

## AJUSTE ESTOCÁSTICO DE FACTORES DE SEGURIDAD EN CERCHAS

Oscar S. Luna Vera<sup>a</sup> y Juan A. Ronda<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Department of Civil and Earth Resources Engineering, Kyoto University, 615-8530 Nishikyo-ku, Kyoto, Japan, luna.sergio.56r@st.kyoto-u.ac.jp, <http://www.ce.t.kyoto-u.ac.jp/en>*

<sup>b</sup>*Departamento de Posgrado, Escuela Militar de Ingeniería, Av. Arce 2642, La Paz, Bolivia, juanronda@gmail.com, <http://www.emi.edu.bo/>*

**Palabras clave:** Optimización y Confiabilidad Estructural, Cercchas 2D.

**Resumen.** El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar una estructura tipo cercha plana desde un punto de vista probabilístico y obtener valores de factores de mayoración de cargas, llamado aquí factor de seguridad, que resulten a partir de un diseño determinístico. Para poder determinar el valor mínimo del factor de seguridad que tiene incidencia en el diseño de la cercha, se realizó un diseño basado en confiabilidad y con esos resultados, un ajuste estocástico al factor de seguridad de la carga, para lo cual se consideró la incertidumbre de las variables y se trató a la carga P como una variable aleatoria. Se presentan también resultados que muestran la influencia de la incertidumbre en la carga aplicada, a través de su coeficiente de variación.

## 1 INTRODUCCION

Las primeras normas de diseño como ASD (Allowable Stress Design) o WSD (Working Stress Design) estaban basadas en tensiones admisibles para los niveles de carga de servicio. Para estos casos, los estados límite últimos eran satisfechos automáticamente basados en un enfoque elástico lineal. Históricamente han seguido filosofías de diseño basadas en resistencia como LFD (Load Factor Design) y LRFD (Load and Resistance Factor Design) que pueden estimar con mayor precisión el comportamiento real de los materiales estructurales frente a la demanda de diversos tipos de cargas. Actualmente, debido a la aparición de nuevos materiales y exigencias frente a estados de carga variables, han surgido nuevos conceptos aplicables al diseño estructural. El estado límite representa la frontera del uso estructural. La serviciabilidad representa la resistencia de las estructuras sujetas a las cargas de diseño últimas. La noción de confiabilidad surgió para tomar en cuenta una filosofía de diseño basada en probabilidades, representada por el límite entre la performance deseada e indeseada Taly (2015). En los últimos años, la confiabilidad estructural se ha vuelto más importante en el área de la ingeniería estructural, debido a la aparición de estructuras cada vez más esbeltas y fallas estructurales que se produjeron por una inadecuada estimación de las demandas producidas por cargas con componentes estocásticas. Este tipo de eventos viene a cuestionar la manera de incluir componentes estocásticas para mejorar el modelo y la coherencia en los resultados. Se hace evidente la necesidad de la implementación de técnicas de evaluación de confiabilidad estructural para enfrentar futuros eventos de riesgo. Según Taly (2015), diversos estudios muestran que existen grandes diferencias entre confiabilidad, filosofía de diseño, práctica de la construcción y provisiones de códigos.

La presencia de incertezas en el análisis ha mostrado puntos importantes a ser considerados, como la evaluación de las funciones probabilísticas y sus derivadas.

El principal objetivo en el análisis de confiabilidad, es determinar la probabilidad de falla correspondiente a un determinado evento. Este evento puede ser un periodo de referencia específico, aunque otros estados naturales que no incluyen falla en las componentes estructurales o sistema considerado, podrían ser de interés, como las deflexiones o rotaciones excesivas, comportamiento inelástico, etc. En general, cualquier estado asociado a demandas (efectos de las cargas) que sean mayores a la resistencia, traen consecuencias que implican falla que pueden traducirse en términos económicos, pérdida de vidas e impacto ambiental, son de interés y, por simplicidad se referirán a todos estos como eventos de falla.

En el presente trabajo, se incorpora un análisis de sensibilidad de desplazamientos y funcionales de tensión al análisis de probabilidad y la búsqueda del índice de confiabilidad basada en el concepto del Punto de Falla Más Probable (MPP) según Halder y Mahadevan (2000), siendo esta técnica más simple que los métodos de muestreo y más precisa que los métodos basados en el valor medio.

## 2 DESCRIPCIÓN Y DISEÑO DE LA ESTRUCTURA

Las cerchas son estructuras ampliamente utilizadas en ingeniería, debido a su simplicidad y bajo costo. Debido a esto, un reto importante de investigación ha surgido en el diseño óptimo de cerchas, categorizado como optimización de topología, de forma, y dimensiones. Los métodos para abordar estos campos, pueden utilizar o no funciones y sus derivadas y pueden tener funciones objetivo simples o múltiples, así como variables de diseño discretas. El diseño práctico de cerchas y otras estructuras, envuelve inevitables dificultades cuando existe desconocimiento o incertidumbre en algunas variables, así como la dificultad de definir de manera acertada valores de carga, dimensiones y propiedades materiales. Esto significa que el problema de diseño real de cerchas, debe incluir parámetros que incluyan incertezas, lo cual transforma el problema de diseño en un problema de optimización basada en confiabilidad.

Normas de diseño abordan este problema incluyendo un factor de seguridad a las restricciones estructurales. Alternativamente, problemas de diseño multiobjetivo que minimizan el costo y maximizan parámetros que indican confiabilidad estructural son utilizados actualmente, siendo el enfoque de optimización basada en confiabilidad (RBDO - Reliability Based Design Optimization), la que incorpora variables de diseño comunes y aquellas con incertezas predefinidas en un determinado intervalo, aplicándose técnicas de optimización basadas en gradientes y algoritmos evolutivos los más destacados según Wen (2000).

El uso de cerchas planas para la modelación de puentes o cubiertas es de uso común en ingeniería y muchas veces se debe cubrir una longitud determinada limitando las deflexiones en el centro del vano, debido a restricciones de diseño o normas y también se debe optimizar (minimizar) el uso de materiales de la estructura, tensiones y reacciones de apoyo Burns (2002). Debido a esta variedad de restricciones y objetivos, se hace uso de la optimización topológica de la estructura, ya que en el espacio de diseño pueden obtenerse distintas topologías que satisfagan las mismas restricciones, de las cuales una de ellas resulta óptima local o global.

## 2.1 Configuración Topológica

Se plantea un problema de optimización topológica según Spunt (1971) y Gallagher y Zienkiewicz (1973), para cubrir con una cercha plana un vano de longitud  $L_T$ , sujeta a restricciones de uso de material (longitud máxima disponible es  $L_b$ ). Se consideran elementos tipo barra de sección constante  $A$  y constituida por un material elástico lineal cuyo módulo de elasticidad es  $E$ . Existe una carga  $P$  en el medio del vano y como condiciones de borde, dos apoyos de segundo género en los nudos extremos, estando cualquier otro nudo intermedio libre (sin restricciones de desplazamiento en el plano). La Figura 1. muestra el dominio de diseño admisible, con igual uso de material que constituyen algunas posibles configuraciones óptimas locales, en base a la función objetivo y las restricciones impuestas.

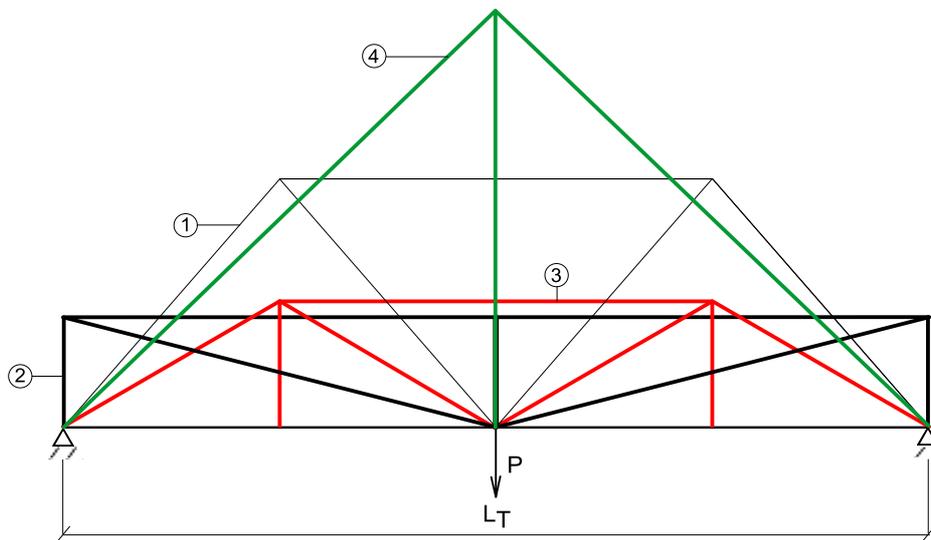


Figura 1. Dominio de Diseño Admisible con Posibles Configuraciones Óptimas

Para el caso de estudio, la función objetivo a minimizar es la deflexión en el nudo con carga.

