticas

Ecuaciones constitutivas

En este apartado se presentan algunas leyes constitutivas utilizadas para caracterizar materiales hiperelásticos.

Un material elástico ideal es aquel que recupera su geometría original luego de retirarse cualquier sollicitación que produzca una deformación del mismo. Un material hiperelástico (o material elástico de Green) se define como un material elástico para el cual existe una *función de energía potencial elástica* o *función energía de deformación* ψ (SEF -del inglés, strain energy function-), una función escalar dependiente de uno de los tensores de deformación, cuya derivada respecto a las componentes de deformación determina el estado de tensiones, ver e.g. [Malvern \(1969\)](#). Aquí, la información del estado de deformación es tenida en cuenta por los tensores de Cauchy-Green (\mathbf{C}) o equivalentemente por el tensor de Green Lagrange (\mathbf{E}). Por lo tanto, considerando una SEF ψ dependiente del tensor de Green-Lagrange $\psi(\mathbf{E}_m)$ podemos obtener el segundo tensor de Piola-Kirchhoff de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}_m = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_m}, \quad (23)$$

Recordando la relación (11), ahora podemos escribir:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{1}{\det \mathbf{F}_m} \mathbf{F}_m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_m} \mathbf{F}_m^T. \quad (24)$$

A su vez, el tensor de rigidez (el tensor de cuarto orden \mathbf{K}_m) asociado con un nivel de deformación \mathbf{E}_m , es obtenido mediante:

$$\mathbf{K}_m = \frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial \mathbf{E}_m} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}_m \partial \mathbf{E}_m}, \quad (25)$$

Teniendo en cuenta estas expresiones y volviendo a la configuración espacial, se puede reescribir la matriz tangente y el tensor de tensiones de Cauchy:

$$[\mathbf{D}_s]_{ijkl} = \frac{1}{\det \mathbf{F}_s} [\mathbf{F}_s]_{ia} [\mathbf{F}_s]_{jb} [\mathbf{F}_s]_{kc} [\mathbf{F}_s]_{ld} \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}_m \partial \mathbf{E}_m} \right)_s \right)_{abcd}. \quad (26)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{F}_s} [\mathbf{F}_s]_{ik} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_m} \right)_s \right)_{kl} [\mathbf{F}_s]_{jl}. \quad (27)$$

Se puede observar que para una dada configuración queda definido un \mathbf{F}_m (y por lo tanto, \mathbf{E}_m). Para obtener el tensor de rigidez \mathbf{K}_m y el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}_m se deben ir realizando sucesivas derivaciones del potencial elástico ψ como se estableció en (23) y (25).

A partir de la gran cantidad de ecuaciones constitutivas hiperelásticas existentes en la literatura especializada en el tema, surge como problema la implementación de cada una de las mismas ya que se requiere de un esfuerzo importante para programar las derivadas del potencial elástico para cada uno de los casos. Por este motivo, se propone realizar el cálculo de dichas derivadas utilizando el método de diferencias finitas. De esta manera a partir de programar únicamente el potencial elástico, se puede obtener de manera sencilla \mathbf{D}_s y σ_s .

Modelo de elasticidad lineal.

El modelo de elasticidad lineal caracteriza el comportamiento de materiales que poseen una relación lineal entre los desplazamientos y el estado de tensiones. La ecuación constitutiva lineal implementada es derivada de la Ley de Hooke generalizada ($S_{ij} = c_{ijkl}E_{kl}$). Además, se supone que se trabaja únicamente con materiales isotrópicos, llegando a la expresión de la energía potencial elástica que define el comportamiento del material:

$$\psi(\varepsilon) = 2\mu I_2 + \frac{\bar{\lambda}}{2} I_1^2 \quad (28)$$

Donde I_1 e I_2 son invariantes del tensor \mathbf{E} y los parámetros μ y $\bar{\lambda}$ los podemos relacionar con los parámetros conocidos E (módulo de elasticidad o de Young) y ν (coeficiente de Poisson) mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \bar{\lambda} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} - \frac{2\mu}{3} \quad (29)$$

Recordamos que μ caracteriza el comportamiento del material cuando está sometido al corte, ν controla la compresibilidad (o incompresibilidad del mismo) y los invariantes tienen la siguiente forma:

$$I_1 = tr(\mathbf{E}) = \varepsilon_{ii} \quad (30)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} tr(\mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} E_{ij} E_{ij} \quad (31)$$

Para ver los detalles de la ley constitutiva se puede consultar [Malvern \(1969\)](#), páginas 273 en adelante.

Modelos de Mooney-Rivlin y Neo-Hookean

El modelo de Mooney-Rivlin es generalmente utilizado para modelar distintos tipos de gomas elásticas, aplicable en aquellos casos en que la deformación alcanza niveles cercanos al 100 %. Originalmente es propuesto para tratar materiales únicamente incompresibles; la energía potencial queda definida de la siguiente manera:

$$\psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (32)$$

Y además, para satisfacer la incompresibilidad se debe cumplir:

$$J = det\mathbf{F} = 1 \quad (33)$$

Cabe destacar que si se consideran pequeñas deformaciones, se recupera el modelo lineal elástico siendo $E = 6(C_1 + C_2)$ y $G = 2(C_1 + C_2)$.

También de esta ecuación podemos obtener el modelo Neo-Hookean, que es un caso particular del Mooney-Rivlin en el cual $C_2 = 0$.

Los invariantes a considerar son:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (34)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) \quad (35)$$

Para trabajar con cierta compresibilidad se desestima la condición 33 y se agrega un término hidrostático que tenga en cuenta el cambio volumétrico función del invariante $I_3 = J^2 = \det(\mathbf{C})$:

$$\psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + \psi_h^*(I_3) \quad (36)$$

Sin embargo, como los tres términos están relacionados con la presión, es conveniente realizar un cambio en el planteo utilizando un único término para la presión $p = -\kappa (\bar{I}_3 - 1)$ y recurriendo a los invariantes reducidos:

$$\bar{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}; \quad \bar{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3}; \quad \bar{I}_3 = I_3^{1/2}; \quad (37)$$

De esta manera la ecuación 36 resulta:

$$\psi = C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{2}\kappa(J - 1)^2 \quad (38)$$

Donde κ es el módulo que caracteriza la compresibilidad del material; si el mismo es lo suficientemente grande es posible aproximarse a un comportamiento muy cercano a la incompresibilidad pura.

Otra manera de formular la ley constitutiva de Mooney-Rivlin es la propuesta en Lamichhane (2002). En su forma compresible se puede escribir:

$$\psi = \lambda \frac{1}{4} (J^2 - 1 - 2\ln(J)) + \frac{\mu}{2} [(1 - c_m)(I_1 - 3 - 2\ln(J)) + c_m(I_2 - 3 - 2\ln(J))] \quad (39)$$

Y para la formulación incompresible:

$$\psi = \frac{\mu}{2} [(1 - c_m)(\bar{I}_1 - 3 - 2\ln(J)) + c_m(\bar{I}_2 - 3 - 2\ln(J))] \quad (40)$$

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (41)$$

En este caso el modelo Neo-Hookean es recuperado con $C_m = 0$.

Para más detalles de este modelo constitutivo se recomienda consultar Crisfield (1991); Bathe (1996); Mase (1999).

Modelo constitutivo exponencial propuesto por Delfino

En este modelo simplificado de la pared arterial se propone un potencial isotrópico con el objetivo de modelar el endurecimiento típico del material en altos niveles de presión para arterias humanas. Este efecto de endurecimiento se debe a que las fibras de colágeno presentes en la pared y que poseen un módulo de elasticidad muy alto comparado con la matriz de fibras de elastina en las que se encuentran inmersas, están originalmente arrolladas y solo se activan en la medida que se enderezan con niveles crecientes de estiramiento de la pared arterial.

La función energía de deformación, dependiente de invariante $\bar{I}_1 = \bar{C} : I$, está caracterizada por la siguiente forma:

$$\bar{\psi} = \frac{a}{b} \left\{ \exp \left[\frac{b}{2} (\bar{I}_1 - 3) \right] - 1 \right\} \quad (42)$$

Donde $a > 0$ y $b > 0$ (dimensional) son parámetros que definen el comportamiento del material.

Si se desea conocer con detalle los aspectos matemáticos de esta formulación y su origen se recomienda consultar los textos [Delfino et al. \(1997\)](#); [Holzapfel et al. \(2001\)](#).

3. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO F-BAR

3.1. Introducción

En secciones previas ya se han fundamentado las principales cuestiones conceptuales referentes a este tipo de elemento. A continuación se destacan los aspectos más relevantes del mismo. Para mayores detalles puede consultarse la referencia original [de Souza Neto et al. \(1996\)](#).

