

ANÁLISIS BIDIMENSIONAL DE SÓLIDOS CON GRANDES DEFORMACIONES APLICANDO UN ELEMENTO CON DEFORMACIONES IMPUESTAS

Walter B. Castelló, Fernando G. Flores

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, wcastello@efn.uncor.edu - fflores@efn.uncor.edu,

<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>

Palabras clave: elementos finitos, grandes deformaciones, remallado, deformaciones impuestas, sólidos bidimensionales.

Resumen. El análisis de procesos industriales como el forjado a través del método de elementos finitos, promueve la investigación y el desarrollo de nuevos elementos y formulaciones que permitan tratar aspectos como grandes deformaciones, flujo plástico isócoro y acoplamiento termo-mecánico, entre otros. Los elementos de bajo orden de interpolación y con grados de libertad de desplazamiento, han mostrado ser más convenientes en el análisis de problemas en deformaciones finitas por su fácil implementación en códigos explícitos, muy usados en estos casos. En dos dimensiones se tienen triángulos lineales y cuadriláteros bilineales. Los generadores de mallas de triángulos son más robustos y además cuando la malla sufre grandes distorsiones el remallado con triángulos es más sencillo, por lo cual son más adecuados en aplicaciones industriales. Sin embargo los triángulos lineales adolecen de bloqueo volumétrico si no se incluye la presión como grado de libertad en problemas con flujo plástico isócoro. Este trabajo resulta una extensión de uno anterior, en donde se aplica una formulación Lagrangiana Total en problemas de deformaciones finitas y se emplea un elemento triangular cuya geometría se define por tres nudos con solo grados de libertad de traslación que se caracteriza por la evaluación del gradiente en función de la geometría de los elementos adyacentes. Aquí se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando este elemento triangular y un modelo elasto-plástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, bajo una formulación Lagrangiana Actualizada, lo cual disminuye la cantidad de operaciones a nivel elemental y mejora significativamente la eficiencia computacional como se observa en los resultados obtenidos. Por otra parte se ha implementado una estrategia de remallado automático basada en el *Superconvergent Patch Recovery* a fin de disminuir la pérdida de información en la transferencia de variables en cada remallado. Los resultados obtenidos dejan ver claramente que además de mejorarse la eficiencia de cálculo, el empleo de este algoritmo de remallado y transferencia mejora la precisión de la herramienta computacional.

1. INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones del método de elementos finitos en el análisis de procesos industriales se han incrementado en la última década, en donde el análisis computacional de procesos de conformado plástico de sólidos metálicos ha tenido una importante cuota de protagonismo. La simulación de procesos como: el rolado, el forjado, la extrusión, etc.; ha permitido disminuir costos de fabricación y tiempos de desarrollo de nuevos productos. Estos análisis son relativamente complejos, pues presentan: importantes cambios de la geometría y grandes deformaciones, flujo plástico isócoro, contacto con las herramientas de conformado y autocontacto, e inclusive acoplamiento termo-mecánico en algunos casos particulares. Este crecimiento en las aplicaciones promueve un continuo proceso de mejora en las herramientas computacionales, de modo de lograr elementos más eficientes y algoritmos de mayor generalidad para aplicarse en estas simulaciones.

En estas aplicaciones se tiene una cantidad de grados de libertad considerable, y resulta más versátil el uso de elementos de bajo orden de interpolación con grados de libertad con sentido físico claro (desplazamientos) para facilitar la interpretación de los resultados. En dos dimensiones esto conduce a elementos triangulares lineales o cuadriláteros bilineales, sin embargo estos elementos muestran bloqueo volumétrico en problemas de deformaciones finitas. Además en el caso de triángulos es necesario un malla muy fina si se desean obtener resultados precisos. Se han desarrollado mejoras, a fin de aumentar la eficiencia y robustez de estos elementos frente a los problemas numéricos mencionados. En el caso del elemento cuadrilátero bilineal las formulaciones del mismo han tenido una evolución importante, lográndose elementos que no bloquean en problemas cuasi-incompresibles o con mallas gruesas. Las diferentes aproximaciones desarrolladas en cuadriláteros comprenden desde la adición de modos incompatibles, la integración reducida o selectiva, el método B-barra, e inclusive las formulaciones más modernas en deformaciones impuestas y/o mejoradas. Como ejemplos de estas mejoras se citan los trabajos de [Simo y Rifai \(1990\)](#), [César de Sá y Natal Jorge \(1999\)](#), [Armero \(2000\)](#) y las referencias que allí se mencionan. Por otra parte, desde el punto de vista de la aplicación el elemento triángulo resulta más conveniente por dos motivos: los generadores de triángulos son más robustos y eficientes, y además se tiene la ventaja de poder remallar con mayor facilidad cuando la geometría se deforma excesivamente. Esto ha motivado el desarrollo de aproximaciones basadas en triángulos, que introducen grados de libertad que no son desplazamientos, formulaciones mixtas o híbridas, y también formulaciones F-barra. Algunos trabajos en esta área son los de [Felippa \(2003\)](#), [Zienkiewicz et al. \(1998\)](#) y [SouzaNeto et al. \(2003\)](#).

El modelo constitutivo empleado en este trabajo está basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Actualmente, como resultado de los trabajos en el área de la *teoría microestructural* que describen las grandes deformaciones elasto-plásticas de monocristales (también llamada teoría del *deslizamiento en el continuo*) este modelo goza de una enorme aceptación y por tal motivo se ha extendido su uso al análisis de sólidos policristalinos. Como ejemplo de aplicaciones de este modelo se puede referir a los trabajos de [Eterovic y Bathe \(1990\)](#), [García Garino \(1993\)](#), [Crisfield \(1997\)](#) y [Khan y Cheng \(1996, 1998\)](#), entre otros. Este modelo goza de gran aceptación y existe consenso en que es el de mayor validez cuando se desea analizar grandes deformaciones elasto-plásticas. Y al menos en el caso de materiales isotrópicos, no hay controversias referidas a la evolución de la configuración intermedia que es lo que caracteriza al modelo.

Alguno de estos problemas presentan grandes cambios en la geometría, por lo tanto suele ser necesario aplicar alguna estrategia de remallado y transferencia de datos. Resulta conve-

niente que esta estrategia no implique una disminución en la calidad de los resultados. Se han desarrollado distintos algoritmos transferencia de variables, entre los cuales el algoritmo *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) introducido por Zienkiewicz y Zhu (1992a,b) es el que ha tenido mayor aceptación. En este algoritmo la distribución global de las variables en el dominio, se logra a partir de valores nodales obtenidos con una expansión polinómica sobre parcelas de elementos que comparten a cada nodo de la malla. Esta expansión polinómica aproxima (vía mínimos cuadrados) a los valores obtenidos del análisis por elementos finitos en algunos puntos dentro de la parcela que tienen características de superconvergencia. El algoritmo original ha sido complementado por distintos autores, mejorándose distintos aspectos como: incluir ecuaciones de equilibrio en la parcela, aumentar la robustez de la interpolación en los puntos de contorno, etc. Algunos trabajos en esta área corresponden a Wiberg et al. (1994), Labbé y Garon (1995) y Yazdani et al. (1998). Estos trabajos han dado origen a los llamados métodos *Enhanced Superconvergent Patch Recovery*. Si bien el procedimiento resulta heurístico, se ha probado lo suficiente como para admitir que brinda resultados muy precisos, el trabajo de Zienkiewicz et al. (1999) y más recientemente el de Bugeda (2006) son ejemplos de ello. Además fueron Boroomand y Zienkiewicz (1999) los primeros en aplicar el algoritmo SPR a problemas elasto-plásticos. Otros trabajos basados en el algoritmo SPR en el área de deformaciones finitas pertenecen a Gu y Kitamura (2000) y Gu et al. (2004).