**Objetivo:** minimizar  $\delta(P,L,A,E)$

**Restricciones:**  $L_T(L) = nL$ ; Tramo a cubrir

$L_B(L) \leq mL$ ; Longitud total de las barras (uso de material)

$L_B > L_T > 0$

(1)

Debido a que la solución del problema de optimización topológica no forma parte de la investigación de este trabajo, se utilizó como herramienta el programa TOPOSTRUCT, <http://sawapan.eu/>. La siguiente Figura 2. muestra el dominio de diseño admisible, los procesos inicial y final de optimización topológica y la configuración óptima final.

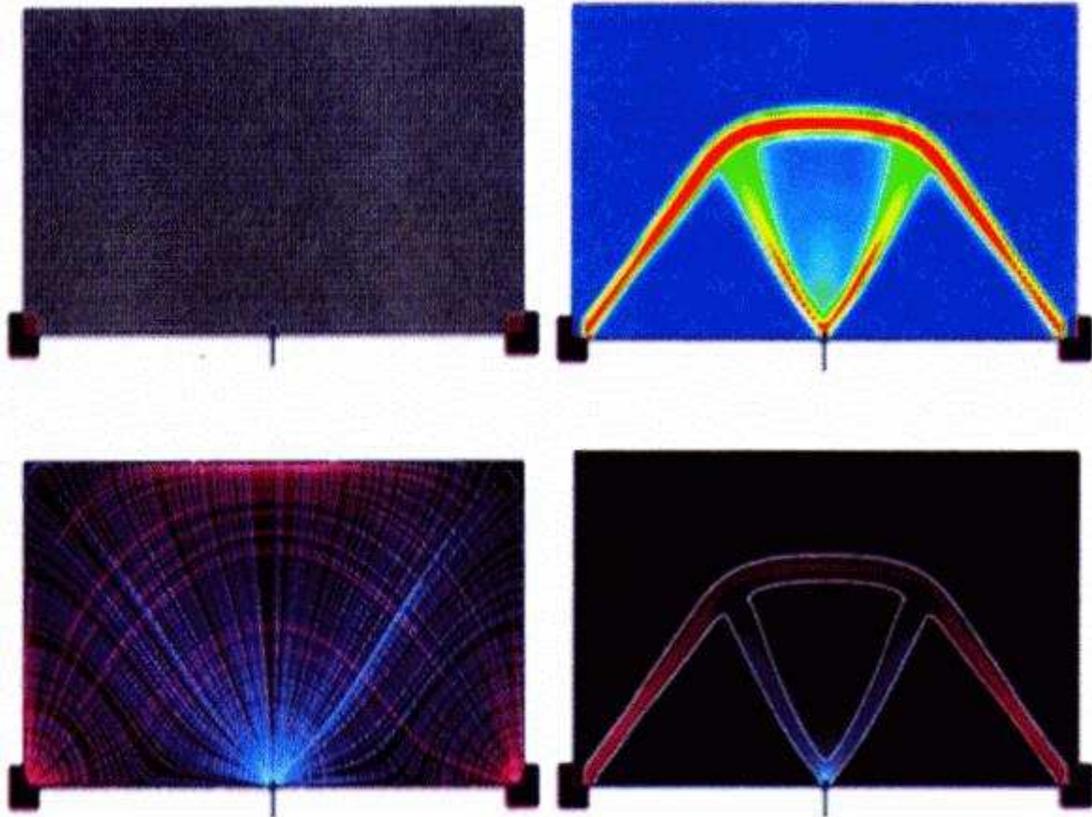


Figura 2. Dominio de diseño admisible, y procesos inicial y final de optimización topológica

Una vez que se ha definido la función objetivo y las restricciones, en este caso el desplazamiento del nudo con carga, el resultado de la optimización topológica muestra la configuración óptima (local) en la Figura 3. como solución al problema, en la cual, la variable.

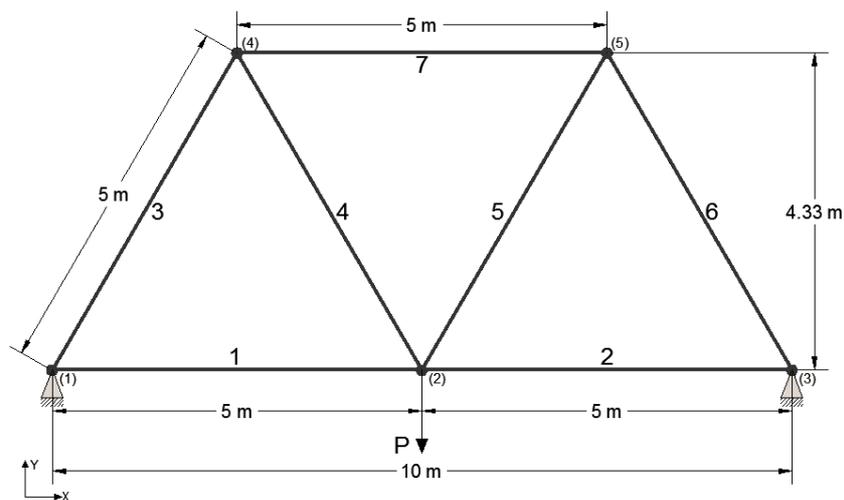


Figura 3. Configuración topológica óptima con dimensiones finales

longitud de vano es 10 metros, la variable longitud total de barras es de 35 metros y la topología resultante está conformada por tres triángulos equiláteros formados por un total de 7 elementos de barra de 5 metros cada uno y 5 nudos, de los cuales los dos nudos extremos tienen condiciones de desplazamiento nulos. La configuración 1 de la [Figura 1](#), es la que ofrece el desplazamiento vertical mínimo en el nudo con carga.

### 3 DISEÑO DETERMINÍSTICO

Se adopta una carga  $P$  de valor 1000 KN aplicada en el nudo en el medio del vano. La estructura está libre de imperfecciones físicas, geométricas y de carga para evitar considerarlas como fuente de incertidumbres adicionales según [Varoglu \(1985\)](#); [Sheu y Schmit \(1972\)](#); [Fraser y Budiansky \(1969\)](#). Luego se realiza un análisis lineal (pre-crítico). Dado que se estudiará el factor de mayoración en solicitaciones y no el factor de reducción en la resistencia, no es necesaria una optimización de las secciones transversales, por lo que se asume de forma directa perfiles tipo W del manual de la AISC (American Institute of Steel Construction); [AISC \(2010\)](#). Las áreas de las secciones transversales se eligen de tablas con valores discretos. Consecuentemente, se espera que dichas áreas sean redondeadas a aquellas mayores cercanas disponibles en tabla. Bajo este contexto, considerar las áreas como variables aleatorias puede perder sentido en esta etapa de diseño ya que las áreas finales pueden presentar modificaciones significativas en comparación con la desviación standard de esta variable. Debido a esto, resulta más razonable considerar las áreas como variables aleatorias en un nivel de diseño posterior (Análisis Estocástico).

El material considerado está de acuerdo a especificaciones de la AISC [AISC \(2010\)](#), y la ASTM Internacional: A36/A36M (Standard Specifications for Carbon Structural Mild Steel). El acero A36 tiene una densidad de  $7800 \text{ Kg/m}^3$ , un módulo de elasticidad es de  $200 \text{ GPa}$ , un coeficiente de Poisson de 0.260 y un módulo de corte de  $79.3 \text{ GPa}$ . En aceros A36 con un espesor menor a  $20.32 \text{ cm}$  se tiene una tensión de fluencia de  $248 \text{ MPa}$  y una tensión última de  $400 - 550 \text{ MPa}$ . Para espesores mayores a  $20.32 \text{ cm}$  se tiene una tensión de fluencia de  $220 \text{ MPa}$  y la misma tensión última.

De la configuración final se obtienen las tensiones de los elementos de barra en función de las variables de diseño:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_4 = \sigma_5 &= \frac{\sqrt{3} P}{3 A} && \text{Tracción} \\ \sigma_3 = \sigma_6 = \sigma_7 &= -\frac{\sqrt{3} P}{3 A} && \text{Compresión} \end{aligned} \quad (2)$$

Para optimizar el material, se igualan las tensiones con la tensión de fluencia.

$$\sigma_i = F_Y = 0 \quad (3)$$

donde  $\sigma_i$  es la tensión más desfavorable en función de la carga. Igualando (2) y (3) se obtiene  $P$ .

$$P = \sqrt{3} F_Y A \quad (4)$$

El valor adoptado para  $P$  será de 1000 kN, según [ASCE \(2010\)](#), próximo al mínimo de la tabla de perfiles WF del manual de la AISC. También esta última ecuación servirá para definir el rango de valores de los factores de seguridad FS en este diseño.

Para elementos traccionados, en la resistencia de diseño a tracción ( $\phi_t P_{nt}$ ) se considera  $\phi_t = 0.9$  según AISC LRFD, [AISC \(2011\)](#), debiendo además cumplir que:

$$FS \cdot P_u \leq \phi_t \cdot P_{nt} \quad (5)$$

Donde  $FS$  es el factor de seguridad,  $P_u$  es la solicitación y  $\phi_t$  es el factor de resistencia a tracción que toma en cuenta las incertezas en la predicción de las resistencias del elemento estructural. La resistencia nominal a tracción ( $P_{nt}$ ) deberá ser el menor valor obtenido de acuerdo a los Estados Límite de fluencia a la tracción:

$$P_{nt} = F_y \cdot A \quad (6)$$

donde  $F_y$  es la tensión de fluencia del material y  $A$  es el área de la sección transversal del elemento.