3.2. Aspectos generales

El tipo de elemento a utilizar es el hexaedro de 8 nodos, también conocido como “ladrillo”. Los elementos están basados en el concepto de división multiplicativa de las partes volumétrica y desviadora del tensor gradiente de deformación, en conjunto con el reemplazo de la parte volumétrica del gradiente de deformación con una contraparte modificada. De este modo, se consigue que en el interior del elemento se tenga un campo de deformación volumétrica uniforme congruente con una distribución de presión constante. La formulación resultante puede ser usada sin importar el modelo de material adoptado. Como se verá en la siguiente sección, el esfuerzo computacional aportado al ya existente es muy bajo.

3.3. Deducción de la formulación del elemento

Descomposición del tensor gradiente de deformación

Se toma el tensor gradiente de deformación y se procede a expresarlo en función de sus componentes volumétrica y desviadora, de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d \mathbf{F}_v \quad (43)$$

donde \mathbf{F}_d y \mathbf{F}_v son las componentes desviadora y volumétrica, respectivamente, y están definidas de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_d = (\det(\mathbf{F}))^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \mathbf{F}_v = (\det(\mathbf{F}))^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}$$

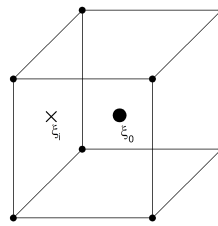


Figura 2: Esquema de un elemento hexaédrico de 8 nodos.

donde I es el tensor identidad.

Constructivamente, estos tensores satisfacen las siguientes relaciones:

$$\det(\mathbf{F}_d) = 1 \quad \det(\mathbf{F}_v) = \det(\mathbf{F})$$

Obtención de la nueva formulación

El punto de partida se encuentra en la formulación variacional del problema mecánico, dada por la ecuación 17 y subsecuentes, presentadas en la sección 2.2.

Considérese un elemento hexaédrico típico de 8 nodos (Figura 2), con coordenadas locales dadas por ξ . Típicamente, la integración numérica de la matriz elemental es llevada a cabo mediante el método de cuadratura de Gauss; ésta requiere calcular las tensiones en un determinado número de puntos de Gauss y, para problemas geoméricamente no lineales, las tensiones se obtienen a partir del gradiente de deformación a través del uso de una *función energía de deformación* o *función potencial de energía elástica* ψ .

Sea \mathbf{F} el tensor gradiente de deformación obtenido de la interpolación estándar del campo de desplazamientos en un punto de integración genérico \mathbf{i} , con coordenadas ξ_i . De tal forma, para los elementos convencionales, el tensor de tensiones de Cauchy σ es determinado en cada punto de integración como una expresión de \mathbf{F} ,

$$\sigma = \sigma(\mathbf{F}) \quad (44)$$

A continuación se introduce una formulación modificada convenientemente para evitar la aparición de *locking* en el campo de desplazamientos en casos cercanos al límite de la incompresibilidad. La idea clave es modificar el tensor gradiente de deformación para calcular las tensiones en la ecuación 44. En primera instancia se aplica la descomposición dada por la ecuación 43 tanto al tensor gradiente de deformación evaluado en cada punto de Gauss como al tensor gradiente de deformación calculado en el centroide del elemento, \mathbf{F}_0 .

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d \mathbf{F}_v \quad \mathbf{F}_0 = (\mathbf{F}_0)_d (\mathbf{F}_0)_v$$

El gradiente de deformación modificado, $\bar{\mathbf{F}}$ (F-Bar), es definido como la composición de la parte desviadora de \mathbf{F} en el punto de gauss arbitrario y la componente volumétrica evaluada en el centroide \mathbf{F}_0 , es decir

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_d (\mathbf{F}_0)_v = \left(\frac{\det(\mathbf{F}_0)}{\det(\mathbf{F})} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (45)$$

Habiendo hecho esta modificación, el elemento será calculado reemplazando \mathbf{F} por $\bar{\mathbf{F}}$ en la ecuación 44. De esta manera, la tensión de Cauchy será calculada como

$$\sigma = \sigma(\bar{\mathbf{F}})$$

Consecuentemente, el nuevo elemento se implementa de forma muy similar a la del elemento tradicional. Solamente cambia la forma de evaluar el tensor gradiente de deformación: ahora este tensor, como puede apreciarse en la ecuación 45, es el mismo pero multiplicado por una constante, $\left(\frac{\det(\mathbf{F}_0)}{\det(\mathbf{F})}\right)^{\frac{1}{3}}$. Por lo tanto, el esfuerzo computacional adicionado al emplear esta modificación es mínimo.

En este trabajo se reemplaza \mathbf{F} por $\bar{\mathbf{F}}$ directamente en la formulación linealizada. Esto lleva a que, en el proceso de linealización, la matriz tangente deba ser calculada también reemplazando \mathbf{F} por $\bar{\mathbf{F}}$. Podría haberse optado por hacer el reemplazo previo a linealizar, y tal vez habría quedado una formulación variacional diferente a la obtenida. Queda para trabajos posteriores verificar cómo difieren los resultados de adoptar una u otra alternativa.

4. ESTUDIO DE CASOS DE VALIDACIÓN

En esta sección se describen y analizan los resultados de una serie de ejemplos resueltos con el elemento F-bar. Los casos fueron implementados en un framework de elementos finitos perteneciente al grupo de trabajo. Se realizaron varios ensayos numéricos pero, por razones de brevedad, se presentan a continuación sólo aquellos que contribuyen a mostrar el desempeño del elemento F-bar.

4.1. Membrana de Cook

Descripción del ensayo

Este ensayo intenta verificar el comportamiento del elemento en un caso típico de grandes deformaciones: la membrana de Cook. Este problema ha sido abordado por distintos autores en sus respectivos trabajos, entre los cuales se pueden mencionar [de Souza Neto et al. \(1996\)](#); [Lamichhane \(2002\)](#); [Cisloiu \(2006\)](#); [Taylor \(2000\)](#).

La membrana de Cook consiste en una placa cuya geometría puede ser observada en la figura 3, que se encuentra empotrada en uno de sus extremos y solicitada por una fuerza de corte distribuida en el extremo opuesto. Cabe destacar que el problema tiene restringido el movimiento en la dirección normal al plano, por lo que se trata de un problema de deformación plana.

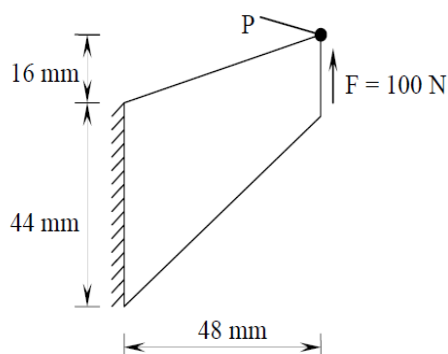


Figura 3: Membrana de Cook: geometría del problema.

La ley constitutiva empleada es la de Mooney-Rivlin caracterizada por la ecuación 39. Notar

que utilizando $c_m = 0$, se recupera el modelo Neo-Hookean.

Ya que no existe solución analítica del problema, los resultados serán contrastados con dos casos expuestos en dos de las publicaciones mencionadas.

Finalmente se efectúa un análisis de respuesta del elemento variando la relación $\frac{\lambda^3}{\mu}$ (linealmente equivalente a variar el coeficiente de Poisson) para detectar el valor máximo de la misma que produce resultados confiables en el campo de presión.

Soluciones de referencia

Caso N°1

Los siguientes parámetros (dados en unidades consistentes entre sí) son los utilizados en [de Souza Neto et al. \(1996\)](#):

- Modelo de material: Neo-Hookean
- $F = 100$
- $\mu = 80,1938$
- $k = 400942$
- $c_m = 0$

Esto representa un problema con la misma compresibilidad que un problema lineal elástico con los siguientes parámetros ingenieriles:

- $E \approx 240$
- $\nu = 0,4999$

El desplazamiento vertical del punto P es $u_y \approx 7,0$

Caso N°2

Los siguientes parámetros son utilizados en el modelo Mooney-Rivlin en [Lamichhane \(2002\)](#):

- Modelo de material: Mooney-Rivlin
- $E = 250$
- $\nu = 0,4999$
- $c_m = 0,25$

El desplazamiento vertical del punto P es $u_y \approx 8,4$

³Siendo λ el módulo de compresibilidad volumétrico y μ el módulo de resistencia al corte.

Malla utilizada

Se trabajará con una malla estructurada de 30 x 30 elementos en la cara visible y 1 elemento en el espesor. Se tiene un total de 1922 nodos y 900 elementos hexaédricos que componen el volumen. (Ver figura 4).