Este trabajo resulta la extensión de uno realizado anteriormente, ver Castelló (2005), en donde se empleó un elemento triangular cuya geometría se define por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y posee la característica de que la evaluación del gradiente es función de la geometría de los elementos adyacentes. En este trabajo se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando este elemento triangular y un modelo elasto-plástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, bajo una formulación Lagrangiana Actualizada como la propuesta por García Garino (1993), la cual disminuye la cantidad de operaciones a nivel elemental y mejora la eficiencia computacional como se observa en los resultados obtenidos. Además se ha implementado una estrategia de remallado automático basada en el *Superconvergent Patch Recovery*, sobre la formulación original de Zienkiewicz y Zhu (1992a,b), a fin de minimizar la pérdida de información en la transferencia de variables en cada remallado. Este trabajo se realizó dentro del código explícito basado en el método de elementos finitos Stampack© Stampack© (2004).

El contenido de este trabajo se resume a continuación. En la sección 2 se introducen las relaciones cinemáticas asociadas al modelo constitutivo propuesto y se definen las ecuaciones de equilibrio en la configuración donde se plantea el problema. La sección 3 es un compendio del algoritmo de aproximación en deformaciones impuestas que se emplea en este trabajo. En la sección 4 se introduce el algoritmo de transferencia de variables basado en el SPR. La sección 5 muestra los resultados obtenidos con la presente formulación, para casos sin remallado y otros donde es necesario generar una nueva malla debido a la distorsión de la geometría, y se comparan con los resultados de otros trabajos. Por último la sección 6 contiene un resumen de las conclusiones obtenidas a partir de este trabajo.

2. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN ELASTO-PLÁSTICO

2.1. Hipótesis asociadas al algoritmo

Se presentan a continuación las características del modelo cinemático y los detalles del modelo constitutivo, empleados en este trabajo para el análisis de sólidos elasto-plásticos en grandes deformaciones. Si se considera un sólido en su posición original o indeformada, ocu-

pando un dominio Ω_0 en el espacio \mathbb{R}^3 y cuyo contorno queda definido por Γ_0 . Si puede definir una función $\varphi(\mathbf{X}, t)$ que relacione en todo momento la configuración de referencia Ω_0 con otra cualquiera Ω_t , a la cual se puede denominar actual o deformada, de modo que resulta posible definir el tensor gradiente de la deformación como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

El modelo cinemático empleado en este trabajo surge de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} , en sus partes elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p de acuerdo a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2)$$

en donde se supone que la parte plástica no modifica el volumen (flujo plástico isócoro) de modo que $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ y $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J$.

Este modelo presenta una evidencia física muy clara, similar a los que sucede en el análisis de monocristales. Por otra parte como resultado de los trabajos actuales en el área microestructural este modelo goza de una elevada aceptación, y por este motivo se lo extiende al análisis de sólidos policristalinos. El principal inconveniente radica en que esta descomposición queda exactamente definida salvo una rotación de cuerpo rígido, inconveniente que originó importantes controversias en el pasado. Actualmente se acepta que la ecuación (2) es suficiente para definir sin ambigüedades la descomposición multiplicativa en el caso de materiales isotrópicos, que de hecho es el tipo de material que se estudia en este trabajo. Además en este trabajo se considera que la plasticidad es independiente del tiempo, no hay acoplamiento termo-mecánico y el proceso es isotérmico.

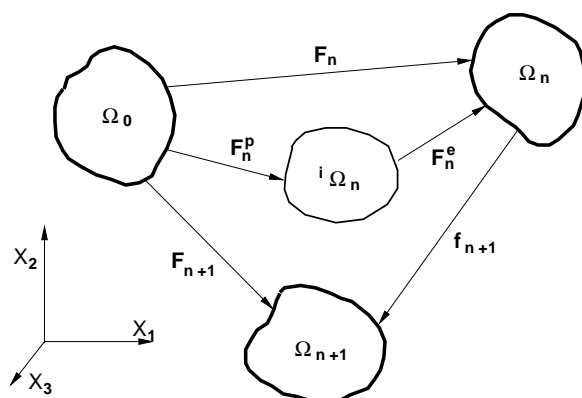


Figura 1: Esquema de configuraciones empleado en las relaciones cinemáticas y en la integración de la ecuación constitutiva.

La figura 1 presenta un esquema de las configuraciones involucradas cuando se aplica la descomposición multiplicativa. En esta figura se observa la inclusión de una configuración adicional denominada *configuración intermedia* (denotada por ${}^i\Omega_t$), la cual tiene la característica de ser una configuración libre de tensiones. Al igual que otros algoritmos elasto-plásticos como el de Simo y Hughes (1998) o el de Crisfield (1997), en el propuesto por García Garino (1993) se descompone el problema en dos: un problema elástico donde las variables plásticas no cambian (predictor elástico) y un problema plástico donde el estado elástico se mantiene sin variaciones (corrector plástico), de modo que la resolución de ambos es equivalente a la solución del problema original. La ventaja del algoritmo de García Garino (1993) se encuentra

en tratar de una manera más eficiente la integración de la ecuación constitutiva, reduciendo la cantidad de operaciones necesarias a nivel elemental.

Además para este modelo elasto-plástico se considera una regla de flujo asociativa y que el endurecimiento es lineal e isotrópico, de modo que se puede aplicar el algoritmo de retorno radial para regresar a la superficie de fluencia cuando se presenta un estado de carga plástica como se definirá en breve.

2.2. Algoritmo de integración

A continuación se presentarán dos algoritmos de integración elasto-plásticos. En primer lugar se introducirá un resumen de un algoritmo asociado a una Formulación Lagrangiana Total (FLT) basado en el trabajo de Crisfield (1997) que fuera presentado anteriormente en el trabajo de Castelló (2005). Luego se presentará con un mayor nivel de detalle el algoritmo elasto-plástico asociado a una Formulación Lagrangiana Actualizada (FLA) basado en el esquema propuesto por García Garino (1993). Estas formulaciones tienen ventajas y desventajas. En la FLT las funciones de forma asociadas a la aproximación en deformaciones impuestas se evalúan una sola vez y además no se hace simplificación alguna en la integración de la ecuación elasto-plástica. Los resultados de esta formulación se emplearán como solución de referencia en algunos de los ejemplos numéricos propuestos. Por otra parte la FLA tiene la desventaja de que es necesario recalcular en cada iteración las funciones de forma, pero aun así tiene la ventaja de no tener que realizar algunas operaciones del tipo *pull-back*. Además en el algoritmo utilizado en la FLA, se incluye la hipótesis de que las deformaciones elásticas son pequeñas. Estas diferencias dan motivos suficientes para no esperar que las formulaciones FLT y FLA den resultados idénticos.

Antes de entrar de lleno con estos algoritmos se presentarán algunos detalles de la cinemática asociada a las configuraciones mostradas en la figura 1. Si se desea obtener la actualización de una determinada configuración, por ejemplo una configuración anterior φ_n , a partir de la aplicación de un desplazamiento incremental \mathbf{u}_n , se tiene:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_n[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (3)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior conocida $\varphi_n(\mathbf{X})$, y al igual que los desplazamientos actuales \mathbf{u}_n son datos por lo cual resulta trivial la obtención configuración actualizada. Y de acuerdo con la figura 1 y la ecuación (3), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual \mathbf{F}_{n+1} como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n \quad (4)$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (5)$$

Se observa también que el *gradiente relativo* \mathbf{f}_{n+1} resulta ser:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (6)$$

La formulación propuesta por **García Garino (1993)** emplea la inversa del gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1}^{-1} y se calcula este tensor directamente con la ecuación:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{\mathbf{x}_n} \mathbf{u}_n \quad (7)$$

donde (7) se puede obtener a partir de (4). En este trabajo la inversa del gradiente relativo se obtiene como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_{n+1}}^I \quad (8)$$

y resulta claro que se deben evaluar las derivadas de las funciones de forma en cada paso de tiempo. Por otra parte el gradiente de deformación total en (5), puede obtenerse de igual manera como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_n}^I \quad (9)$$

donde las derivadas se evalúan una sola vez respecto de la configuración de referencia.