Para elementos comprimidos, en la resistencia de diseño a compresión ( $\phi_c P_{nc}$ ) se considera  $\phi_c = 0.9$  según AISC LRFD, [AISC \(2011\)](#), debiendo además cumplir:

$$FS \cdot P_u \leq \phi_c \cdot P_{nc} \quad (7)$$

donde  $FS$  es el factor de seguridad,  $P_u$  es la solicitación y  $\phi_c$  es el factor de resistencia a compresión que toma en cuenta las incertezas en la predicción de las resistencias del elemento estructural.

Adicionalmente, la aleatoriedad de las imperfecciones iniciales no han sido tomadas en cuenta, para no alterar los criterios usuales de pandeo elástico y evitar realizar un análisis de sensibilidad a las imperfecciones según lo expuesto por [Madsen et al. \(2011\)](#); [Pholdee \(1967\)](#); [Fraser y Budiansky \(1969\)](#); [Nowak \(1980\)](#).

La resistencia nominal a compresión ( $P_{nc}$ ), deberá ser el menor valor obtenido tomando en cuenta criterios de estabilidad (pandeo elástico de elementos de barra) de acuerdo a los estados límite de pandeo por flexión, pandeo torsional y pandeo flexo-torsional.

$$P_{nc} = F_{cr} \cdot A \quad (8)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del elemento y  $F_{cr}$  es la tensión asociada a pandeo por flexión, que se determina como sigue:

$$\text{Para } \frac{KL}{r} \leq 4.71\sqrt{E/F_y} \quad (\text{o } F_e \geq 0.44F_y)$$

$$F_{cr} = \left[ 0.658 \frac{F_y}{F_e} \right] F_y \quad (9)$$

$$\text{Para } \frac{KL}{r} > 4.71\sqrt{E/F_y} \quad (\text{o } F_e < 0.44F_y)$$

$$F_{cr} = 0.877F_e \quad (10)$$

donde las tensiones  $F_e$  se definen como:

$$F_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

$$F_e = \left[ \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{(K_z L)^2} + GJ \right] \frac{1}{I_x + I_y} \quad (11)$$

La ecuación (10) se refiere a la tensión de pandeo elástico flexional, donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $L$  es la longitud del elemento,  $K$  es el factor de longitud efectiva y  $r$  es el radio de giro de la sección transversal.

La ecuación (11) se refiere a la tensión de pandeo elástica torsional o flexo-torsional en secciones doblemente simétricas, donde  $C_w$  es la constante de alabeo,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal,  $J$  es la constante de torsión,  $K_z$  es el factor de longitud efectiva para el pandeo torsional y  $I_x, I_y$  son los momentos de inercia en torno de los ejes principales.

### 3.1 Diseño de menor peso en función al factor de seguridad

Con todas las anteriores consideraciones se procede al diseño, donde se efectúa un análisis de sensibilidad y se asumen factores de seguridad FS de 1.0 hasta 2.0 con incrementos de 0.1.

Haciendo uso de [Tabla 1](#) y [Tabla 2](#), se construye una aproximación del estado tensional

FS	$FS \cdot P_u$	Perfil	Área	$\phi_c \cdot P_{nc}$	$\phi_t \cdot P_{nt}$	Ratio
	KN	W	mm <sup>2</sup>	KN	KN	$\frac{FS \cdot P_u}{\phi_c \cdot P_{nc}}$
1.0	577.350	W8X31	5890.311	796.254	1314.717	0.725
1.1	635.085	W8X31	5890.311	796.254	1314.717	0.798
1.2	692.820	W8X31	5890.311	796.254	1314.717	0.870
1.3	750.555	W8X31	5890.311	796.254	1314.717	0.943
1.4	808.290	W10X33	6264.504	814.331	1398.237	0.993
1.5	866.025	W8X35	6645.148	906.213	1483.197	0.956
1.6	923.760	W10X39	7419.340	983.793	1655.997	0.939
1.7	981.495	W10X39	7419.340	983.793	1655.997	0.998
1.8	1039.230	W12X45	8516.112	1109.959	1900.796	0.936
1.9	1096.966	W12X45	8516.112	1109.959	1900.796	0.988
2.0	1154.701	W14X48	9096.756	1160.967	2030.396	0.995

Tabla 1. Diseño de menor peso en función a FS para barras sujetas a compresión

FS	$FS \cdot P_u$	Perfil	Área	$\phi_c \cdot P_{nc}$	$\phi_t \cdot P_{nt}$	Ratio
	KN	W	mm <sup>2</sup>	KN	KN	$\frac{FS \cdot P_u}{\phi_t \cdot P_{nt}}$
1.0	577.350	W12X14	2683.866	61.219	599.039	0.964
1.1	635.085	W6X15	2858.059	241.761	637.919	0.996
1.2	692.820	W10X17	3219.348	92.347	718.559	0.964
1.3	750.555	W8X18	3393.542	206.742	757.439	0.991
1.4	808.290	W10X19	3625.799	111.283	809.278	0.999
1.5	866.025	W8X21	3974.186	253.434	887.038	0.976
1.6	923.760	W12X22	4180.637	120.881	933.118	0.990
1.7	981.495	W8X24	4567.733	463.466	1019.518	0.963
1.8	1039.230	W6X25	4735.474	440.756	1056.958	0.983
1.9	1096.966	W12X26	4935.474	447.402	1101.598	0.996
2.0	1154.701	W8X28	5322.570	547.480	1187.998	0.972

Tabla 2. Diseño de menor peso en función a FS para barras sujetas a tracción

al que se encuentran las barras sujetas a compresión y tracción, para lo cual se afectan a las áreas por los valores del Ratio para cada factor de seguridad considerado. En la siguiente [Figura 4](#), se muestran los valores de las tensiones de tracción y compresión en función de los factores de seguridad adoptados.

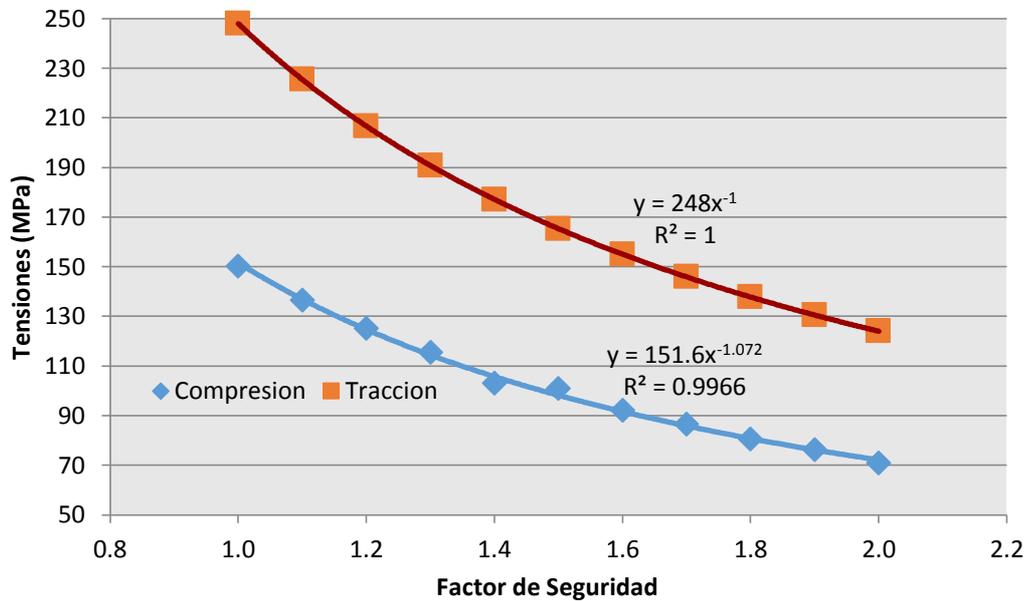


Figura 4. Estado tensional de las barras vs Factor de Seguridad

## 4 MÉTODO PROBABILÍSTICO A SER USADO

### 4.1 Introducción al Diseño Probabilístico

El enfoque de diseño probabilístico según [Sudret y Der Kiureghian \(2000\)](#), las variaciones pueden ser asociadas tanto a las variables de diseño como a los parámetros asociados. Hay tres categorías de variables:  $\mathbf{d}$  es un vector de variables de diseño determinísticas,  $\mathbf{x}$  es el vector de variables de diseño estocástico, y  $\mathbf{p}$  es un vector de parámetros estocásticos. Un modelo típico de diseño probabilístico, es definido de acuerdo a [Vacareanu et al. \(2007\)](#) como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar } \mathbf{d}, \mu_{\mathbf{x}} \\
 & \text{Minimizar } f(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\
 & \text{Sujeto a } P\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0\} \geq R_i, i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{12}$$

En optimización probabilística (diseño factible), la confiabilidad es definida como la probabilidad que las funciones de restricción  $P_i$  para  $g_i \geq 0$  no sean menores que un determinado nivel de confiabilidad  $R_i$ .