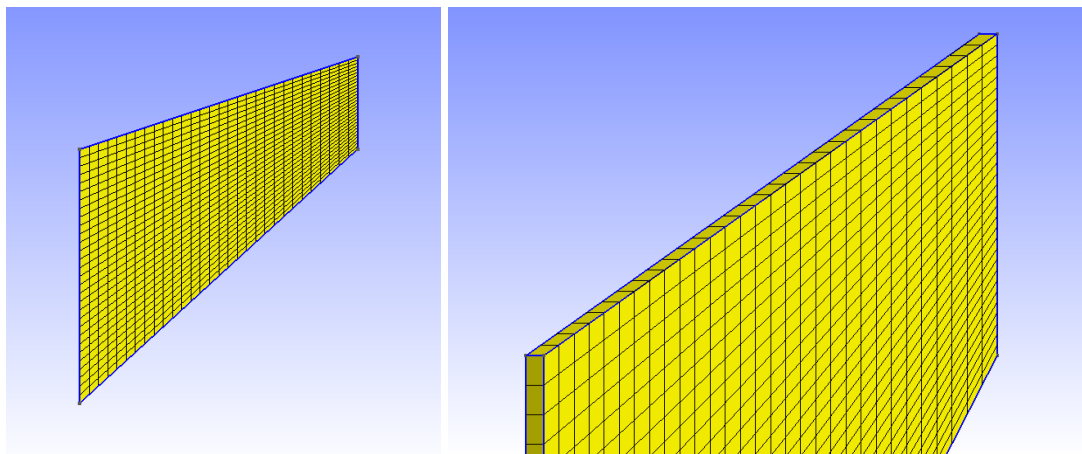


Figura 4: Membrana de Cook: malla utilizada.

Resultados

En la tabla 4.1 se compara la solución generada por el elemento con la solución de referencia obtenida de de Souza Neto et al. (1996).

En las figuras 5, 6, 7 y 8 se observan el desplazamiento vertical y la presión en todos los puntos de la membrana para las dos situaciones simuladas, en todos los casos sobre la configuración deformada. En la figura 9 se presenta un detalle de la presión en la esquina superior izquierda de la membrana para el caso N°1.

Material	Desplazamiento vertical en P obtenido	Desplazamiento vertical en P de referencia	Error [%]
Neo-Hookean	6,9	7,0	-1,42
Mooney-Rivlin	8,6	8,4	2,38

Tabla 1: Membrana de Cook: desplazamiento vertical del punto P en los dos casos analizados.

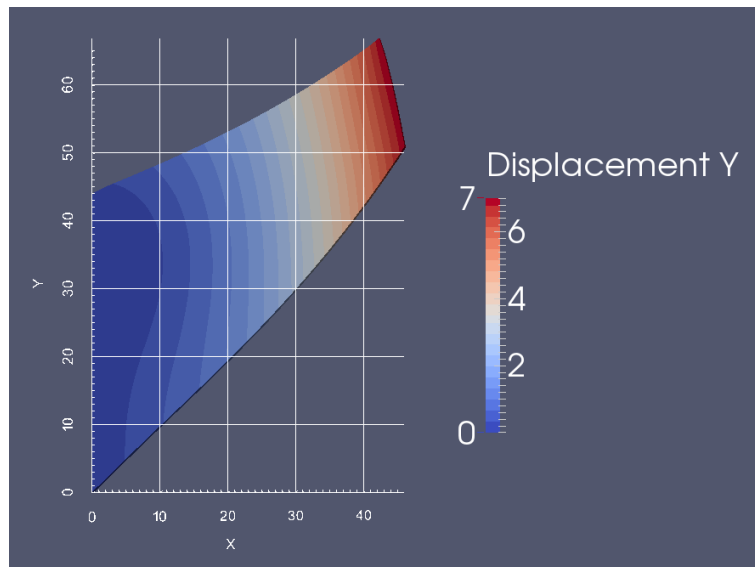


Figura 5: Membrana de Cook: campo de desplazamiento vertical - Caso N°1.

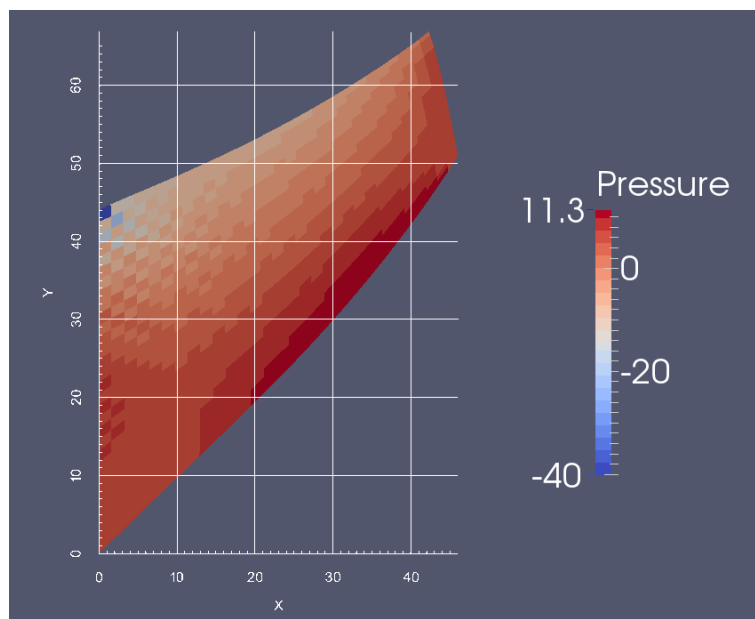


Figura 6: Membrana de Cook: campo de presión - Caso N°1.

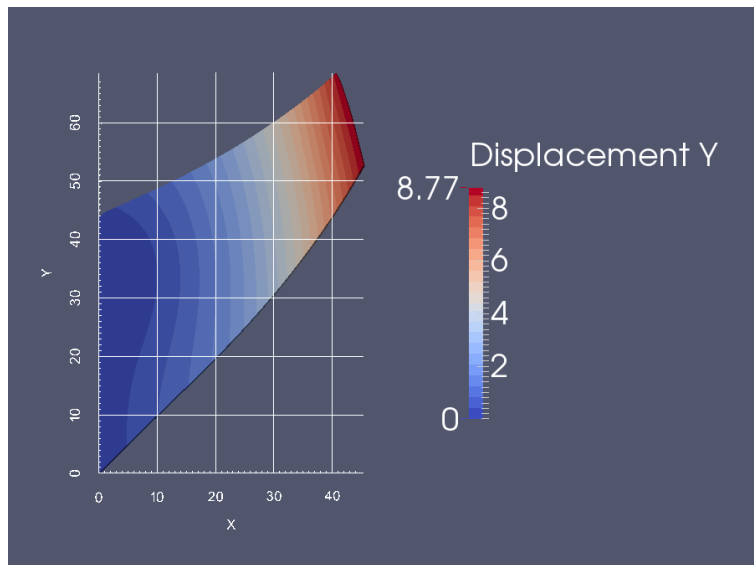


Figura 7: Membrana de Cook: campo de desplazamiento vertical - Caso N°2.

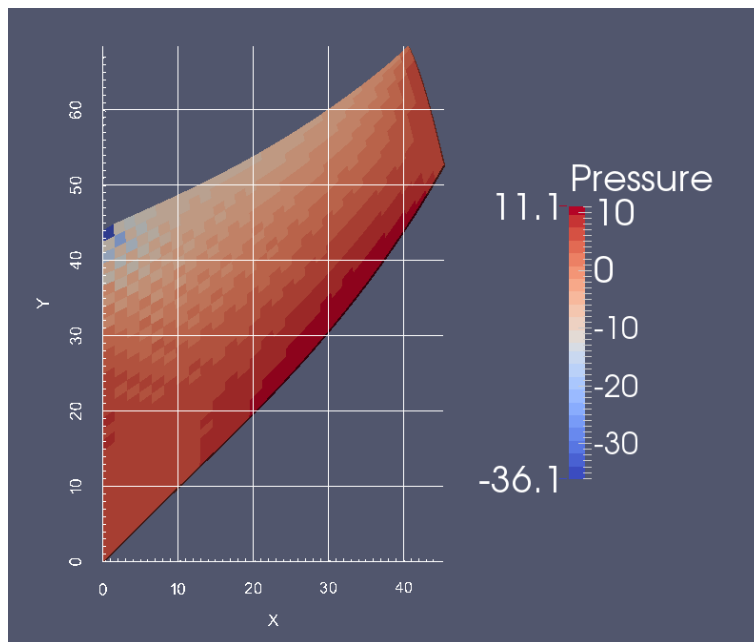


Figura 8: Membrana de Cook: campo de presión - Caso N°2.

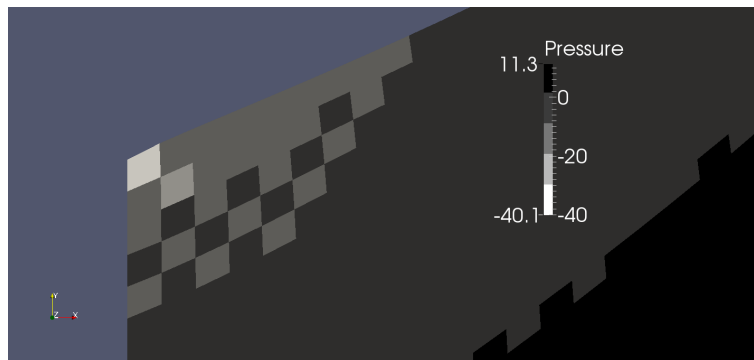


Figura 9: Membrana de Cook: detalle del campo de presión - Caso N°1.