Formulación Lagrangiana Total. El algoritmo asociado a esta formulación es una modificación del presentado por **Crisfield (1997)** y se desarrolla en forma breve a continuación, para más detalles se puede consultar el trabajo de **Castelló (2005)**. A partir de la descomposición (2):

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{p-1} \quad (10)$$

y la ecuación (10) puede verse como la definición de la parte elástica de prueba (*trial*) del gradiente de deformación y representa el punto de partida para el predictor elástico en este algoritmo. Si se supone flujo plástico isócoro:

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{e \text{ trial}} = J^{-1/3} \mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} \quad (11)$$

donde $\bar{\mathbf{F}}^e$ es la parte de volumen constante del gradiente de deformación elástico.

Empleándose una medida de deformación natural (logarítmica) asociada a la configuración intermedia, como:

$$\mathbf{E}_{\ln}^e = \ln(\mathbf{U}^e) \quad (12)$$

y considerando que el tensor derecho de Cauchy-Green elástico es definido positivo, se puede aplicar la descomposición espectral para obtener:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e \text{ trial}} = (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^T (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = (\mathbf{U}_{n+1}^{e \text{ trial}})^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{\text{trial}})_{n+1}^2 \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \quad (13)$$

en donde λ_i y \mathbf{r}_i son los autovalores y autovectores del tensor de estiramiento derecho elástico $\mathbf{U}^{e \text{ trial}}$ respectivamente; por lo tanto la deformación logarítmica elástica en la configuración de referencia tiene componentes de la forma $\mathbf{e}_i^{e \text{ trial}} = \ln(\lambda_i^{\text{trial}})$.

Asociada a esta deformación elástica logarítmica se define una medida de tensión logarítmica en la configuración de referencia, y considerando la descomposición en componentes volumétricas y desviadoras del tensor de deformaciones elástico, el tensor de tensiones elástico conjugado resulta ser:

$$\mathbf{O}_{n+1}^{e \text{ trial}} = K \ln(J) + 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (14)$$

donde K es el módulo volumétrico y μ es el módulo de corte del material. A partir de aquí se denominará $\mathbf{o}^{e\text{trial}} = \text{dev}(\mathbf{O}^{e\text{trial}})$ a la parte desviadora del tensor de tensiones logarítmico elástico definido en (14). Esta última ecuación, también pone de manifiesto que se adopta una relación lineal entre las tensiones y deformaciones elásticas.

Por tratarse del análisis de materiales isótropos se adoptó la condición de fluencia de Mises-Huber. Y teniendo en cuenta la isotropía del material, la ecuación de Mises-Huber puede expresarse en función del tensor de tensiones logarítmicos:

$$f(\mathbf{O}, e^p) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{o}\| - (\sigma_Y + A' \Delta e^p) \leq 0 \tag{15}$$

Conocido el estado tensional a partir de (14) se puede comprobar la condición (15), y si esta condición no se cumple es necesario corregir por plasticidad y retornar a la superficie de fluencia. Considerando la regla de flujo de Prandtl-Reuss que tiene la forma $\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{A}$, donde se introduce el parámetro de consistencia γ y el tensor dirección de flujo plástico $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{O}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{o}}{\|\mathbf{o}\|}$, es fácil demostrar a través del trabajo plástico realizado en el proceso de deformación que $\Delta e^p = \Delta \gamma$.

Por lo tanto, restando la expresión que surge de la regla de flujo a la ecuación (14) y reemplazando esta expresión resultante en la ecuación (15) se llega a la conocida expresión:

$$\Delta \gamma = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{(3\mu + A')} \tag{16}$$

que permite determinar el incremento en el parámetro de consistencia $\Delta \gamma$, equivalente al incremento en el parámetro de endurecimiento Δe^p . En la ecuación (16) se distingue como f^{trial} , al valor que toma la función de fluencia (15) evaluada con la tensión obtenida en (14).

A través de la misma regla de flujo y con la parte desviadora de la ecuación (14), se obtiene:

$$\mathbf{o}_{n+1} = \alpha \mathbf{o}_{n+1}^{e\text{trial}} = \left(1 - \frac{3\mu \Delta \gamma}{O_e}\right) \mathbf{o}_{n+1}^{e\text{trial}} \tag{17}$$

en donde α suele denominarse multiplicador plástico y O_e es la tensión equivalente de von Mises.

La actualización de la inversa de la parte plástica del tensor gradiente de deformación resulta:

$$\mathbf{F}_{n+1}^p{}^{-1} = \mathbf{F}_n^p{}^{-1} \exp(-\Delta \gamma \mathbf{A}) \tag{18}$$

y por otro lado el parámetro de endurecimiento se actualiza con:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \Delta \gamma \tag{19}$$

y el estado tensional resultante, adicionando las componentes volumétricas y considerando que $J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J^e$, es:

$$\mathbf{O}_{n+1} = K \ln(J) \mathbf{1} + (1 - \alpha) \mathbf{o}_{n+1}^{e\text{trial}} \tag{20}$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden.

Considerando la relación entre el tensor de tensiones logarítmico y el segundo tensor de Piola-Kirchhoff:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{e-T} = \mathbf{U}^{e-1} \mathbf{O} \mathbf{U}^{e-T} \tag{21}$$

con $\bar{\mathbf{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff referido a la configuración intermedia y se puede obtener haciendo uso de la ecuación (13). La figura 1 muestra que para referir este tensor de tensiones a la configuración original, es necesario hacer una transformación usando el tensor plástico de deformaciones \mathbf{F}^p con:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{p-1} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^{p-T} \quad (22)$$

A partir de esta última ecuación, la forma débil de las ecuaciones de balance en la configuración de referencia pueden escribirse como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} [\delta\mathbf{E}_{GL} \cdot \mathbf{S}] d\Omega_0 + \delta\Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (23)$$

donde \mathbf{E}_{GL} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange definido con gradiente de deformación total \mathbf{F} y a través del tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C} = (\mathbf{U})^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, como:

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (24)$$

Formulación Lagrangiana Actualizada. Este algoritmo esta basado en el propuesto por García Garino (1993), se parte de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones de manera que considerando (2) y (6) se tiene:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (25)$$

y a partir de esta última expresión es posible obtener la parte elástica del tensor de Finger según:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-T} (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-1} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (26)$$

El tensor elástico de prueba (*trial*) de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (26) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})^{\text{trial}}] \quad (27)$$

y con este se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} = K \text{tr} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (28)$$

en donde, considerando que $\text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = -\frac{1}{2} \text{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})$, la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida por:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu \text{dev} (\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = -\mu \text{dev} ([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}}) \quad (29)$$

Para proseguir con el algoritmo constitutivo se debe comprobar la condición de fluencia de Mises-Huber, que para este caso tiene la forma:

$$f_{n+1} = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [A' e^p + \sigma_Y] \leq 0 \quad (30)$$

con \mathbf{s} la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff, σ_Y la tensión de fluencia del material, A' el módulo de endurecimiento y e^p el parámetro de endurecimiento. Si no se sobrepasa la superficie de fluencia ($f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}, e_n^p) \leq 0$), el estado es elástico con lo cual pueden

adoptarse las deformaciones (27) y las tensiones (28) como el estado resultante. En caso contrario, si se ha violado la condición (30) y $f_{n+1}^{trial} > 0$, es necesario corregir el estado elástico de prueba por plasticidad y retornar a la superficie de fluencia.