### 4.2 Concepto del Punto de Falla Más Probable - Most Probable Point (MPP)

El concepto MPP fué introducido en el análisis de confiabilidad estructural por [Hasofer y Lind \(1974\)](#), para aproximar la confiabilidad, mostrada en  $P\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0\}$  en el modelo definido por la ecuación (1).

Cuando una estructura excede un límite específico, la estructura es incapaz de responder de manera prevista, generándose estados asociados a falla. El límite específico es llamado estado límite. La estructura será considerada no confiable si la probabilidad de falla en el estado límite de la estructura excede el valor requerido. En general, el estado límite indica el margen de

seguridad entre la resistencia y las demandas producidas por las cargas de servicio de la estructura.

La función de performance o de estado-límite  $g(X)$  y la probabilidad de fallo  $P_f$  pueden definirse como:

$$g(X) = R(X) - Q(X) \quad (13)$$

$$P_f = P[g(X) < 0] \quad (14)$$

donde  $R$  es la resistencia y  $Q$  es el estado de cargas del sistema. Ambos  $R(X)$  y  $Q(X)$  son funciones de variables aleatorias  $X$ . La notación  $g(X) < 0$  denota la región de falla. De la misma forma,  $g(X) = 0$  y  $g(X) > 0$  indican la superficie de falla y la región de seguridad respectivamente. A la cantidad  $R - Q$  se la denomina margen de seguridad.

La media y la desviación estándar de la función de estado límite  $g(X)$  pueden determinarse de la definición elemental de la media y la varianza. La media de  $g(X)$  es:

$$\mu_g = \mu_R - \mu_Q \quad (15)$$

donde,  $\mu_R$  y  $\mu_Q$  son las medias de  $R$  y  $Q$  respectivamente. La desviación estándar de  $g(X)$  es:

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2\rho_{RQ}\sigma_R\sigma_Q} \quad (16)$$

donde,  $\rho_{RQ}$  es el coeficiente de correlación entre  $R$  y  $Q$ , y  $\sigma_R$  y  $\sigma_Q$  son las desviaciones estándar de  $R$  y  $Q$  respectivamente. En general, la carga y la resistencia no están correlacionadas, por lo que  $\rho_{RQ} = 0$

El índice de confiabilidad  $\beta$  según [Hasofer y Lind \(1974\)](#), se define como:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} \quad (17)$$

que es la distancia mínima desde el origen del espacio de variables reducidas hasta la función de estado límite  $g(X) = 0$ .

### 4.3 Probabilidad de Falla e Índice de Confiabilidad

Como puede verse en la siguiente [Figura 5](#), la probabilidad de falla es el área debajo de la curva a la izquierda del eje  $g = 0$ , por lo tanto, para reducir la probabilidad de falla, hay que mover la curva hacia la derecha, y esto se hace aumentando el valor de la media o disminuyendo la dispersión de la curva (disminuyendo el desvío standard) manteniendo la misma media. Para esto, hay que definir la posición de la media en base a la desviación standard de la curva de función de distribución de probabilidades. Esta distancia es  $\beta\sigma_g$  como se muestra en la [Figura 5](#). para una distribución normal, estando la región de falla a la izquierda de la ordenada  $g = 0$ . La idea detrás del índice de seguridad es que la distancia de la media con ubicación  $\mu_g$ , proporciona una buena medida del margen de seguridad según [Pholdee y Bureerat \(2012\)](#). A pesar de conocer las variaciones en las cargas y resistencias, la diferencia entre resistencia y la demanda (efectos de carga), no es posible cuantificarla directamente, sino a través de la desviación standard de la diferencia, dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{(R-Q)} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2} \quad (18)$$

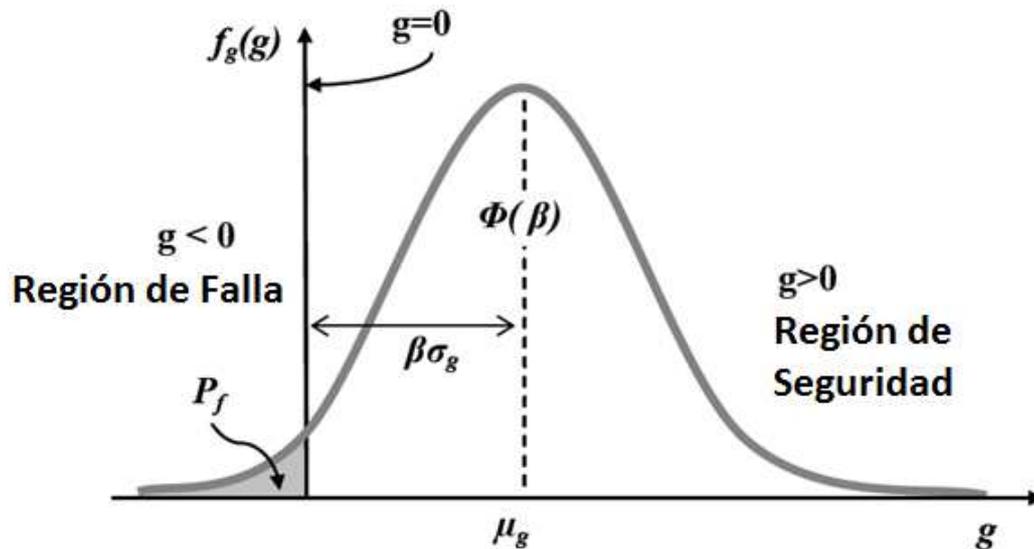


Figura 5. Regiones de Falla y Seguridad en Función de Densidad de Probabilidad para el Estado Límite  $g(X)$

Para un caso especial, la resistencia  $R$  y la carga  $Q$  se asumen ser normalmente distribuidas y no correlacionadas. La función de estado-límite es también normalmente distribuida, dado que  $g(X)$  es una función lineal de  $R$  y  $Q$ , por lo que la función de densidad de probabilidad de la función del estado-límite para este caso es:

$$f_g(g) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{g - \mu_g}{\sigma_g} \right)^2 \right] \quad (19)$$

La probabilidad de falla se define como:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_g(g) dg \quad (20)$$

Cuando la función  $g(X) = 0$  es normalmente distribuida, la probabilidad de falla se define como:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta^2 \right] dg = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (21)$$

donde  $\Phi(X)$  es la función de distribución normal estándar, definiéndose la confiabilidad  $S$  como

$$S = 1 - P_f = 1 - \Phi(-\beta) \quad (22)$$

Para poder realizar el ajuste estocástico al factor de seguridad de la carga y que tenga incidencia en el diseño de la estructura, se debe realizar un análisis de confiabilidad según [Nowak y Collins \(2013\)](#), donde se considerara la incertidumbre de las variables y se trata a la carga  $P$  como una variable aleatoria. Métodos probabilísticos aplicados a obtener la confiabilidad de elementos prismáticos sometidos a cargas axiales compresivas, definen la confiabilidad como la probabilidad que una carga crítica estocástica sea mayor que la carga crítica prevista en el diseño.

## 5 MÉTODOS DE ANÁLISIS

Para el cálculo de la probabilidad de falla que también está referida a la ecuación (20), numerosos métodos son usados para simplificar el tratamiento numérico del proceso de integración. El desarrollo en serie de Taylor es generalmente usado para linealizar la función de estado límite  $g(X) = 0$ . En este enfoque, desarrollos en serie de Taylor de primer y segundo orden son utilizados para estimar la confiabilidad. El índice de confiabilidad  $\beta$ , se define como la distancia mínima del espacio de funciones reducidas a la curva o superficie descrita por la función de estado límite  $g$ . Para una función de estado límite lineal, es Primer Orden Segundo Momento (FOSM: First Order Second Moment) y para el caso no lineal, es Segundo Orden Segundo Momento (SOSM: Second Order Second Moment). FOSM es también conocido como el método del Valor Medio de Primer Orden Segundo Momento (MVFOSM: Mean Value First Order Second Moment), debido a que es un método de expansión en el punto de la media y el segundo momento es el resultado estadístico de orden más alto utilizado en este análisis. A pesar que la implementación de FOSM es simple, se ha demostrado que la precisión no es aceptable para bajas probabilidades de falla ( $P_f < 10^{-5}$ ) o para funciones de estado límite no lineales. En SOSM, la adición del término de segundo orden aumenta significativamente el esfuerzo computacional, aunque el mejoramiento en la precisión no es muy apreciable.

Con la transformación de las variables de diseño estocásticas  $\mathbf{x}$  y los parámetros  $\mathbf{p}$  a un espacio normal estandarizado llamado espacio  $U$ , el punto MPP (Most Probable Point) es formalmente definido en ese espacio como la distancia mínima desde el origen de dicho espacio a la función de estado límite. Si la función de estado límite  $g$  es lineal en el espacio  $U$ , la confiabilidad es

$$P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0\} = P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \geq 0\} = \Phi(\beta) \quad (23)$$

La última ecuación aún es buena aproximación cuando el grado de no linealidad de  $g$  no es alto. De otra manera se aplican aproximaciones de mayor orden como Confiabilidad de Segundo Orden (Second Order Reliability Method - SORM) según [Fiessler et al. \(1974\)](#); [Breitung \(1984\)](#); [Der Kiureghian \(1987\)](#). Cuando las variables randómicas están correlacionadas, las variables reducidas deben ser inicialmente transformadas en un espacio no correlacional. Aquellas variables que siguen distribuciones no normales, deben ser transformadas inicialmente en variables equivalentes independientes normales standard y la media y desvío standard equivalentes se estiman utilizando el método Rackwitz-Fiessler o el método Chen-Lind según [Varoglu y Mahadevan \(2000\)](#).