El resultado del análisis realizado variando la relación $\frac{\lambda}{\mu}$ indicó que utilizando $\frac{\lambda}{\mu} = 10$ los indicios de aparición de modos espurios de presión tipo “Tablero de ajedrez” (*checkerboard*) son prácticamente nulos (ver figura 10). Esto equivale a emplear $\nu \approx 0,45$.

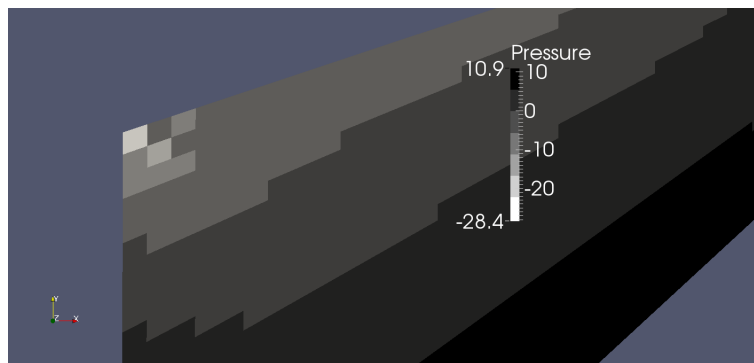


Figura 10: Membrana de Cook: detalle del campo de presión, $\frac{\lambda}{\mu} = 10$

4.1.1. Discusión

Observando los resultados expuestos en la tabla 4.1, se puede afirmar que el elemento tiene un buen rendimiento en el cálculo de desplazamientos. En el campo de presiones es sencillo notar (véase fig. 9) que aparece el fenómeno conocido como *checkerboard*. Este ensayo pone en evidencia que el elemento tiene problemas para representar de forma fidedigna el campo de presiones en situaciones cercanas a la incompresibilidad. El resultado del análisis efectuado acerca de la relación $\frac{\lambda}{\mu}$ que produce buenos resultados en el campo de presión invita a utilizar el elemento de manera confiable para valores de $\frac{\lambda}{\mu}$ menores o iguales a 10. De lo contrario, esta formulación tendrá que ser usada tomando los recaudos necesarios a la hora de obtener presiones o tensiones.

Es interesante mencionar que para el caso N°2, en el trabajo original además de publicarse resultados numéricos con su correspondiente error, se proporciona una gráfica de convergencia que muestra que los resultados poseen una cierta pendiente final. Este hecho sugiere que si se hubiera realizado el ensayo con mayor cantidad de elementos, el resultado habría sido mayor, acercándose más al conseguido con el elemento utilizado en este trabajo. De cualquier manera, es muy notable la mejoría que se logró con este elemento respecto del tradicional. Este último es incapaz de calcular con buena precisión el campo de desplazamientos para estos niveles de incompresibilidad (debido al fenómeno de *locking*).

4.2. Arco empotrado sometido a carga distribuida.

Descripción del ensayo

El problema a resolver es tomado de la referencia Lamichhane (2002) y los resultados serán contrastados con los publicados por el mismo. Consiste en un arco empotrado en sus extremos sometido a una carga distribuida en dirección radial en la superficie exterior de la zona central. Se restringe el desplazamiento en la dirección perpendicular al plano, para una de las caras de la corona circular. La geometría del problema puede observarse en la figura 11.

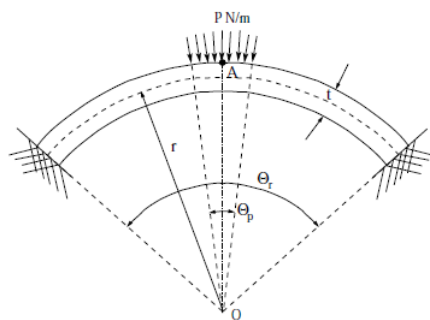


Figura 11: Arco sometido a carga distribuida: geometría del problema.

Para representar el comportamiento mecánico del material se utiliza la ecuación constitutiva de Mooney-Rivlin (ec.39) presentada por el autor de la publicación ya descrita en el capítulo 2.4.

La resolución de este problema es un desafío importante dada la alta no-linealidad del mismo involucrando grandes niveles de deformación y desplazamientos.

Para llegar al equilibrio se utilizan pasos de carga pequeños, incrementando la carga distribuida gradualmente. Esto es necesario debido a la gran deformación alcanzada y reviste de especial importancia en la zona de transición donde se produce un fenómeno de inestabilidad elástica conocida como efecto *snap-through*. De otro modo, la diferencia entre los estados de equilibrio para dos distintas cargas serían muy diferentes, provocando que el método de linealización de Newton-Raphson sea incapaz de alcanzar la convergencia.

Datos de la geometría utilizados:

- Radio interno: $0,95 [m]$
- Radio externo: $1,05 [m]$
- Ángulo total del arco: 60°
- Ángulo del arco sometido a presión externa: 20°
- Carga distribuida máxima alcanzada: $20 [N/m]$

Parámetros característicos del material:

- Modelo de material: Mooney-Rivlin ($c_m = 0,15$)

- $E = 250[N/m^2]$
- Se exponen los resultados correspondientes a $\nu = 0,49$, $\nu = 0,499$, $\nu = 0,4999$ y $\nu = 0,49999$.

Malla utilizada

Se produce una malla compuesta por hexaedros en el volumen, y rectángulos en la superficie. Se utiliza una malla estructurada de 9 elementos en la dirección radial, 80 en la dirección circunferencial y 1 elemento en el espesor. Se cuenta con un total de 1620 nodos. (Ver figura 12).

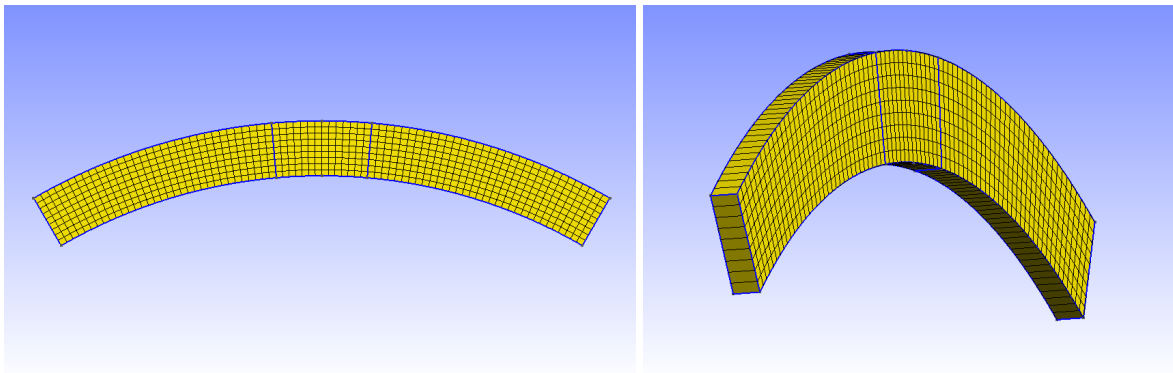


Figura 12: Arco sometido a carga distribuida: malla utilizada

4.2.1. Resultados

En la tabla 2 se presentan los resultados obtenidos con el elemento F-bar para distintos valores de coeficientes de Poisson, contrastados con los resultados publicados en Lamichhane (2002).

ν	Desplazamiento punto A obtenido [m]	Desplazamiento punto A de referencia [m]	Error [%]
0,49	-0,4271	-0,4330	-1,36
0,499	-0,4279	-0,4321	-0,98
0,4999	-0,42743	-0,4320	-1,07
0,49999	-0,42032	-0,4320	-2,71

Tabla 2: Arco sometido a carga distribuida: desplazamiento punto A.

En las figuras 13 y 14 se muestra el resultado del campo de desplazamientos en la dirección y y x , para la configuración de referencia (geometría antes de la aplicación de la carga) y para en la configuración de equilibrio, respectivamente. En la figura 15 aparece el campo de presión mostrado en la configuración no deformada, junto con un detalle en el empotramiento.