La regla de flujo queda definida por $\mathbf{d}^p = \dot{\gamma}\mathbf{n}$, en donde: $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ es la dirección del flujo plástico en la configuración actual, \mathbf{d}^p es el tensor velocidad de deformación plástica y $\dot{\gamma}$ es el cambio en el parámetro de consistencia. El cambio en la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green queda definido por:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^* (\dot{\gamma}\mathbf{n}) = 2\dot{\gamma}\mathbf{N} \quad (31)$$

donde ϕ^* implica una transformación del tipo *pull-back* para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original, y esta ecuación (31) puede discretizarse con un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^p - \mathbf{C}_n^p}{\Delta t} = 2\dot{\gamma}\mathbf{N}_{n+1} \quad (32)$$

esta expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo *push-forward* a la que indicaremos con ϕ_* , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \phi_* \mathbf{C}_n^p + 2\dot{\gamma}\mathbf{n}_{n+1} \quad (33)$$

En variables espaciales, el primer término $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p$ puede expresarse como:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} = \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \quad (34)$$

Por otra parte, para el segundo término $\phi_* \mathbf{C}_n^p$, se calcula de manera similar empleando para ello el tensor gradiente de la deformación total en el paso de tiempo actual (\mathbf{F}_{n+1}) y aprovechando su relación el tensor gradiente de deformación relativo (\mathbf{f}_{n+1}) resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_n^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (35)$$

con lo cual, de acuerdo a (26) se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_n^p &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^{e-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{trial} \end{aligned} \quad (36)$$

Entonces el esquema de actualización del tensor elástico de Finger en variables espaciales se puede definir a partir de las ecuaciones (33), (34) y (36), obteniéndose:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{trial} + 2\dot{\gamma}\mathbf{n}_{n+1} \quad (37)$$

a partir de la cual puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}] \quad (38)$$

Aplicando la ecuación (29) en la (37) resulta:

$$\begin{aligned} -\mu \operatorname{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}) &= -\mu \operatorname{dev} \left([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{trial} \right) + 2\mu\dot{\gamma}\mathbf{n}_{n+1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{trial} - 2\mu\dot{\gamma}\mathbf{n}_{n+1} \end{aligned} \quad (39)$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras, el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (39) la parte volumétrica de las tensiones de modo que:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \operatorname{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (40)$$

Considerado que la regla de flujo es asociativa, la evolución del parámetro de endurecimiento queda establecida por:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \quad (41)$$

La hipótesis característica del *algoritmo de retorno radial* es suponer fija la dirección del vector normal a la superficie de fluencia, es decir $\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}}$. Entonces considerando las tensiones desviadoras corregidas (39), empleando la relación entre las tensiones desviadoras y el vector normal a la superficie de fluencia resulta en una ecuación escalar:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}\| \mathbf{n}_{n+1} &= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \\ (\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\gamma) &= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \end{aligned} \quad (42)$$

La condición de consistencia debida a la función de fluencia de Mises-Huber resulta $\|\mathbf{s}_{n+1}\| = R_{n+1}$, en donde R_{n+1} es el radio del cilindro de von Mises:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + A' e_{n+1}^p) \quad (43)$$

reemplazando (41) y (42) en (43), se puede obtener:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + A' e_n^p) &= \frac{2}{3} A' \gamma + 2\mu\gamma \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= \left(\frac{2}{3} A' + 2\mu \right) \gamma \end{aligned} \quad (44)$$

a partir de la cual se define la evolución del parámetro de consistencia:

$$\gamma = \frac{3f_{n+1}^{\text{trial}}}{2A' + 6\mu} \quad (45)$$

A partir de las definiciones previas, la forma débil de las ecuaciones de balance en la configuración de referencia actualizada puede escribirse como:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega_n} [\delta \mathbf{e}_{\text{AL}} \cdot \boldsymbol{\tau}] \, d\Omega_n + \delta \Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (46)$$

donde \mathbf{e}_{AL} es el tensor de deformaciones de Almansi (30) definido a partir de la parte elástica del tensor de Finger.

3. APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

La preferencia de los elementos de bajo orden de interpolación y la conveniencia de tener grados de libertad de significado físico claro como los desplazamientos, motivaron el planteo de esta aproximación en deformaciones impuestas que consiste en la aplicación de un elemento triangular similar al propuesto por Flores (2006). En particular, la aproximación empleada en

este trabajo consiste en una extensión del trabajo de Castelló (2005) aplicado a sólidos bidimensionales con grandes deformaciones elasto-plásticas.

El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos donde, a diferencia de la aproximación convencional en triángulos lineales, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos, un elemento central sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a los lados del elemento central (figura 2). Se observa en esta figura que se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, sin embargo puede verse la existencia de los tres elementos adyacentes.

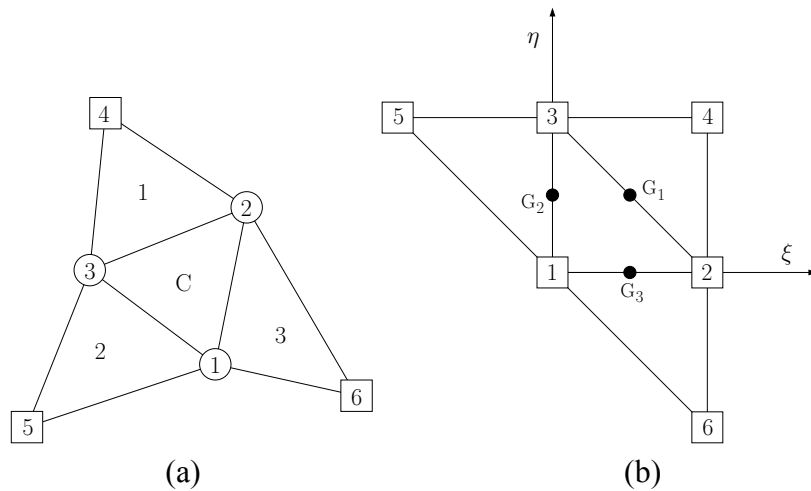


Figura 2: Parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas naturales.

Entonces en la figura 2 muestra que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos y de esta forma, si bien se parte de elementos triangulares de tres nodos, se llega a una aproximación cuadrática. El nuevo conjunto de funciones de forma (no estándar), considerando que $\zeta = 1 - \xi - \eta$, son las que se muestran en tabla 1.

$$\begin{aligned}
 N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^4 &= \frac{\zeta}{2} (\zeta - 1) \\
 N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^5 &= \frac{\xi}{2} (\xi - 1) \\
 N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^6 &= \frac{\eta}{2} (\eta - 1)
 \end{aligned}$$

Tabla 1: Funciones de forma asociadas a la parcela elemental.

A través de las funciones de forma se obtienen los gradientes de deformación en algunos puntos predeterminados, y utilizando la clásica notación en elementos finitos:

$$\mathbf{f}^{-1} = \partial \mathbf{x}_n / \partial \mathbf{x}_{n+1} = \sum_{I=1}^{NN=6} N_{,x_{n+1}}^I x_n^I \tag{47}$$

que es la expresión la inversa del gradiente relativo de deformación, en donde x_n^I representan las coordenadas nodales en la configuración anterior y $N_{,x_{n+1}}^I$ son las derivadas de las funciones de forma respecto de la configuración actualizada. A través de la (47) se pueden obtener las dos

primeras columnas de \mathbf{f}^{-1} , mientras que para la dirección normal al plano se puede expresar como $\mathbf{a}_3 = \lambda_3 (0, 0, 1)^T$. En el caso de deformación plana resulta simplemente $\lambda_3 = 1$, por otra parte en axilsimetría además de considerar el alargamiento normal en el elemento central, se adiciona el promedio de los alargamientos normales de los elementos adyacentes:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{I=1}^3 x_n^I}{\sum_{I=1}^3 x_{n+1}^I} + \frac{1}{3} \left(\sum_{J=1}^3 \frac{\sum_{K=1}^3 x_n^{K(J)}}{\sum_{K=1}^3 x_{n+1}^{K(J)}} \right) \right\} \quad (48)$$

Los gradientes de deformación se evalúan a mitad de cada lado del triángulo central C (puntos identificados como G_1 , G_2 y G_3 en la figura 2) y la aproximación propuesta consiste en adoptar un gradiente de deformación en el elemento, que surge del promedio:

$$\bar{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{1}{3} (\mathbf{f}_{G_1}^{-1} + \mathbf{f}_{G_2}^{-1} + \mathbf{f}_{G_3}^{-1}) \quad (49)$$

es decir se interpolan los gradientes obtenidos a mitad de cada lado del elemento central y de hecho esta operación le da carácter de aproximación en deformaciones impuestas al elemento. El gradiente de deformación promedio obtenido con (49) es el que se emplea luego en las ecuaciones del modelo constitutivo (26) y las ecuaciones de gobierno del problema (46).

La selección de los puntos a mitad de cada lado del elemento central no es arbitraria, trae aparejadas ventajas pues la evaluación del gradiente a la mitad de cada lado depende exclusivamente de la posición de los nodos asociados a los dos elementos que comparten el lado. Estos es algo que puede verificarse fácilmente, derivando las expresiones de las funciones de forma (ver tabla 1) y evaluándolas en las coordenadas de los puntos G_1 , G_2 y G_3 .