El problema de determinar el índice de confiabilidad  $\beta$ , es equivalente a localizar el punto MPP en la superficie de estado límite. Este procedimiento se denomina búsqueda de MPP (MPP search) que puede ser tratado como un problema de optimización que usualmente requiere de procesos iterativos de búsqueda según [Nowak y Collins \(2013\)](#), habiendo sido implementadas técnicas de búsqueda mejoradas como la de doble ciclo “double-loop” y “double-loop-single-vector” implementadas por [Chen y Hasselman \(1997\)](#).

El enfoque a través del índice de seguridad en el análisis de confiabilidad, es actualmente un problema de optimización matemático que consiste en encontrar el punto en la superficie de la respuesta estructural (aproximación del estado-límite) que tenga la menor distancia desde el origen hasta la superficie del espacio normal estándar. Los autores [Hasofer y Lind \(1974\)](#), proporcionan una interpretación geométrica del índice de seguridad y mejoran el método FOSM mediante la introducción de la transformación Hasofer and Lind (HL). En el procedimiento, el vector de diseño  $X$  es transformado en el vector normalizado, independiente de las variables Gaussianas  $U$ . Debido a la simetría rotacional y a la transformación HL, el

punto de diseño en el espacio  $U$  representa el punto de mayor densidad de probabilidad o la máxima probabilidad como se muestra en la siguiente [Figura 6](#). Esto último representa la contribución más significativa a la probabilidad de falla nominal  $P_f = \Phi(-\beta)$ . Este punto en el espacio de diseño es llamado el Punto de Falla Más Probable (MPP: Most Probable Failure Point) como se muestra en la [Figura 6](#).

Dependiendo de las diversas formas de las superficies de falla  $g(U) = 0$ , se utilizan diferentes métodos para el cálculo de probabilidad de falla. Considerando componentes estructurales independientes del tiempo, si la superficie de falla es representada por una aproximación de primer orden (linealizada) en el punto de falla más probable (MPP), el método aproximado es llamado Método de Confiabilidad de Primer Orden (FORM: First Order Reliability Method) y si la superficie de falla es representada por una aproximación de segundo orden (no lineal) en el MPP, el método es denominado Método de Confiabilidad de Segundo Orden (SORM: Second Order Reliability Method) de acuerdo a [Karadeniz et al. \(2003\)](#).

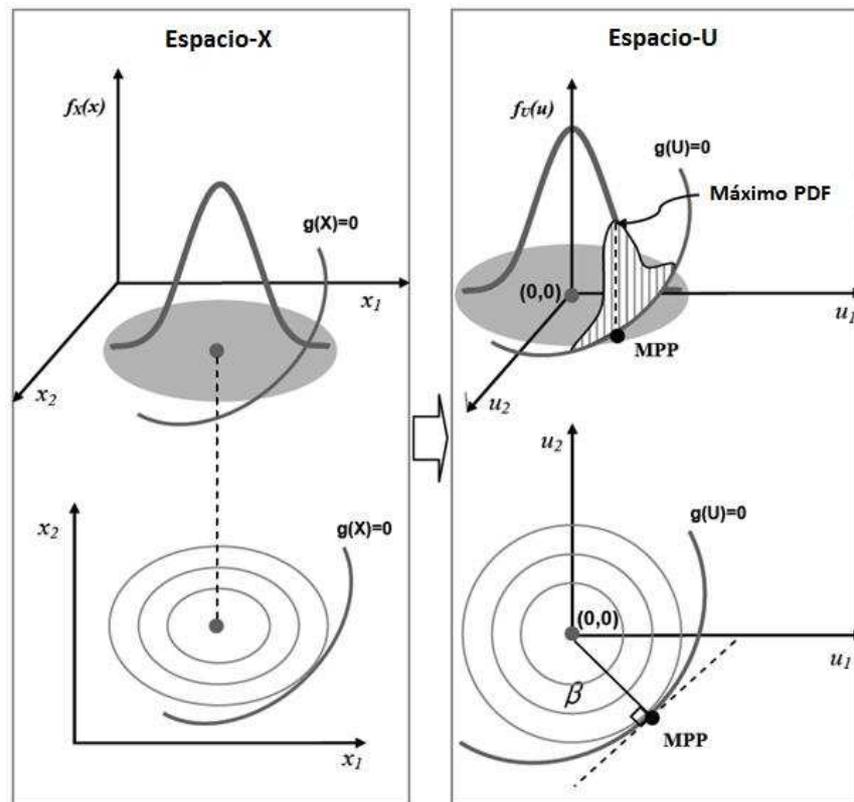


Figura 6. Transformación y MPP

La siguiente [Figura 7](#) muestra el punto de diseño  $(r,q)$  en el límite de falla  $(g = 0)$  para una función de estado límite lineal.

### 5.1 Análisis de la Estructura

En problemas de diseño estructural, los campos de desplazamiento y tensiones son frecuentemente utilizados para medir la performance de la estructura. Si incertezas forman parte de los parámetros del sistema, derivadas de primer orden de esos funcionales son empleados para resolver problemas de MPP según [Madsen et al. \(1986\)](#). Si se aplican métodos numéricos para encontrar derivadas de primer orden, puede llevar a soluciones imprecisas debido a errores numéricos. Para evitar este tipo de problemas, en la siguiente sección la confiabilidad de una

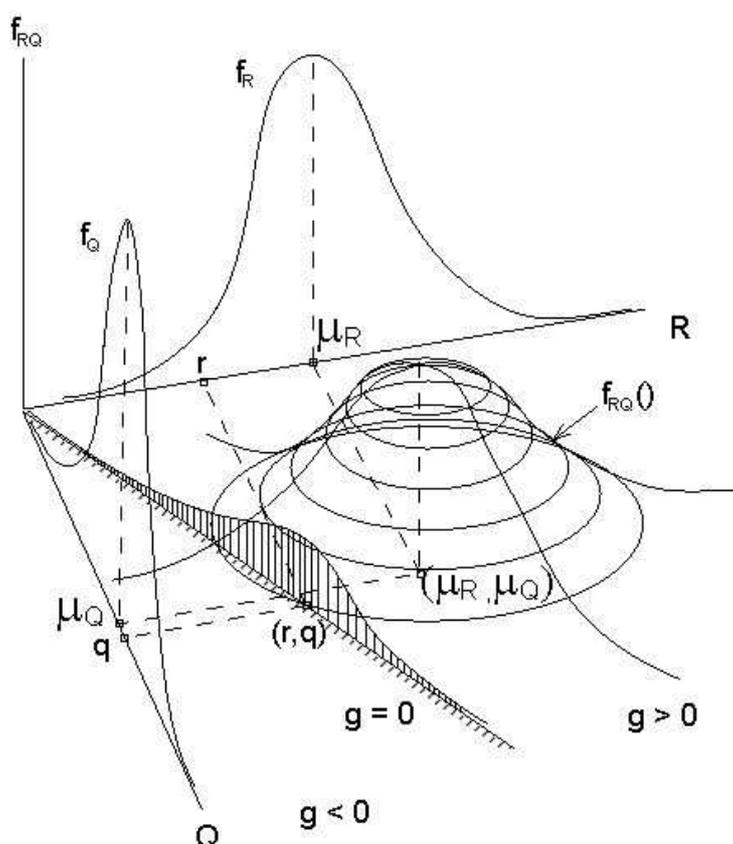


Figura 7. Punto de diseño en límite de falla para función de estado límite lineal

cercha será estudiada utilizando métodos analíticos.

Para este estudio particular, las variables de diseño que se adoptan con fuentes potenciales de incertidumbre son las áreas de las secciones transversales y el sistema de cargas que actúa en la cercha. Se considera una distribución normal con un coeficiente de variación (COV) 0.1 para todas las áreas y para el valor de las medias, tanto de las barras sujetas a compresión como las que están sujetas a tracción. Estas se obtienen del diseño de menor peso sin afectación del factor de seguridad (FS=1) y se las aproximará a un área ideal requerida al multiplicarlas por su ratio respectivo. Para el caso del ejemplo adoptado, las áreas de los elementos sujetos a compresión tienen una media  $\mu_{A1} = 4271.0 \text{ mm}^2$  y los de tracción  $\mu_{A2} = 2586.7 \text{ mm}^2$ .

En la siguiente [Tabla 3](#), se expone un resumen de variables aleatorias para la cercha.

VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN	MEDIA $\mu_x$	DESVIACIÓN ESTÁNDAR $\sigma_x$	COV $\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$
Área de barras a compresión A1 – (mm <sup>2</sup> )	Normal	4271.0	427.10	0.1
Área de barras a tracción A2 – (mm <sup>2</sup> )	Normal	2586.7	258.67	0.1
Carga P – (KN)	Lognormal	1000	100 / 500 / 1000	0.1 / 0.5 / 1.0

Tabla 3. Resumen de variables aleatorias para la cercha

La carga  $P$  es la que posee mayor incertidumbre en comparación a las demás variables y es por esto que se debe realizar un análisis de sensibilidad en base a ésta variable aleatoria, considerando valores del coeficiente de variación COV de 0.1, 0.5 y 1.0. Para este caso, se considera una distribución lognormal, donde la media es  $\mu_P = 1000 \text{ KN}$ .

## 5.2 Funciones de Estado-Límite

Para establecer las funciones de estado límite, las siguientes expresiones se obtuvieron resolviendo analíticamente la cercha.

La función de estado límite para las barras sujetas a compresión está dada por:

$$g_c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{A_1} - \sigma_{\text{admisible}} \quad (24)$$

Los gradientes de la función anterior se definen como:

$$\nabla_P g_c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{A_1} \quad (25)$$

$$\nabla_{A_1} g_c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{A_1^2} \quad (26)$$

La función de estado límite para las barras sujetas a tracción viene dada por:

$$g_t = \sqrt{3} \cdot P \left( \frac{2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2}{6 \cdot A_1 \cdot A_2} - \frac{1}{2 \cdot A_1} \right) - \sigma_{\text{admisible}} \quad (27)$$

donde el límite es una tensión admisible que contiene implícitamente un grado de seguridad en relación a la tensión de fluencia del material, el cual es un valor característico.

De la ecuación anterior se calculan sus gradientes, los cuales son:

$$\nabla_P g_t = \frac{\sqrt{3}(2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2)}{6 \cdot A_1 \cdot A_2} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot A_1} \quad (28)$$

$$\nabla_{A_1} g_t = \sqrt{3} \cdot P \left( \frac{1}{3 \cdot A_1 \cdot A_2} - \frac{2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2}{6 \cdot A_1^2 \cdot A_2} + \frac{1}{2 \cdot A_1^2} \right) \quad (29)$$

$$\nabla_{A_2} g_t = \sqrt{3} \cdot P \left( \frac{1}{2 \cdot A_1 \cdot A_2} - \frac{2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2}{6 \cdot A_1 \cdot A_2^2} \right) \quad (30)$$

## 5.3 Ajuste Estocástico del Factor de Seguridad

Para realizar este ajuste se debe encontrar la relación entre las tensiones determinísticas de cada elemento con las tensiones que se encontraran en las curvas de las funciones de distribución acumuladas. Estas últimas tensiones están relacionadas con las probabilidades de falla de cada elemento, por lo cual los nuevos factores de seguridad hallados consideraran las características probabilísticas de las variables aleatorias.

Las probabilidades de falla fueron calculadas con el uso del programa FERUM v.4.1 (Finite Element Reliability Using Matlab), <http://www.ifma.fr/Recherche/Labos/FERUM>, que está conformado por una serie de funciones escritas en el lenguaje del entorno Matlab, para realizar un análisis de confiabilidad utilizando el método de Elementos Finitos.

#### 5.4 Funciones de Distribución Acumulada

Una vez calculadas las probabilidades de falla de las funciones de estado límite planteadas anteriormente mediante el método FORM, se puede construir los gráficos de funciones de distribución acumulada (CDF) de las barras sujetas a compresión y de las barras sujetas a tracción en la cercha para distintos valores de los coeficientes de variación (COV).

A continuación en la Figura 8. se muestra el gráfico de función de distribución acumulada para los elementos sometidos a esfuerzo de compresión de la cercha propuesta, donde se aprecia la sensibilidad de la variable aleatoria “carga P”.

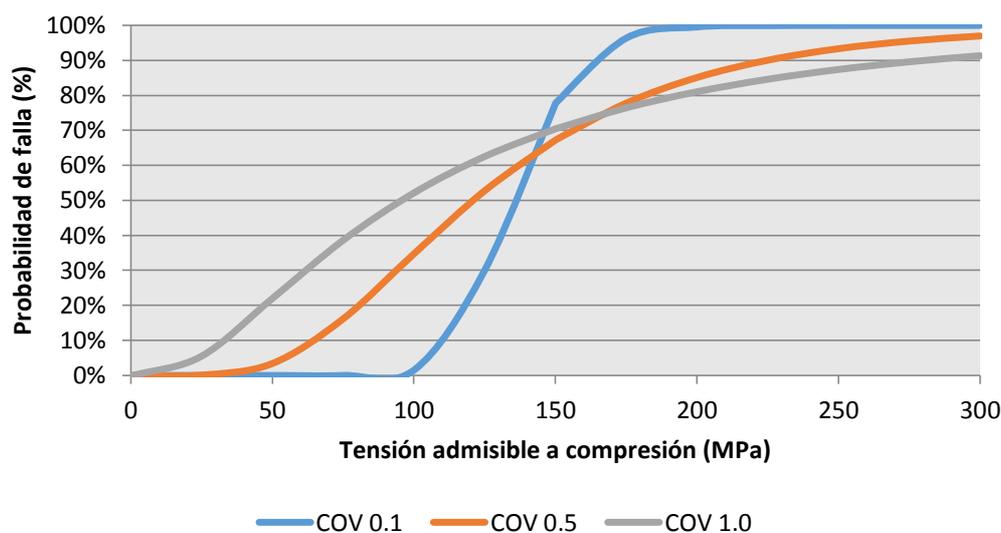


Figura 8. CDF para barras a compresión

De la misma manera que el punto anterior, se construye la gráfica de función de distribución acumulada (CDF) para elementos sometidos a tracción, mostrando en la Figura 9. la sensibilidad de la variable aleatoria “carga P”.

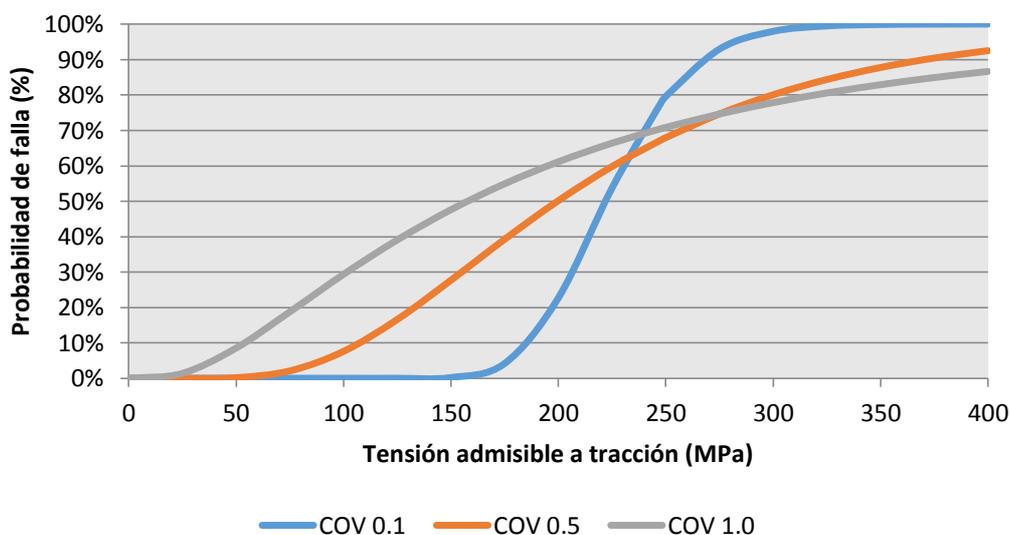


Figura 9. CDF para barras a tracción

### 5.5 Relación de probabilidad de falla con el factor de seguridad

Finalmente, utilizando los datos anteriores, se puede graficar los valores del factor de seguridad en función a la probabilidad de falla como se muestra en las siguientes Figura 10. y Figura 11. Cuando estos valores son utilizados para modificar al valor determinista esperado, se obtienen factores de seguridad ajustados que tienen concordancia con las características estadísticas de las variables de diseño y con la sensibilidad de la variable aleatoria “carga P”.