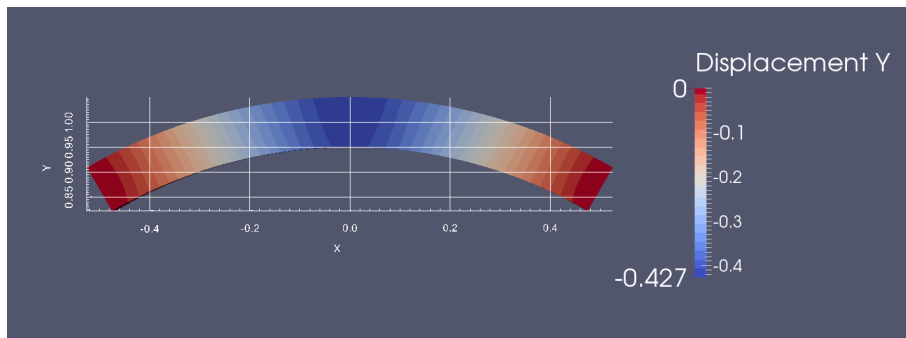


Figura 13: Arco sometido a carga distribuida: campo de desplazamiento en y , $\nu = 0,49$ - mostrado en la geometría de referencia.

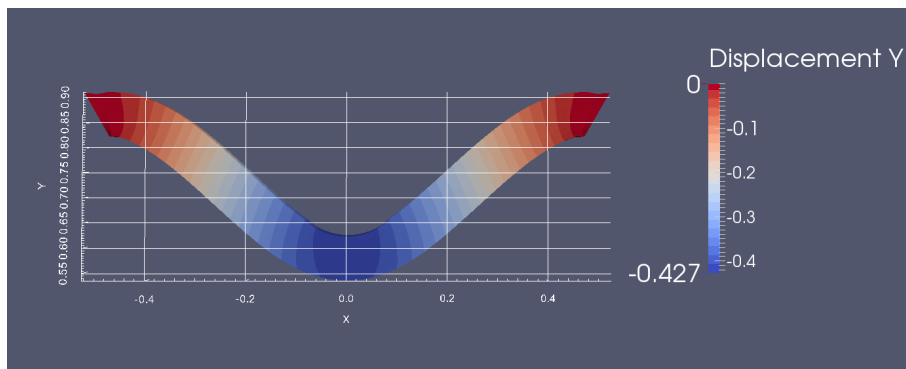


Figura 14: Arco sometido a carga distribuida: campo de desplazamiento en y , $\nu = 0,49$ - mostrado en la geometría deformada.

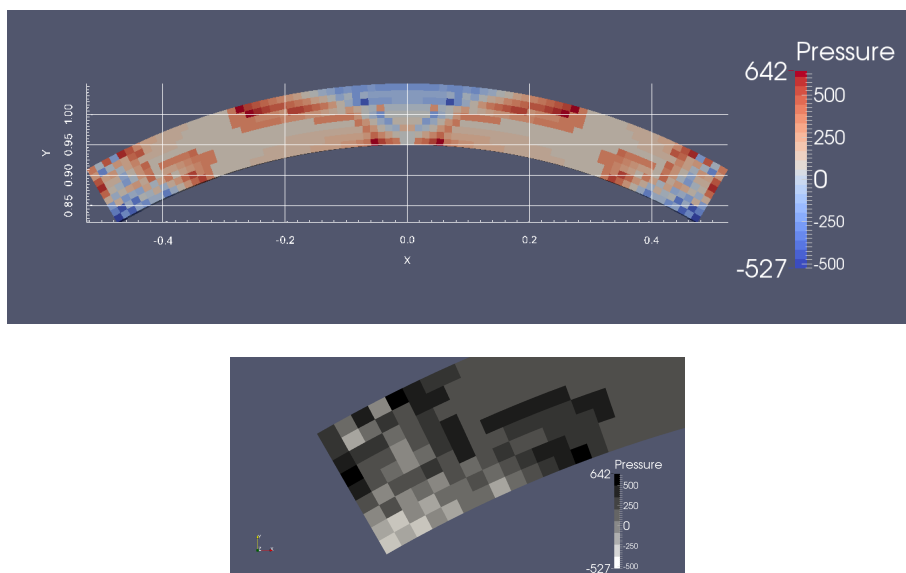


Figura 15: Arco sometido a carga distribuida: campo de presión mostrado en la configuración inicial, $\nu = 0,49$, y detalle de una de las secciones de empotramiento.

4.2.2. Discusión

Este ensayo es útil para remarcar la gran capacidad que tiene esta formulación para reproducir de modo fehaciente el campo de desplazamientos en situación de cuasi-incompresibilidad, y lo consigue incluso para valores de ν muy próximos a 0,5.

En cuanto al campo de presión, esta experiencia delata los problemas que posee el elemento para calcularlo adecuadamente. Incluso para valores bajos de ν el campo de presión tiene un mal aspecto. El fenómeno de *checkerboard* domina claramente las zonas cercanas a los empotramientos, como puede verse en la figura 15. Esto es bien sabido para los elementos lineales con campos de presión constante. Cabe resaltar que el F-Bar es consistente con un campo de presiones uniformes en su interior, ya que la componente volumétrica de deformaciones es constante, por construcción, en su interior.

4.3. Cilindro de pared gruesa

Descripción del ensayo

Un problema típico es la resolución de desplazamientos y tensiones en un cilindro de pared gruesa sometido a presión interna, para el cual son conocidos los resultados analíticos si se considera que el material tiene un comportamiento modelable con la teoría de la elasticidad lineal. Por lo tanto, se utiliza la ecuación constitutiva correspondiente a un material lineal elástico e isotrópico (ec. 28) y los resultados se comparan con los analíticos. Se considera un caso de deformación plana (se restringen los desplazamientos según x para las dos caras de corona circular) y se evitan los desplazamientos normales a las superficies de simetría.

Las dimensiones del cilindro a modelar son las siguientes:

- $R_{interno} = 5[m]$
- $R_{externo} = 10[m]$
- $Espesor = 5[m]$

Notar que $\frac{radio}{espesor} = 2$ (considerando radio exterior), completamente lejano al valor generalmente aceptado de 10 para considerar que el cilindro es de pared delgada. Por lo tanto, es inevitable considerar que el cilindro posee pared gruesa.

- $Altura = 1[m]$

Constantes de material y presión aplicada:

- $E = 1000[Pa]$
- Se exponen los resultados correspondientes a $\nu = 0,35$, $\nu = 0,4$, $\nu = 0,45$, $\nu = 0,49$ y $\nu = 0,499$.
- $P = 1[Pa]$

Se aplica una presión pequeña con el propósito de comparar los resultados con la solución analítica, que considera pequeñas deformaciones.

Solución analítica

Con el objetivo de contrastar los resultados posteriores se presenta a continuación el valor esperado del desplazamiento radial interno y de la tensión radial σ_r en un punto muy cercano al radio interno, acordes a la solución analítica del problema considerando la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones. Soluciones para el desplazamiento radial y tensiones en un cilindro de pared gruesa están deducidas, por ejemplo, en Feodosiev (1980) y Timoshenko (1957). Se aclara que en Feodosiev (1980) las soluciones brindadas están dadas para los casos de tensión plana y de cilindro con tapas (extremos solicitados axialmente, pero no vinculados rígidamente), y en Timoshenko (1957) solamente la solución para tensión plana. En ningún caso se accedió a la solución para deformación plana (desplazamiento axial restringido en los extremos). Para obtener las fórmulas presentadas a continuación, se sigue un procedimiento parecido a los explicados en las fuentes bibliográficas citadas, pero en lugar de fijar una tensión axial conocida (y dependiente de la presión aplicada) o nula (en el caso de tensión plana) se impone que la deformación en sentido axial sea nula.

Desplazamiento radial en función de la distancia al centro para cilindro solamente sometido a presión interna:

$$u(r) = \frac{(1 - \nu) \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) r_1^2 P}{E (r_2^2 - r_1^2)} r + \frac{(1 + \nu) r_2^2 r_1^2 P}{E (r_2^2 - r_1^2) r}$$

Donde:

- r_1 : radio interno.
- r_2 : radio externo.
- P : presión.

Tensión σ_r en función de la distancia al centro para cilindro solamente sometido a presión interna:

$$\sigma_r(r) = \frac{r_1^2 r_2^2 P}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 P}{r_2^2 - r_1^2}$$

A diferencia del desplazamiento, que se calcula exactamente en el radio interno, la longitud r para obtener la tensión se selecciona en la ubicación del centroide del elemento más cercano al radio interno, y no en la posición correspondiente al radio interno. La razón de esto es que la tensión se calcula por elemento (en su centroide), y no por nodo. Por lo tanto, son más comparables los valores de la tensión elemental y la tensión analítica calculada en el centroide del elemento, que la calculada en el radio interno.

Malla utilizada

Al ser un cuerpo con simetría de revolución, se selecciona un cuarto de cilindro, con la normal a una de las caras rectangulares alineada con el eje y , y la normal a la otra cara rectangular alineada con el eje z , con la intención de facilitar la aplicación de condiciones de Dirichlet.

Se discretiza el dominio con 18 elementos en el radio, 1 elemento en el espesor y 50 elementos en dirección circunferencial, como muestra la figura 16. Queda un total de 1938 nodos.