4. REMALLADO Y TRANSFERENCIA

El remallado comprende dos puntos relevantes que deben ser analizados en detalle: en primer lugar se encuentra la nueva malla y luego la transferencia de variables. El segundo punto es de particular importancia cuando hablamos de procesos que son dependientes de la historia del proceso, como es el caso de problemas elasto-plásticos. Con respecto al remallado, en este trabajo se aplica un algoritmo de remallado automático simple, el cual parte del contorno del sólido deformado para generar una nueva geometría. Considerando que el área de análisis en este trabajo son sólidos bidimensionales, entonces el contorno pasa a ser una línea y no acarrea mayores complicaciones. La generación de esta nueva geometría, la aplicación de las condiciones de contorno y la discretización (respetando el tamaño de elemento de la malla original) del nuevo dominio se realiza con el software GiD© (2002) a través de la opción *batch file*.

La versatilidad del método SPR en la transferencia de variables se sustenta en su capacidad de interpolar las variables de forma casi exacta, a partir de puntos de superconvergencia que generalmente resultan ser coincidentes con los puntos de integración a nivel elemental (cuadratura de Gauss). Frente a otros métodos de transferencia posibles, como por ejemplo el de extrapolación y suavizado nodal, el SPR presenta la ventaja de tener una menor pérdida de la información que se está transfiriendo. El algoritmo desarrollado a continuación está basado en el SPR original de Zienkiewicz y Zhu (1992a,b) y coincide con la mayoría de los conceptos planteados por Akin (2005). El punto de partida es definir una determinada cantidad de conjuntos de elementos que comparten algunos de sus nodos con un elemento central (ver figura 3), estos conjuntos se denominan “parcelas del SPR”. Básicamente existen tres tipos de parcelas que son las más usadas: a) parcelas centradas en nodos: un grupo de elementos que comparten un nodo, b) parcelas centradas en elementos: un grupo de elementos adyacentes a un elemento

central, y c) parcelas basadas en los contornos del elemento: en este caso se tiene un grupo de elementos que comparte una cara con respecto a un elemento central. Cualquiera sea el caso, es necesario generar el “listado de elementos” que conforman la parcela.

El proceso de interpolación de variables resulta de la aplicación de una expansión polinomial sobre el conjunto de elementos que forman la parcela. Los coeficientes de esta expansión polinomial quedan establecidos ajustando las variables a través de mínimos cuadrados, en puntos que tienen características de superconvergencia. Se adoptan como puntos de muestreo a los mismos puntos de integración elementales, la figura 3 muestra el detalle de la parcela usada en este trabajo.

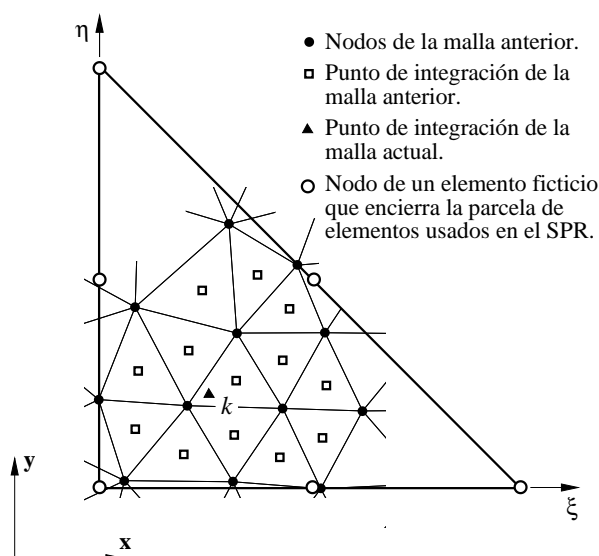


Figura 3: Configuración de la parcela empleada en este trabajo y esquema de interpolación.

Las variables asociadas a los puntos de integración elemental α_i pueden ser interpoladas empleando un *polinomio interpolante completo* α_{pi}^{inter} , donde el grado del polinomio puede ser el mismo de las funciones de aproximación elemental. Entonces la variable se podría interpolar con una ecuación de la forma $\alpha_{pi}^{inter} = \mathbf{p}\mathbf{b}^i$, en donde \mathbf{p} contiene la base polinómica y \mathbf{b}^i los coeficientes del polinomio. En el caso de problemas bidimensionales con funciones de aproximación elemental cuadráticas estos vectores tienen la forma $\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ y $\mathbf{b}^i = \{b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i, b_5^i, b_6^i\}^T$.

Las componentes del vector \mathbf{b}^i están asociadas la variable α_i a transferir y surgen de la minimización del siguiente residuo:

$$R_{G_i}(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^G (\hat{\alpha}_i(\mathbf{x}_j) - \alpha_{pi}^*)^2 = \sum_{j=1}^G (\hat{\alpha}_i(\mathbf{x}_j) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}^i)^2 \quad (50)$$

en donde \mathbf{x}_j con $j = 1, \dots, G$, es cada uno de los puntos de integración de la malla anterior donde se conoce la variable $\hat{\alpha}_i$ y que pertenecen a la parcela empleada en el SPR. La cantidad de puntos se puede expresar como $G = mg$, siendo g la cantidad de puntos de integración elementales y m la cantidad de elementos que conforman la parcela.

Una propuesta interesante es introducida por Akin (2005), donde \mathbf{p} resulta ser un polinomio completo de igual grado que la aproximación elemental y que responde en este caso a las fun-

ciones de forma cuadráticas tradicionales $\mathbf{p}(\xi, \eta) = \{N^1, N^2, N^3, N^4, N^5, N^6\}$. A fin de lograr este tipo de aproximación se elige un elemento triángulo cuadrático ficticio (ver figura 3) que encierra al conjunto de elementos que forman la parcela del SPR, donde el Jacobiano de la transformación resulta particularmente constante ya que los ejes paramétricos del elemento triángulo ficticio son paralelos a los ejes físicos del problema.

Aplicando mínimos cuadrados a (3) y considerando la base polinómica $\mathbf{p}(\xi, \eta)$:

$$\sum_{j=1}^G \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \mathbf{p}(\xi_j, \eta_j) \mathbf{b}^i = \sum_{j=1}^G \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \hat{\alpha}_i(\xi_j, \eta_j) \quad (51)$$

y esta última ecuación debe ser resuelta para cada variable a transferir α_i , para lo cual es necesario la resolución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}^i \quad (52)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^G \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \mathbf{p}(\xi_j, \eta_j) \\ \mathbf{c}^i &= \sum_{j=1}^G \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \hat{\alpha}_i(\xi_j, \eta_j) \end{aligned} \quad (53)$$

La matriz \mathbf{A} tiene un valor único en cada parcela del SPR, se aplica a todas las variables a transferir y por lo tanto solo es necesario invertirla una vez. Sin embargo el vector \mathbf{c}^i depende de la magnitud de la variable $\hat{\alpha}_i$ que se desea transferir, y por lo tanto el número de ecuaciones a resolver en cada parcela resulta igual a la cantidad de variables en cada punto de integración multiplicada por la cantidad de coeficientes del vector \mathbf{b}^i .

Una vez que los coeficientes del vector \mathbf{b}^i asociados a cada variable a transferir α_i han sido determinados, solo resta interpolar la variable a cada punto de integración de la nueva malla. Si consideramos un punto de integración k en la nueva malla, que cae dentro de la parcela de la figura 3, entonces la interpolación o transferencia de la variable α_i será:

$$(\alpha_i^{\text{inter}})_k = \mathbf{p}(\xi_k, \eta_k) \mathbf{b}^i \quad (54)$$

De acuerdo a lo visto en las ecuaciones (51) el polinomio interpolante empleado en el SPR resulta dependiente del elemento empleado en la discretización del dominio y de la cantidad de elementos en cada parcela.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presenta un compendio de los resultados obtenidos con la formulación propuesta en los párrafos precedentes, se han analizado sólidos en grandes deformaciones elasto-plásticas y se ha hecho especial énfasis en problemas axilsimétricos. Se presentan distintos casos de análisis: en primera instancia se estudian casos sin remallado para mostrar la versatilidad de la aproximación propuesta, y a continuación se presentan casos donde es necesario remallar para mantener la precisión en los resultados. Los resultados obtenidos a partir de la aproximación propuesta en este trabajo se identifican con las siglas *TR2D*.