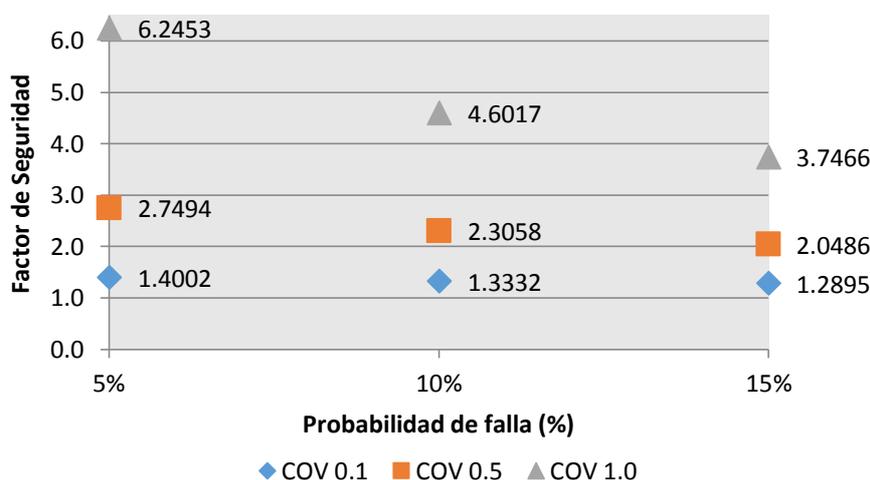


Figura 10. Factor de Seguridad vs Probabilidad de Falla para Compresión

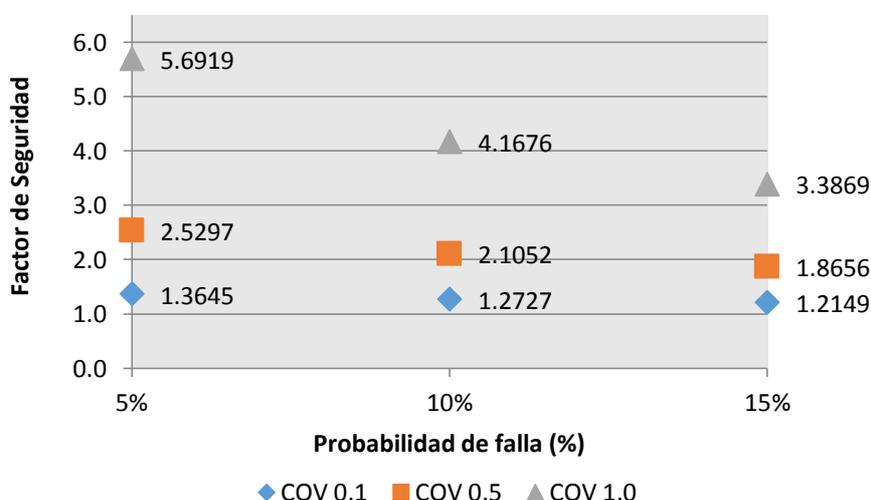


Figura 11. Factor de Seguridad vs Probabilidad de Falla para Tracción

## 6 RELACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS ENTRE LAS FORMULACIONES DETERMINÍSTICA Y ESTOCÁSTICA.

A pesar que los métodos de diseño utilizados siguen las metodologías ASD y LRFD, ambas tienen variables de uso común como las resistencias nominales, y una relación entre factor de seguridad de ASD y factor de resistencia de LRFD de acuerdo a AISC (2011). Los factores parciales de seguridad e índices de confiabilidad o probabilidad de fallo se relacionan con la probabilidad de falla a través de las coordenadas del punto de diseño (MPP). Con esto, es

posible utilizar los resultados del método probabilístico para conocer cuál es el valor de la tensión determinística correspondiente al valor de tensión para cualquier valor de probabilidad de falla (o índice de confiabilidad) dentro de los límites establecidos.

A continuación se realiza un análisis de sensibilidad de la variable aleatoria  $P$ . Para ver la variabilidad de los factores de seguridad dentro del rango, se ha tomado el caso crítico  $\beta = 0$  que significa probabilidad de falla  $PF = 0.5$  caso probabilístico, considerando este caso solo como referencia al no existir una base completa de probabilidad para el diseño y un caso de probabilidad de falla aceptable  $PF = 0.1$ , dentro de los límites usuales de diseño dados por las normas.

Para el estudio, se tienen tres curvas correspondientes a valores de COV 0.1, 0.5 y 1, por lo que se utilizarán los valores extremos COV 1 para el caso crítico y COV 0.1 para el caso más cercano al caso determinístico.

Para el caso de  $PF = 0.5$ , para tensiones de compresión, se tiene una tensión de 95.61 MPa. Llevando ese valor al gráfico de la [Figura 4](#), corresponde a un factor de seguridad  $FS = 1.537$ .

Para el estado de tracción, se tiene una tensión de 163.1 MPa, que corresponde a un factor de seguridad  $FS = 1.520$ . La siguiente [Figura 12](#), muestra los límites mínimos para este caso.

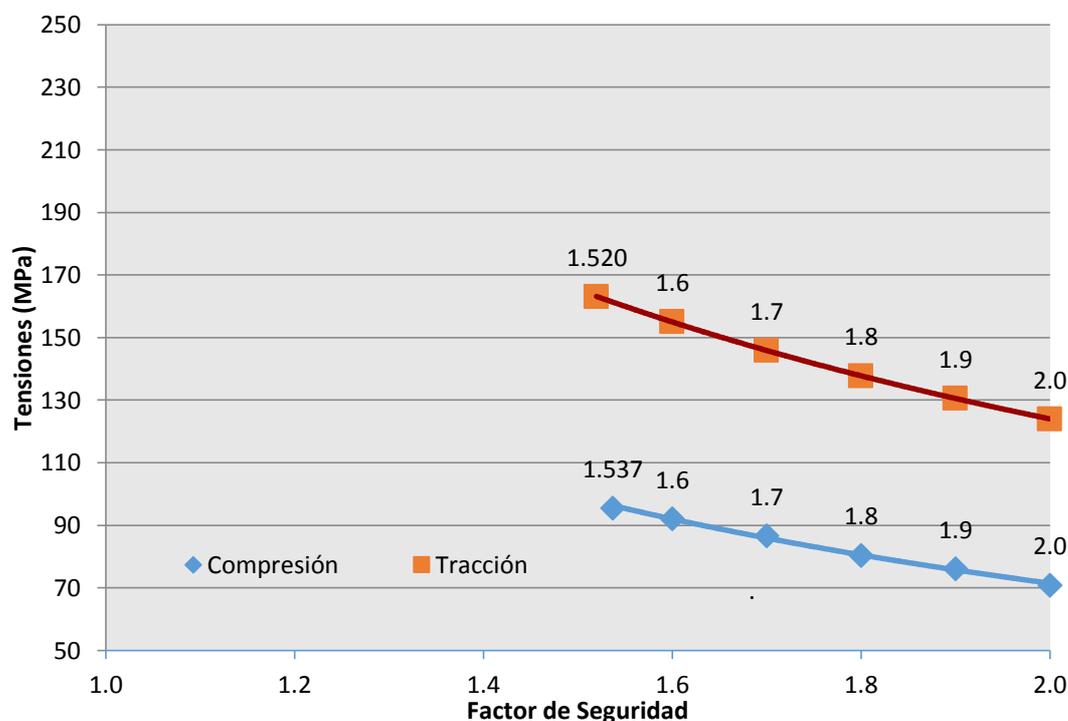


Figura 12. Límites Mínimos de Factores de Seguridad para una  $PF = 0.5$

Considerando ahora el caso de  $PF = 0.1$  como un valor aceptable para diseño, para tensiones de compresión, se tiene una tensión de 109.65 MPa. Llevando ese valor al gráfico de la [Figura 4](#), corresponde a un factor de seguridad  $FS = 1.353$ .

Similarmente, para el estado de tracción, se tiene una tensión de 185.01 MPa, que corresponde a un factor de seguridad  $FS = 1.340$ .

Para la cercha en particular, para un diseño seguro tanto a compresión como a tracción, deben utilizarse mínimamente esos factores de seguridad. La siguiente [Figura 13](#), muestra los límites mínimos a ser considerados en el diseño determinístico.

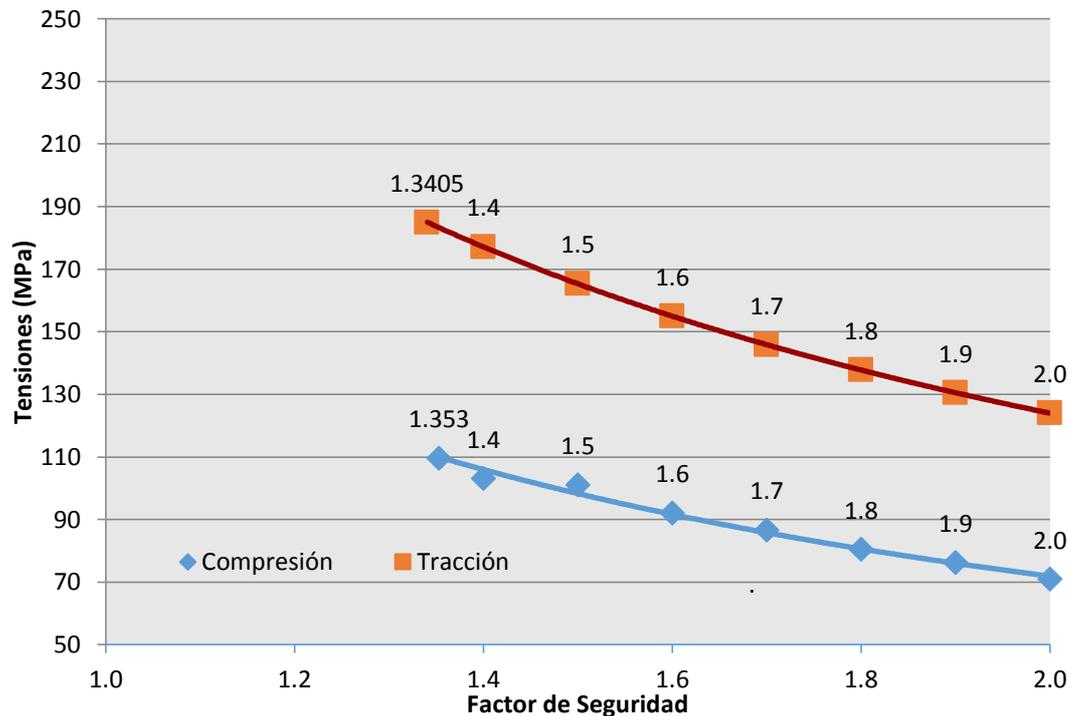


Figura 13. Límites Mínimos de Factores de Seguridad para una PF = 0.1

## 7 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este trabajo se ha propuesto una metodología para el ajuste estocástico del factor de seguridad usado en cargas vivas de estructuras tipo cercha utilizando métodos de confiabilidad de primer orden. Se ha tenido en cuenta el carácter aleatorio no solo de la carga viva que actúa en la cercha, sino también de las áreas en las secciones transversales de los componentes del sistema estructural analizado.