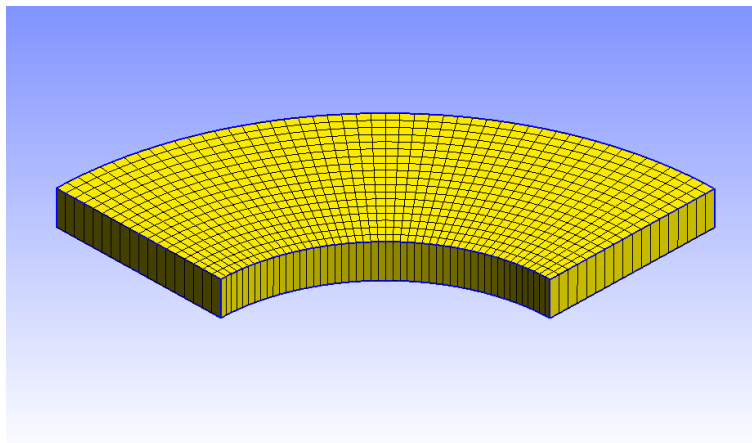


Figura 16: Cilindro de pared gruesa: malla utilizada.

Resultados

En las tablas 3 y 4 se encuentran los resultados obtenidos con el F-bar, contrastados con la solución analítica en cada caso.

ν	u_r en radio interno - F-bar	u_r en radio interno - Sol. analítica	Error [%]
0,35	0,0097	0,0097	0,00
0,4	0,0098	0,0098	0,00
0,45	0,0099	0,0099	0,00
0,49	0,0099	0,0100	-0,83
0,499	0,0093	0,0100	-7,48

Tabla 3: Cilindro de pared gruesa: desplazamiento radial interno.

ν	σ_r en radio interno - F-bar	σ_r en radio interno - Sol. analítica	Error [%]
0,35	-0,922	-0,929	-0,74
0,4	-0,919	-0,929	-1,07
0,45	-0,911	-0,929	-1,93
0,49	-0,852	-0,929	-8,28
0,499	-0,272	-0,929	-70,72

Tabla 4: Cilindro de pared gruesa: tensión radial interna.

Se muestran a modo de ejemplo en las figuras 17, 18 y 19 el desplazamiento radial, tensión radial y presión, respectivamente, para $\nu = 0,45$, y en la figura 20 el desplazamiento radial para $\nu = 0,499$.

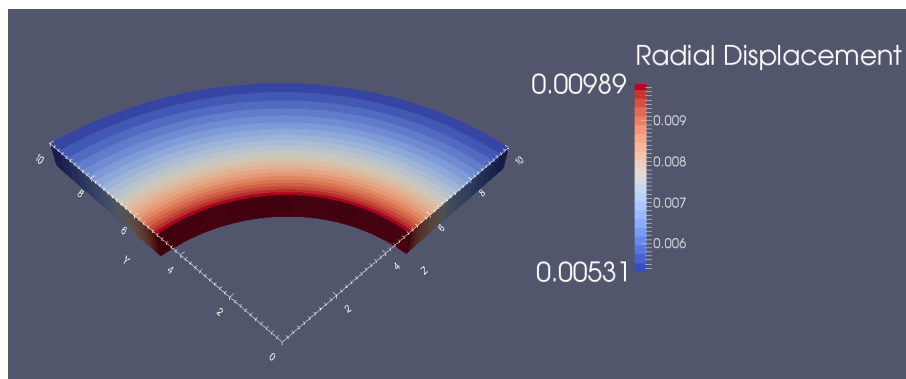


Figura 17: Cilindro de pared gruesa: campo de desplazamiento radial, $\nu = 0,45$.

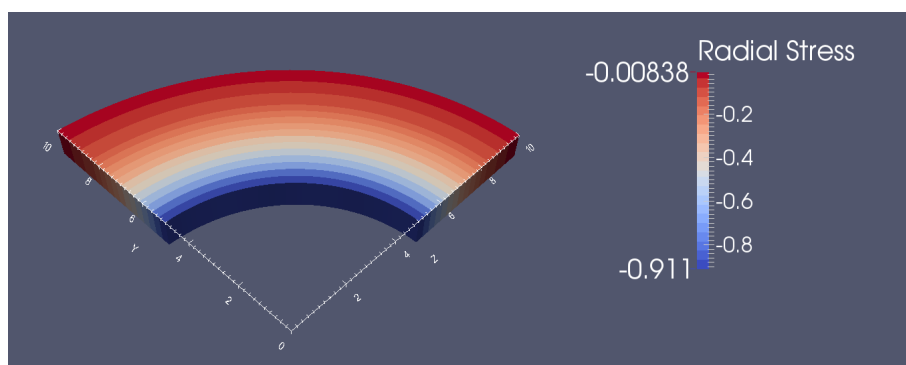


Figura 18: Cilindro de pared gruesa: campo de tensión radial, $\nu = 0,45$.

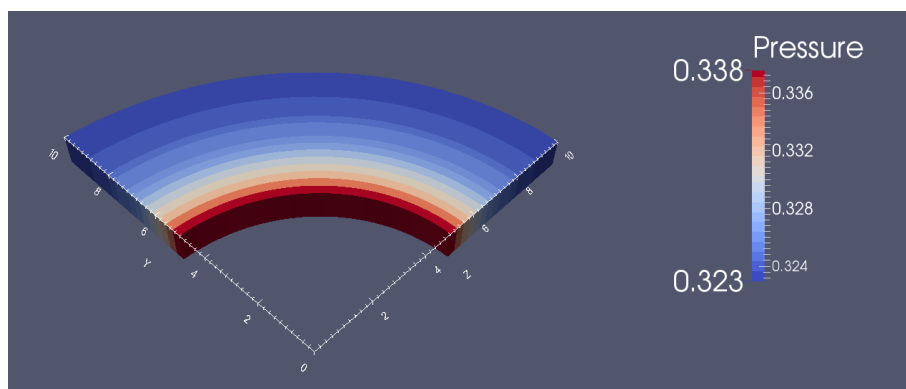


Figura 19: Cilindro de pared gruesa: campo de presión, $\nu = 0,45$.

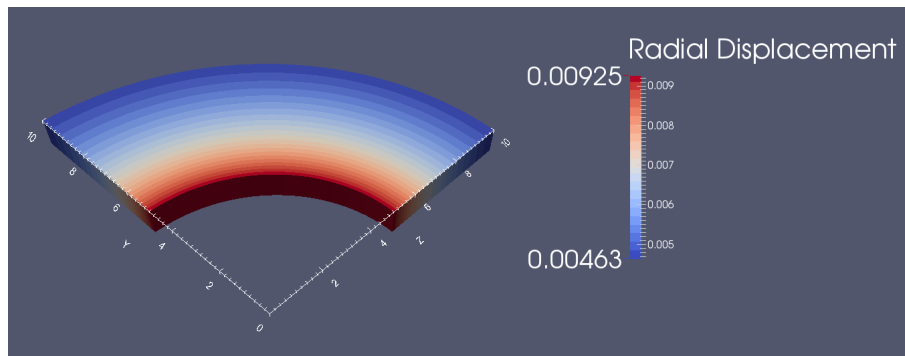


Figura 20: Cilindro de pared gruesa: campo de desplazamiento radial, $\nu = 0,499$.

Discusión

Este ensayo manifiesta algunas de las características ya observadas previamente:

- La formulación demuestra una gran capacidad para representar los desplazamientos incluso empleando coeficientes de Poisson tan altos como $\nu = 0,49$.
- Para coeficientes de Poisson mayores, se incrementa enormemente el error en el cálculo de desplazamientos. No obstante, como se puede apreciar en la figura 20, el campo de desplazamiento radial no denota ningún tipo de anisotropía. Esta es una gran ventaja frente a la formulación tradicional de los materiales compresibles. En Urquiza et al. (2012) se simuló un problema análogo con distintos tipos de formulaciones, y se revelan imágenes que evidencian la anisotropía en el campo de desplazamiento radial.
- Aparentemente el campo de tensiones tiene un bajo nivel de error sólo para coeficientes de Poisson bajos. Esto ratifica lo expuesto anteriormente de que el elemento F-bar no es una buena opción para calcular campos tensionales en problemas cuasi-incompresibles debido a la inestabilidad de la presión.

5. CASO DE APLICACIÓN A UNA SECCIÓN ARTERIAL

En la sección 4 se somete al elemento a una serie de pruebas para conocer su desempeño e identificar algunas deficiencias. En virtud que el elemento se ha desempeñado de manera adecuada en el cálculo de desplazamientos, será factible probarlo para resolver un problema de interés en hemodinámica del sistema arterial, y comparar los resultados con datos publicados para las curvas de presión diámetro de un segmento arterial de carótida humana.