5.1. Plegado externo de tubos de pared delgada

Este proceso que permite obtener tubos de pared doble, se caracteriza por la compresión de un tubo sobre una matriz adecuada que propicia la deformación radial del tubo. El problema ha sido tratado desde el punto de vista de la aplicación industrial en el trabajo de Rosa et al. (2004). El material del tubo es aluminio, con un módulo de Young $E = 69$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y una densidad $\rho = 2700$ kg/m³. El comportamiento plástico del material queda definido por un modelo de plasticidad J_2 y una regla de endurecimiento del tipo Ludwik-Nadai expresada por $\sigma_y = 0,2983 \cdot (28 \cdot 10^{-4} + e^p)^{0,086}$ GPa.

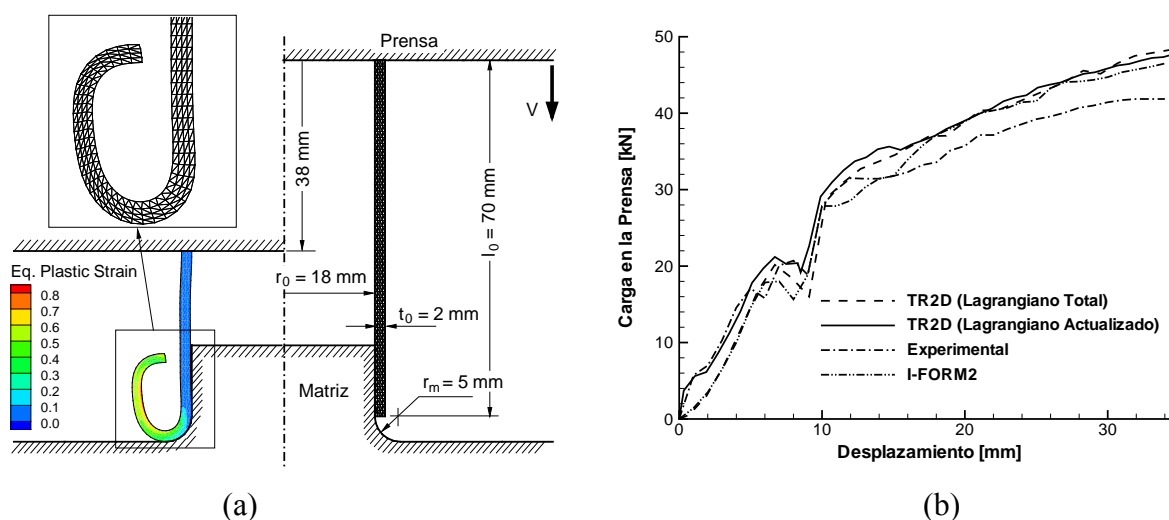


Figura 4: Plegado de tubos de pared delgada. a) Geometría, discretización y deformada final. b) Curva de carga en función del desplazamiento de la prensa.

Se utilizaron 480 (4x60x2) elementos triangulares, cantidad necesaria si se desea captar correctamente el proceso de plegado. La figura 4-a muestra la geometría deformada final y las deformaciones plásticas efectivas, que se obtienen con un desplazamiento total de la prensa de 38 mm. La figura 4-b, muestra la curva de carga en la prensa en función del desplazamiento de la misma. Esta curva muestra un pico de cercano a 20 kN que coincide con el instante en que el extremo del tubo ha recorrido todo el radio de empalme de la matriz, luego sigue aumentando la carga en la medida que el plegado del tubo continúa. Los resultados obtenidos son comparativamente muy buenos frente a los mostrados por Rosa et al. (2004), inclusive la curva de la figura 4-b es muy similar a las obtenidas en forma: experimental y con el código *I-FORM2* (basado en elementos finitos) aplicado en ese trabajo; la misma similitud se observa con respecto a la geometría deformada.

5.2. Abocardado de un tubo de pared delgada

El proceso de abocardado se emplea para generar un ensanchamiento cónico en los extremos de los tubos, de manera tal que puedan unirse después distintos tramos de tubería con dispositivos roscados denominados “racor”. El material del tubo es acero inoxidable AISI304L, con un módulo de Young $E = 183$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y una densidad $\rho = 8030$ kg/m³. El comportamiento plástico del material queda definido por un modelo de plasticidad J_2 y una regla de endurecimiento del tipo Ludwik-Nadai expresada por $\sigma_y = 0,6053 \cdot (15 \cdot 10^{-4} + e^p)^{0,1575}$ GPa.

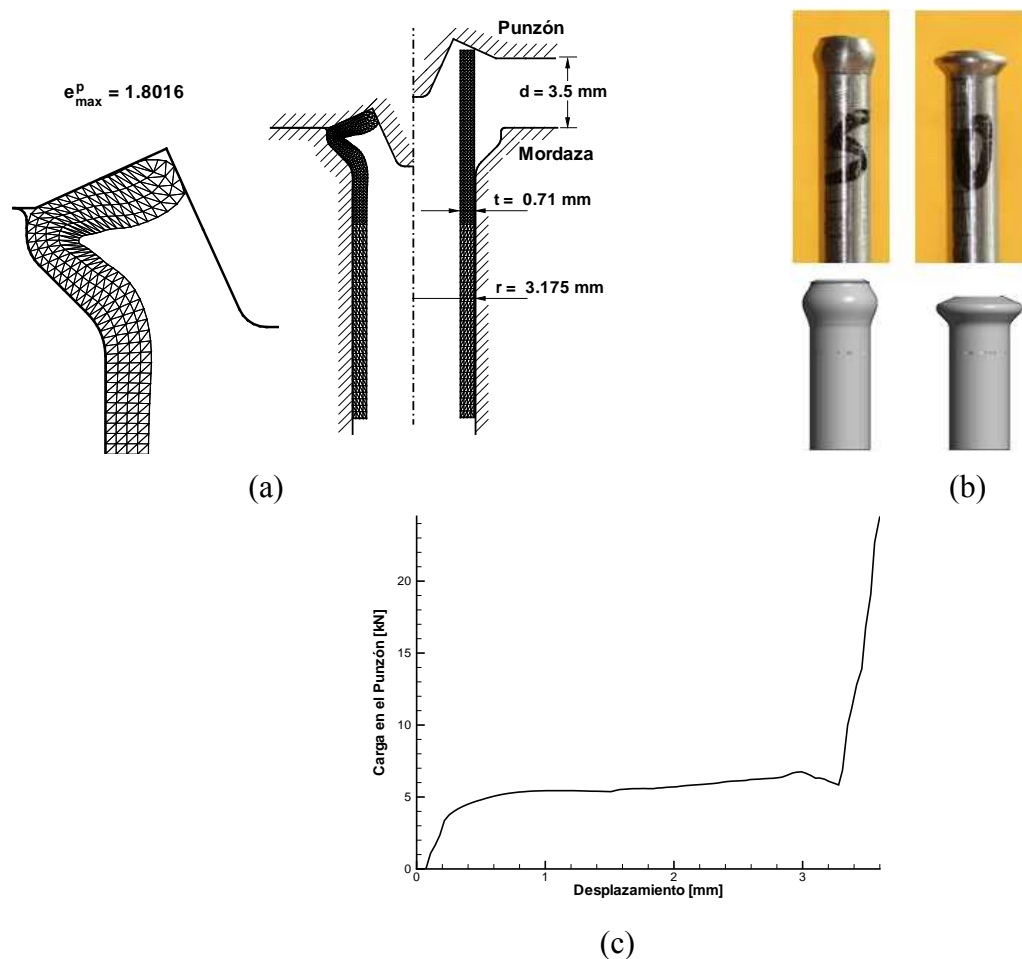


Figura 5: Abocardado de tubos de acero. a) Geometría y discretización. b) Comparación entre la deformada obtenida y un ensayo experimental. c) Curva de carga en función del desplazamiento del punzón.