## 8 CONCLUSIONES

Dentro del alcance del presente estudio, las siguientes conclusiones son vertidas:

La aplicación de análisis matricial de estructuras o elementos finitos en estructuras tipo cercha plana, permite de manera relativamente simple encontrar las expresiones analíticas de las tensiones y las funciones de falla que son utilizadas para el diseño. La aplicación en otro tipo de estructuras con varios grados de libertad por nudo, torna dificultosa la obtención analítica de estos valores especialmente para casos de carga y geometría compleja.

Los esfuerzos en los elementos de la estructura para el nivel de carga de servicio son únicos cuando no existe influencia de variables aleatorias consideradas

Los esfuerzos se representan por funciones de distribución de probabilidades acumuladas, cada una con valores conocidos de media y desviación standard, con coeficientes de variación para las cargas y áreas de las secciones transversales de los elementos variando de 0,1 a 1. Las gráficas de las funciones de distribución acumulada (CDF) para elementos sometidos a compresión y tracción, muestran la sensibilidad de la variable aleatoria “carga P”.

Las variables aleatorias que gobiernan en las funciones de estado límite para tensiones normales (tanto para tracción como para compresión) son las cargas del sistema y las áreas transversales de los elementos. Si bien para este caso solo se han adoptado dos variables que mayormente gobiernan las funciones de estado límite de tensiones, éstas pueden incrementarse

al poder considerarse distintas secciones transversales de los elementos que componen la estructura.

El nivel de seguridad encontrado a través del presente método de estado límite es presentado en términos de Probabilidad de Falla. Finalmente se realiza un análisis de los resultados obtenidos del índice de confiabilidad en función de los coeficientes de variación (COV) utilizados en los elementos sujetos a tracción y a compresión. La variación muestra que el nivel de seguridad alcanzado en el diseño no es uniforme en los estados límite.

Los resultados del método probabilístico pueden ser utilizados para determinar el valor de la tensión obtenida por un proceso determinístico correspondiente al valor de tensión para un determinado índice de confiabilidad, caso probabilístico. Con esto es posible obtener el valor mínimo del factor de seguridad tanto en compresión como tracción para que el diseño sea seguro, considerando un determinado valor aceptable de probabilidad de falla.

El análisis de sensibilidad muestra valores de factores de seguridad altos para el caso donde se presenta mucha incerteza, mientras que si se tiene control y conocimiento sobre las variables de diseño, los valores de los factores de seguridad se reducen.

La metodología LRFD (Load and Resistance Factor Design) según Taly (2015), deja un conjunto de variables de estado liberadas para su aplicación a cada estructura en particular, lo que corrobora que los factores de seguridad no son generales. El factor de seguridad es función del factor de mayoración de carga y minoración de la resistencia del material. Al considerar características estadísticas de las variables aleatorias en el diseño, es posible realizar un ajuste a dicho factor.

El ajuste del factor de seguridad está en función a la probabilidad de falla obtenida de la construcción de funciones de distribución acumulada, motivo por el cual debe tenerse cuidado en la elección del método que toma en cuenta un análisis probabilístico. Por lo general, los métodos de confiabilidad de primer orden (FORM) son suficientes cuando la superficie de estado límite es casi plana y puede determinarse con este método de manera directa el punto de distancia mínima al origen, que será el punto de diseño, pero cuando la superficie de falla es no lineal, los métodos de confiabilidad de segundo orden (SORM) son los apropiados.

Si bien este trabajo apunta más a la metodología LFD, investigaciones futuras pueden ser enfocadas al ajuste estocástico para el factor de minoración en la resistencia del material, con lo cual es posible determinar la incidencia que esta última variable tiene en la estructura cuando se consideran ambos parámetros probabilísticos. Una vez que pueda llegarse a ese objetivo, se puede desarrollar un método de ajuste de factores tanto de cargas como de materiales, que es el enfoque de la metodología LRFD actual, salvo que ésta deja un conjunto de variables de estado sin ajuste, liberadas para su aplicación a cada estructura en particular en base a la experiencia del proyectista.

## BIBLIOGRAFÍA

- AISC-American Institute of Steel Construction, *Specification for Structural Steel Buildings, AISC-360-10* (AISC), Chicago, IL, 2010.
- AISC-American Institute of Steel Construction. *Steel Construction Manual: Load and Resistance Factor Design, LRFDM* (AISC), 14<sup>th</sup> Ed. 2011.
- ASCE, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, *American Society of Civil Engineers* (ASCE/SE1) 7 10, 2010.
- Blum, H.B., *Reliability-based Design of Truss Structures by Advanced Analysis*, Research report R936, School of Civil Engineering, The University of Sydney, ISSN 1833-2781, Sydney, Australia, 2013.
- Breitung, K., Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), 110, 3: 357-366, 1984.

- Burns, S.A., Recent Advances in Optimal Structural Design, *Technical Committee on Optimal Structural Design*, ASCE, Urbana, Illinois, 2002.
- Chen, X. and Hasselman, T. K., 1997, Reliability Based Structural Design Optimization for Practical Applications, 38<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, *Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit and AIAA/ASME/AHS Adaptive Structural Forum*, AIAA-97-1403, Kissimmee, FL. 1997.
- Der Kiureghian, A., Lin, H. Z., and Hwang, S. J., Second-order Reliability Approximations, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), 113, 8: 1208-1225, 1987
- FERUM v.4.1, <http://www.ifma.fr/Recherche/Labos/FERUM>, Instituto Francés de Mecánica Aplicada, 2016.
- Fiessler, B., Newmann, H. J., and Rackwitz, R., Quadratic Limit States in Structural Reliability, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), 4: 661-676, 1979
- Fraser, W.B. and Budiansky, B., The Buckling of a Column with Random Initial Deflections, *Journal of Applied Mechanics*, 36: 232-240, 1969.
- Gallagher R.H. and Zienkiewicz, O.C., *Optimum Structural Design: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, England, 1973.
- Haldar, A. and Mahadevan, S., *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Son, New York, 2000.
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C., Exact and Invariant Second Moment Code Format, *Journal of Engineering Mechanics Division* (ASME), 100, EM1: 111-121, 1974.
- Jalalpour, M., Igusa, T., and Guest, J.K., Guest Optimal design of trusses with geometric imperfections: Accounting for global instability, *International Journal of Solids and Structures*, 48: 3011–3019, 2011.
- Karadeniz, H., and Vrouwenvelder, T., *Saferelnet (Task 5.1) Overview Reliability Methods*, TU-Delft, The Netherlands, 2003.
- Koiter, W.T., *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Ph.D. Thesis (in Dutch), Delft University of Technology, (1945), English Translation ; NASA-TTF-10, pp. 833, 1967.
- Madsen, H.O., Krenk, S., and Lind, N.C., *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1986.
- Nowak, A.S. and Collins, K.R., *Reliability of Structures*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2013.
- Pholdee, N. and Bureerat, S., Performance Enhancement of Multiobjective Evolutionary Optimizers for Truss Design Using an Approximate Gradient, *Computer and Structures*, 106-107: 115-124, 2012.
- Roorda, J., *Buckling of Elastic Structures*, University of Waterloo Press, 1980.
- Sheu, C.Y., and Schmit, L.A., Minimum Weight Design of Elastic Redundant Trusses under Multiple Static Loading Conditions, *AIAA*, 1972.
- Spunt, L., *Optimal Structural Design*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- Sudret B., and Der Kiureghian, A., *Stochastic Finite Element Methods and Reliability*, UCB, California, 2000.
- Taly, N., *Highway Bridge Superstructure Engineering, LRFD Approaches to Design and Analysis*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2015.
- TOPOSTRUCT, <http://sawapan.eu/>
- Vacareanu, R., Aldea A., and Lungu, D., *Structural Reliability and Risk Analysis*, UTCB, Bucharest, 2007.
- Varoglu, E., *Structural analysis of trusses and truss systems*, Research Rep., Forintek Canada, Vancouver, VA, 1985.
- Wen, Y.K., Reliability and performance-based design, *Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability* (ASCE), Notre-Dame, 2000.