5.1. Arteria carótida humana modelada con la ley constitutiva de Delfino

Descripción del caso

Se procede a modelar el comportamiento de una arteria carótida humana. Una hipótesis para poder trabajar con ella es que su geometría es perfectamente cilíndrica. Al ser un cuerpo con simetría se puede ensayar una porción del mismo. Se utilizará un cuarto de arteria (esto facilita la imposición de condiciones de Dirichlet, ya que dos de las caras cuyas normales podrían señalar en cualquier dirección, se las posiciona coincidentes a los ejes y y z). El cilindro es sometido a un pre-estiramiento en sentido axial (que será indicado como un porcentaje de la altura inicial del mismo) y luego es sometido a la acción de una presión interna.

Se vincula rígidamente la superficie inferior (desplazamientos nulos) y se impone un desplazamiento igual al pre-estiramiento axial para la superficie superior. En las dos caras restantes se condicionan los desplazamientos en la dirección normal a cada una de las caras de simetría. Se emplearán diferentes valores de presión interna en los elementos de la superficie interior de la pared arterial.

Para evaluar el desempeño de la formulación se reproduce el ensayo numérico realizado en [Holzapfel et al. \(2001\)](#), del cual se extraen los datos geométricos y los parámetros de la función energía de deformación propuesta por Delfino [Delfino et al. \(1997\)](#) que caracterizan el comportamiento del material. Los mismos se muestran a continuación:

Radio Interno: $R_i = 3,1 [mm]$

Radio Externo: $R_o = 4,0 [mm]$

	Media
$a [kPa]$	44,2
b	16,7

Tabla 5: Arteria según modelo de Delfino: parámetros de la Función Energía de Deformación.

Malla utilizada

En la figura 21 se observa la malla utilizada para modelar el problema. Ésta cuenta con 10 elementos en el radio y 50 en el sentido circunferencial, con un solo elemento en el espesor. La cantidad total de nodos es 1122.

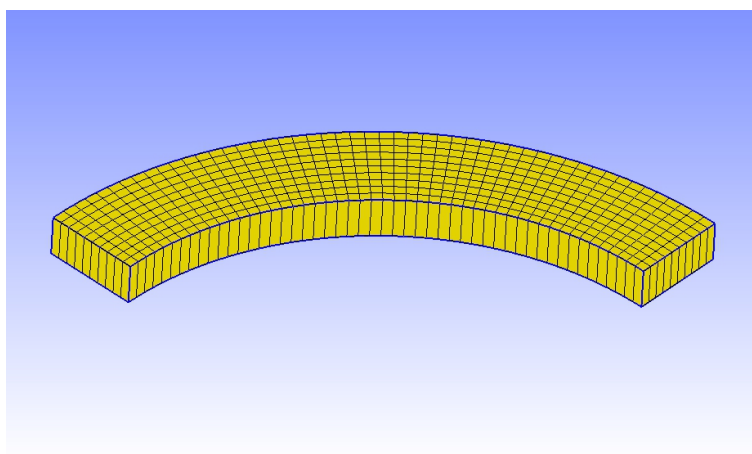


Figura 21: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: malla utilizada.

Resultados

Se realiza la simulación para niveles de presión variables entre los límites de 0 a 25 [kPa] para distintos casos de pre-estiramiento inicial. A partir de estos ensayos se evalúa el radio interno en la configuración de equilibrio mecánico. En la figura 22 se muestran las curvas presión-radio obtenidas en este trabajo contrastadas con los resultados publicados en [Holzapfel et al. \(2001\)](#).

En las figuras 23, 24, 25 y 26 se exhiben los desplazamientos radiales graficados sobre la configuración deformada para distintos niveles de presión y magnitud de pre-estiramiento nula.

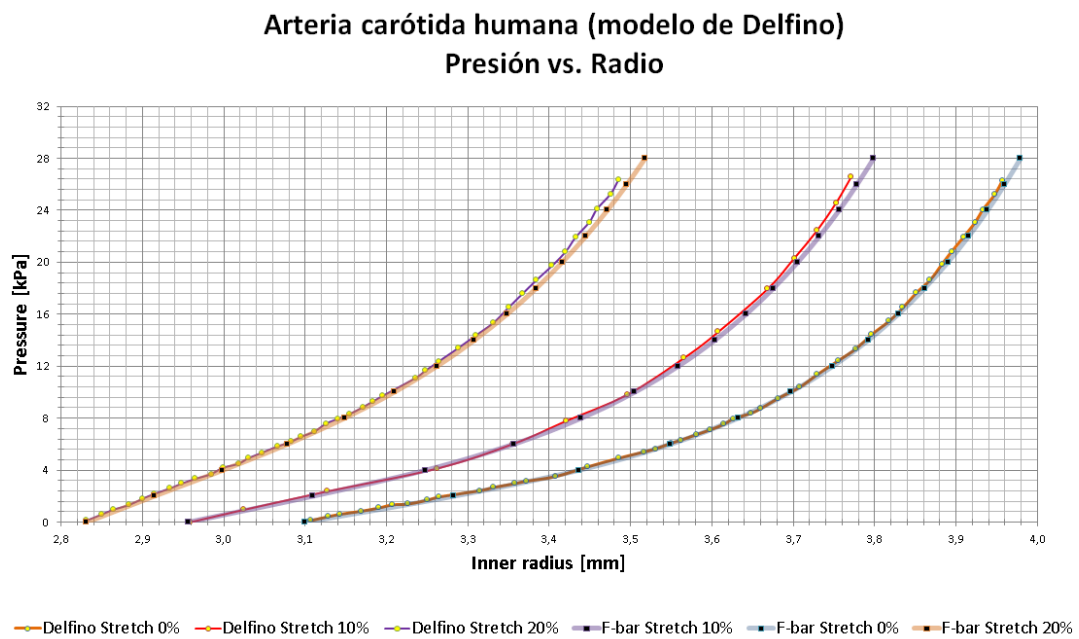


Figura 22: Arteria carótida según modelo propuesto por Delfino: curvas presión vs. radio interno.

En las figuras 27 y 28 se presenta el campo de presión para dos valores distintos de presión interna aplicada.

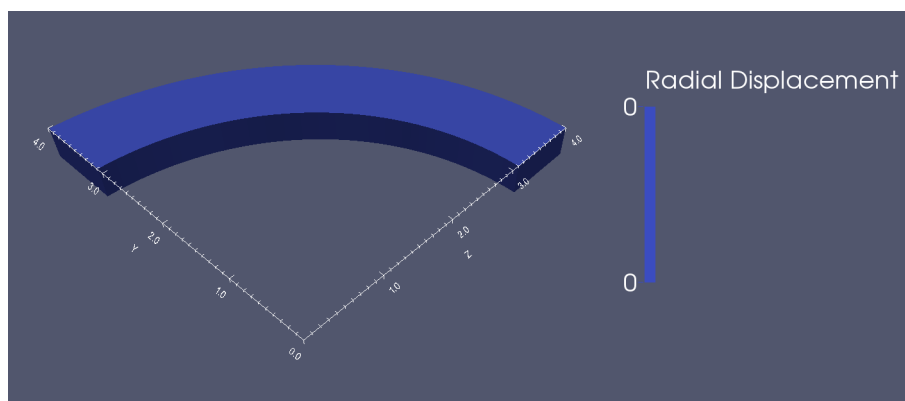


Figura 23: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de desplazamiento radial, $P = 0$ [kPa]

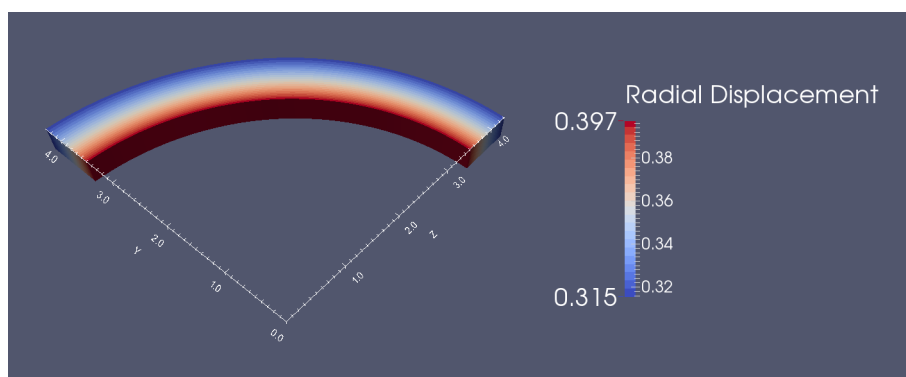


Figura 24: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de desplazamiento radial, $P = 5 [kPa]$