Se utilizaron 656 (4x82x2) elementos triangulares cantidad acorde para analizar el proceso de abocardado. La Formulación Lagrangiana Actualizada es la empleada en este caso. La figura 5-a muestra la geometría original y la deformada obtenida con un desplazamiento total de la prensa de 3,5 mm. Las deformadas de la geometría obtenidas en este trabajo resultan interesantes cuando se los compara con las obtenidas en forma experimental, esto se observa en la figura 5-b para dos distintos avances del punzón. La figura 5-c por otra parte, muestra la curva de carga del punzón en función del desplazamiento del mismo y se destaca el aumento de carga necesario para producir la deformación en el instante que el material del tubo queda contenido entre el punzón y la mordaza.

5.3. Acortamiento de un tocho cilíndrico

Este problema propuesto por Taylor y Becker (1983), consiste en la compresión de un tocho cilíndrico para reducir su longitud en un 40 %. Este análisis involucra grandes deformaciones y además una importante distorsión de la malla. Se estudia un pequeño tocho cilíndrico de 30 mm de longitud, con un radio de 10 mm, ubicado entre dos placas rígidas perfectamente rugosas. El modelo del material está definido por un módulo de Young $E = 200$ GPa, una relación de Poisson $\nu = 0.3$ y una densidad de $\rho = 7833$ kg/m³. Se asume un endurecimiento isótropo, con

una tensión de fluencia $\sigma_y = 700$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 0.3$ GPa. La fricción entre la prensa y el tocho, se modela con un coeficiente de fricción $\eta = 1.00$.

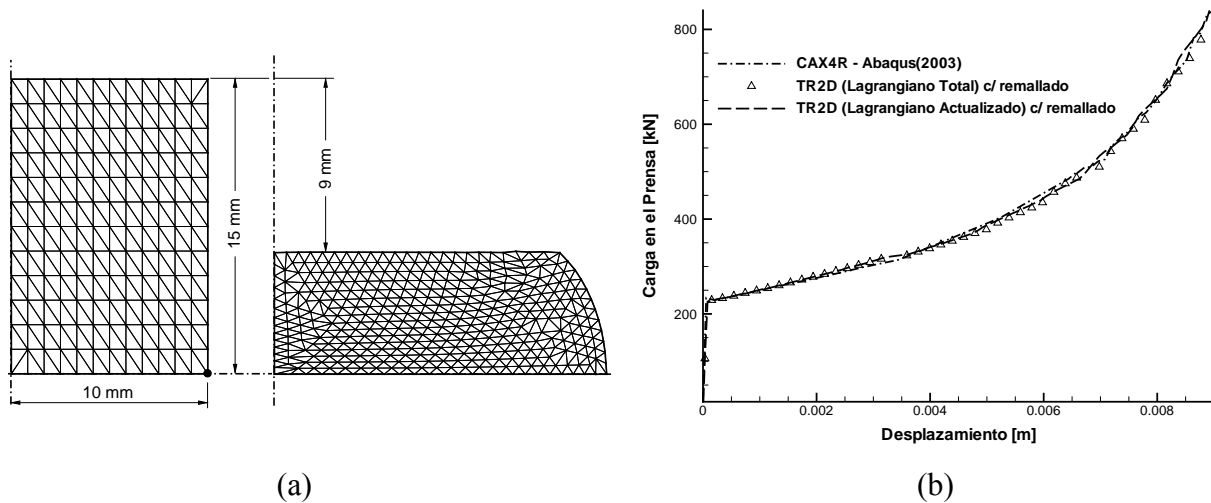


Figura 6: Acortamiento de un tocho cilíndrico. a) Geometría original del tocho y deformada final. b) Curvas de carga función del desplazamiento de la prensa para distintas aproximaciones.

Formulación	Malla (8x6x2)		Malla (12x12x2)	
	$e_{m\acute{a}x}^p$	t [seg]	$e_{m\acute{a}x}^p$	t [seg]
Lagrangiana Total	1.6642	6.531	1.8658	118.00
Lagrangiana Actualizada	1.6700	4.656	1.8735	80.98

Tabla 2: Acortamiento de un tocho cilíndrico. Comparativa de resultados y tiempos de cálculo respecto de las formulaciones Lagrangiana Total y Actualizada.

Se han empleado dos mallas estructuradas: 96 (8x6x2) y 288 (12x12x2) elementos triangulares. La distorsión en la malla por el cambio en la geometría puede observarse en la figura 6-a. Evitar esta distorsión en los elementos implica aplicar dos etapas de remallado, con un promedio 120 y 400 elementos triangulares (respectivamente para cada malla) por cada etapa. Los resultados de este problema numérico se comparan con los obtenidos aplicando un cuadrilátero en deformaciones mejoradas (*CAX4R*) en el software *Abaqus*© (2003) bajo un esquema de rezonificación de nodos. En la figura 6-b se muestran las curvas de carga vs desplazamiento de prensa para los elementos *CAX4R* y *TR2D*. Las curvas muestran las mismas tendencias y niveles de carga para producir la deformación del tocho. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos en este trabajo considerando remallado y los obtenidos en las mismas condiciones en *Castelló* (2005), además se incluye una comparativa de tiempos de cálculo para estos casos. Queda claro que el algoritmo de *García Garino* (1993) resulta más eficiente desde el punto de vista de la cantidad de operaciones a nivel elemental, con una disminución promedio del 30 % del tiempo de análisis.

5.4. Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico

La extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico para generar un tubo, pertenece al área de la elasto-plasticidad con excesivo cambio de la geometría. El modelo es axilsimétrico tal como se

muestra en la figura 7. Las herramientas se tratan como cuerpos rígidos, y por otra parte el tocho cilíndrico se supone construido en aluminio con un módulo de Young $E = 38$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0.33$ y una densidad $\rho = 2672$ Kg/m³. El comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento lineal e isotrópica, con una tensión de fluencia $\sigma_y = 27$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 1.1$ MPa. Las superficies de contacto entre herramientas y el tocho se asumen bien lubricadas, por lo tanto se desprecia la fricción.

Se han empleado 1088 (16x34x2) elementos triangulares, y las herramientas se encuentran fijas con la excepción del punzón. Este punzón se desplaza un distancia de 82 mm, para generar el tubo de aluminio, tal como se presenta en la figura 7-a. Las elevadas deformaciones que muestran los problemas de extrusión hacen necesario la utilización del remallado, en este problema se emplearon 32 pasos de remallado con un promedio de 700 elementos por paso.

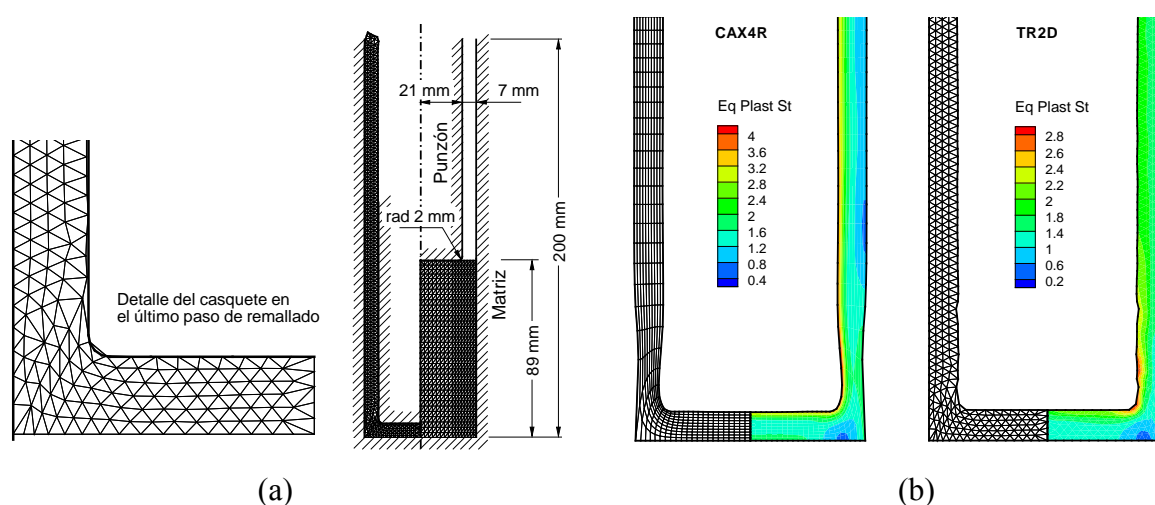


Figura 7: Estrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. a) Geometría discretizada y deformada final. b) Detalle de la deformación en cercanías del casquete del tubo.