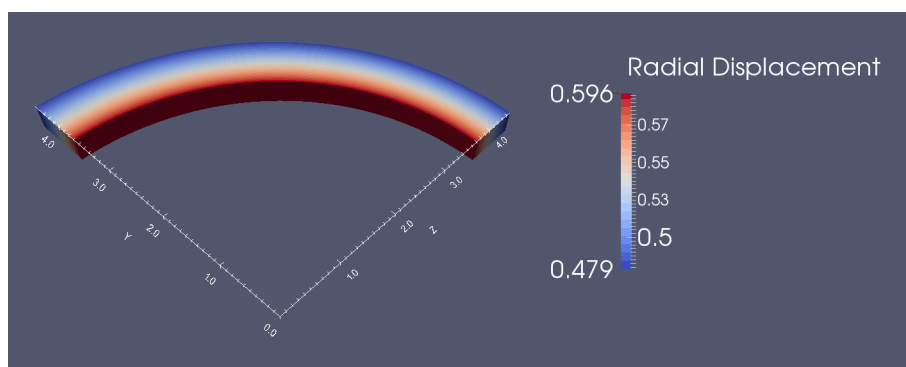


Figura 25: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de desplazamiento radial, $P = 10 [kPa]$

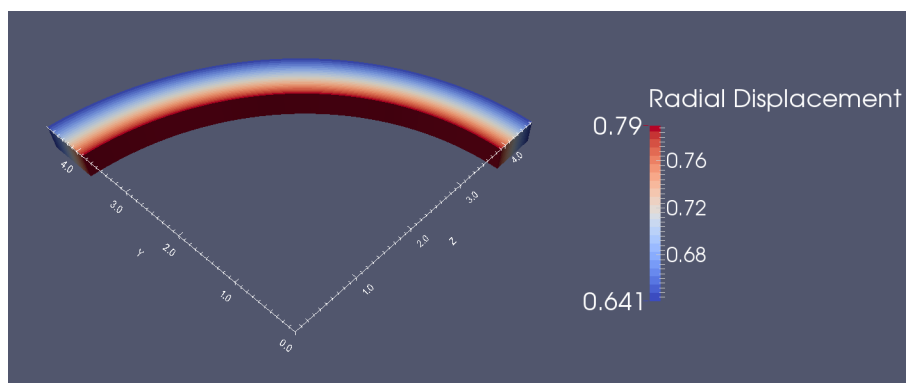


Figura 26: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de desplazamiento radial, $P = 20 [kPa]$

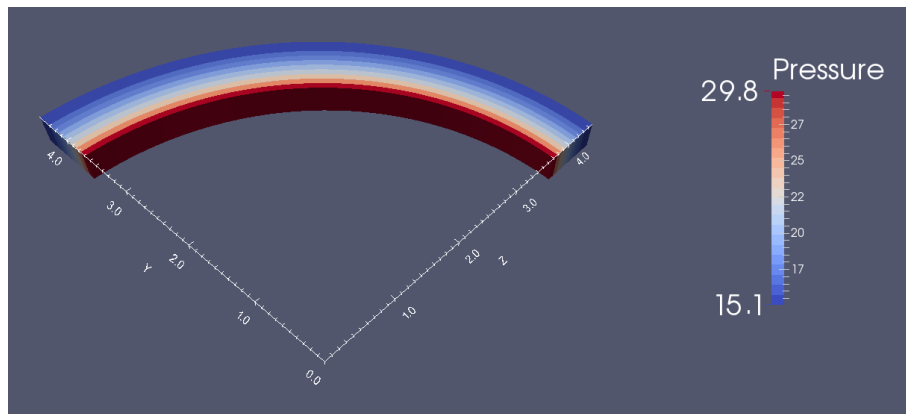


Figura 27: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de presión, $P = 10[kPa]$.

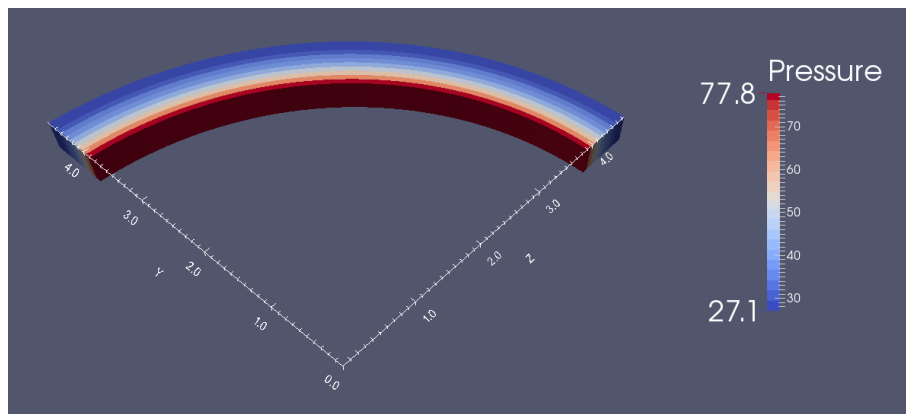


Figura 28: Arteria modelada con la ley constitutiva propuesta por Delfino: campo de presión, $P = 20[kPa]$

Discusión

La figura 22 brinda un resultado trascendental. Indica que el elemento es capaz de reproducir los desplazamientos provistos en [Holzapfel et al. \(2001\)](#) de forma correcta. Además, teniendo en cuenta la misma experiencia abordada en [Urquiza et al. \(2012\)](#), se puede ver que con este elemento se obtienen resultados en desplazamientos prácticamente idénticos, pero reduciendo vastamente la cantidad de grados de libertad a la vez que se reduce el costo de obtención de las matrices elementales, y consecuentemente tiempo de resolución de problemas (de suma utilidad al encarar problemas de gran dimensión). Con respecto a la presión (y recordando que éste es un elemento muy problemático en este aspecto) se obtuvieron resultados parecidos a los publicados en [Urquiza et al. \(2012\)](#). Si bien cargan con un cierto error, éste no es exagerado. Asimismo es importante destacar que no se observan modos espurios en el campo de presión, ni anisotropías en el campo de desplazamientos, inevitables con el uso de la formulación tradicional al intentar modelar problemas cuasi-incompresibles.

6. CONCLUSIONES

En términos generales se ha podido notar un buen desempeño de la formulación implementada. Se verificó que cumpliera con el principal objetivo planteado: poder modelar mecánicamente materiales cuyos modelos constitutivos determinen un comportamiento cuasi-incompresible

de los mismos, evitando la aparición del fenómeno conocido como *locking* en el campo de desplazamientos, que es la principal falencia de la formulación tradicional para materiales compresibles. Esto fue posible, aunque con el costo de perder precisión a medida que disminuye la compresibilidad del material. Con respecto al cálculo de presión y tensiones el elemento funciona adecuadamente para valores bajos de λ/μ^4 , es decir que no entrega resultados correctos cuando el material se comporta de manera cuasi-incompresible. Por lo tanto deberá tenerse precaución al obtener tensiones usando este elemento, sobre todo para valores λ/μ por encima de 10.

En cuanto al cálculo del campo de desplazamientos, este elemento tiene muy buen comportamiento. En problemas de acoplamiento fluido-estructura, donde el sólido cumple la función de representar la movilidad del dominio del fluido, se requiere captar adecuadamente los desplazamientos (y no las tensiones) en las paredes. En este sentido, el elemento parece ser competitivo y confiable.

La aplicación al problema hemodinámico, que consistió en representar la curva presión - desplazamiento radial en un segmento de pared arterial correspondiente a una arteria carótida humana, produjo resultados excelentes con una cantidad de nodos (y grados de libertad) relativamente baja, para todos los niveles de pre-estiramiento impuestos. Esto demuestra la capacidad del elemento para ser aplicado a casos hemodinámicos, donde sólo se requiera una adecuada respuesta en desplazamientos frente a una dada presión hemodinámica, y no se esté poniendo el foco en el estado de tensiones intraparietales.

REFERENCIAS

- Bathe K. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Bonet J. and Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- Cisloiu R. *A stabilized mixed finite element formulation for finite strain deformation*. Ph.D. thesis, University of Pittsburg, 2006.
- Crisfield M. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics*. 1991.
- de Souza Neto E.A., Perić D., Dutko M., and Owen D.R.J. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *Int. J. Solids Structures*, 33:3277–3296, 1996.
- Delfino A., Stergiopoulos N., Moore J., and Meister J. Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *Journal of Biomechanic* 30, pages 777–786, 1997.
- Feodosiev V. *Resistencia de materiales*. Editorial MIR, 1980.
- Holzapfel G., Gasser T., and Ogden R. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61:41–48, 2001.
- Lamichhane B.P. A mixed finite element method for nonlinear and nearly incompressible elasticity based on biorthogonal systems. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 2002.
- Malvern L. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, N J, 1969.
- Mase G.T. *Continuum Mechanics for Engineers*. CRC Press, 1999.

⁴Siendo λ el módulo de compresibilidad volumétrico y μ el módulo de resistencia al corte.

- Taylor R.L. A mixed-enhanced formulation for tetrahedral finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47:205–227, 2000.
- Timoshenko S. *Resistencia de materiales*, volume II. ESPASA-CALPE, S.A., 1957.
- Urquiza S.A., Blanco P.J., Ares G.D., and Feijóo R.A. Implementation issues of large strain formulations of hyperelastic materials for the modeling of arterial wall mechanics. *Scientific Computing Applied to Medicine*, pages 88–91, 2012.