El detalle de la deformada en la figura 7-a, muestra un efecto de distorsión de la malla asociado a dos aspectos particulares: el tamaño de elemento elegido y la forma en que el remallador (GiD© (2002)) trata los bordes de la geometría bidimensional. Debido a esto aparecen invasiones de la malla sobre las herramientas, y también se presentan entallas suaves en el cuerpo del tubo.

Resultado	Long. Max	Max(e^p)
CAX4R	203.00 mm	4.17
TR2D	204.25 mm	2.92

Tabla 3: Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Comparativa de resultados.

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos en este trabajo (TR2D) y los resultados de Abaqus© (2003) (CAX4R). La aproximación propuesta en este trabajo es lo suficientemente efectiva para predecir los cambios geométricos. Con respecto a la deformación plástica efectiva, la diferencia se debe al empleo en Abaqus© (2003) de una estrategia de discretización a la que se denomina “mapeo de deformación” para evitar la necesidad de realizar el remallado. Esta estrategia de discretización muestra un buen comportamiento, sin embargo sobre

el final del análisis se produce una estricción cerca del casquete del tubo, ver figura 7-b. Esta estricción tiene asociada una deformación plástica efectiva elevada que obedece al modelo de discretización y no al comportamiento del material, ya que se supone que las herramientas no arrastran material por desprejarse la fricción.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un elemento finito triangular, muy promisorio para aquellas aplicaciones industriales donde se desea estudiar problemas en deformaciones finitas. Esta aproximación permite analizar sólidos bidimensionales con grandes deformaciones, la geometría del elemento queda definida por tres nodos con solo grados de libertad de desplazamiento. La implementación del elemento en códigos con integración explícita de las ecuaciones de balance, resulta simple e inclusive presenta ventajas en problemas que introducen contacto y remallado adaptativo. La característica fundamental de la aproximación en deformaciones impuestas empleada en este trabajo, reside en que el gradiente de deformación se obtiene a través del promedio de los gradientes evaluados a la mitad de cada lado del triángulo, donde se considera además el aporte del triángulo adyacente al lado que se evalúa.

El elemento ya había sido probado con éxito en problemas con mallas gruesas y flexión dominante en Flores (2006) y Castelló (2005), mostrando un comportamiento similar al triángulo de deformación lineal. En el área de las deformaciones finitas el elemento muestra un comportamiento muy bueno, aun cuando se lo compara con elementos en deformaciones mejoradas. Los resultados muestran que existe poca diferencia respecto a la precisión obtenida con la Formulación Lagrangiana Actualizada a través del algoritmo propuesto por García Garino (1993) comparados con los resultados obtenidos con la Formulación Lagrangiana Total empleando el algoritmo propuesto por Crisfield (1997). Sin embargo lo que si es notorio es la eficiencia asociada al número de operaciones a nivel elemental, ya que cuando se aplica el algoritmo de García Garino (1993) el tiempo de análisis se reduce en promedio un 30%. Esta reducción de tiempos es realmente importante en la simulación de procesos industriales que por lo general son de un tamaño considerable. Si además se considera la opción de remallado automático, se logra una herramienta computacional con un excelente desempeño. Además de la importancia del esquema de remallado, la transferencia de las variables entre mallas juega un papel decisivo en la precisión de los resultados finales. Anteriormente se había probado con esquemas simples como el de extrapolación y suavizado de variables, mientras que en este trabajo se decidió emplear un algoritmo de transferencia basado en el *Superconvergent Patch Recovery* de Zienkiewicz y Zhu (1992a). Los resultados obtenidos empleando el SPR como estrategia de transferencia muestran una disminución en la pérdida de información, esto se observa principalmente en los problemas que involucran un cantidad importante de pasos de remallado.

Desde el punto de vista de aumentar la eficiencia de cálculo se está estudiando la opción del remallado automático por zonas, de modo que se restaure la malla en aquellos lugares donde es realmente necesario por el nivel de distorsión del elemento y no sobre todo el dominio de análisis. Además en problemas donde se observa un elevado gradiente de distorsión de la malla, como por ejemplo problemas de impacto, parece necesario adicionar alguna estrategia de refinamiento adaptativo al remallado por zona de modo de lograr una buena aproximación de los gradientes en las variables.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y del Dpto de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C. La utilización del programa Stampack ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ.

REFERENCIAS

- Abaqus©. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003. URL www.abaqus.com.
- J. Akin. *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Butterworth-Heinemann, London, first edition, 2005.
- F. Armero. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers and Structures*, 75:261–290, 2000.
- B. Boroomand y O.C. Zienkiewicz. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part ii: adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:127–146, 1999.
- G. Bugada. A new adaptive remeshing scheme based on the sensitivity analysis of the spr point-wise error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:462–478, 2006.
- W.B. Castelló. *Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones utilizando un elemento triangular con deformaciones impuestas*. Tesis de Magister, Univ. Nac. de Córdoba, Argentina, 2005.
- M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics*, volume II. Jhon Wiley Sons, Ltd, 1997.
- J.M.A. César de Sá y R.M. Natal Jorge. New enhanced strain element incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248, 1999.
- A.L. Eterovic y K.J. Bathe. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using logarithmic stress and strain measures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1099–1115, 1990.
- C.A. Felippa. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- F.G. Flores. A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformation analysis. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2006. aceptado para publicación.
- C. García Garino. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- GiD©. *The personal pre and post processor, version 7.2*. International Center for Numerical Methods in Engineering, UPC, Barcelona, 2002. URL www.gid.cimne.upc.es.
- H. Gu y M. Kitamura. A modified recovery procedure to improve the accuracy of stress at central area of bilinear quadrilateral element. *Journal of Society Naval Architects Japan*, 188:486–496, 2000.
- H. Gu, Z. Zong, y K.C. Hung. A modified superconvergent patch recovery method and its application to large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:665–687, 2004.
- A.S. Khan y P. Cheng. An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals i. *International Journal of Plasticity*, 12:147–162, 1996.
- A.S. Khan y P. Cheng. An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and poly-

- crystalline metals ii. *International Journal of Plasticity*, 14:209–226, 1998.
- P. Labbé y A. Garon. A robust implementation of zienkiewicz and zhu's local patch recovery method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 11:427–434, 1995.
- P.A.R. Rosa, R.M.S.O. Baptista, J.M.C. Rodrigues, y P.A.F. Martins. Inversão externa de tubos metálicos de parede fina. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, 8:79–90, 2004.
- J.C. Simo y T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- J.C. Simo y M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- E.A. SouzaNeto, F.M.A. Pires, y D.R.J. Owen. A new f-bar based method for linear triangles and tetrahedra in the finite strain analysis of nearly incompressible solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003, CIMNE, Barcelona*, 2003.
- Stampack©. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems, v6.0.0*. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2004. URL www.quantech.es.
- L.M. Taylor y E.B. Becker. Some computational aspects of large deformation rate dependent plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:251–278, 1983.
- N.E. Wiberg, F. Abdulwahab, y S. Ziukas. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3417–3440, 1994.
- A.A. Yazdani, A. Gakwaya, y G. Dhatt. An improved superconvergent patch recovery technique for the axisymmetrical problems. *Computers and Structures*, 66:799–821, 1998.
- O.C. Zienkiewicz, B. Boroomand, y J.Z. Zhu. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part i: adaptivity in linear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:111–125, 1999.
- O.C. Zienkiewicz, J. Rojek, R.L. Taylor, y M. Pastor. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583, 1998.
- O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part i: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992a.
- O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part ii: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992b.