

## MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS ESPACIALES: UN ENFOQUE CONSISTENTE

Patricia Velásquez Garnica<sup>a</sup> y Juan A. Ronda<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Postgrado, Escuela Militar de Ingeniería EMI, Av. Arce 2642, La Paz, Bolivia,*  
*pvelasquez@construvel.com.bo, <http://www.emi.edu.bo>*

<sup>b</sup> *Departamento de Postgrado, Escuela Militar de Ingeniería EMI, Av. Arce 2642, La Paz, Bolivia,*  
*juanronda@gmail.com, <http://www.emi.edu.bo>*

**Palabras clave:** Matrices de Rigidez Geométrica, Estabilidad Estructural, Cargas Críticas.

**Resumen.** En el presente trabajo se realiza la implementación de diversas matrices de rigidez geométrica provenientes de la literatura en un programa computacional verificado, utilizando la misma matriz de rigidez elástica para un análisis de estabilidad elástica linealizada de pórticos espaciales, mostrando diferencias substanciales en los resultados numéricos de los valores de cargas críticas para estructuras con configuraciones simples de carga y geometría. Resultados de ensayos de laboratorio y analíticos, corroboran las previsiones numéricas de formulaciones de matrices geométricas que toman en cuenta el cizallamiento y de manera completa los trabajos no lineales asociados a las componentes cuadráticas del tensor de las deformaciones, equivalente a la consideración de matrices de corrección nodal.

## 1 INTRODUCCIÓN

El tema aquí presentado, trata de tipos particulares de matrices geométricas, llamadas de matrices de tensiones (o esfuerzos) iniciales, que son utilizadas para un análisis computacional de problemas estructurales en que ocurren no linealidades asociadas a cambios en la geometría de la estructura. A pesar que estas matrices son utilizadas en un esquema de análisis no lineal incremental con actualización de la geometría e iteraciones de equilibrio, ellas son particularmente útiles para la determinación de cargas críticas en un análisis linealizado de autovalor. En el presente trabajo, se considera únicamente el problema de estabilidad elástica linealizada de elementos de pórtico en el espacio, sujetos a cargas conservativas, en el régimen elástico lineal, con pequeños desplazamientos, lo que conduce a un problema generalizado de autovalor lineal con matrices simétricas. Las aproximaciones aquí presentadas son tanto para rotaciones infinitesimales como rotaciones finitas y corresponden a pequeñas deformaciones con rotaciones moderadas, lo cual permite obtener la matriz geométrica en forma comprobadamente adecuada para el cálculo de cargas de estabilidad linealizada.

Dentro de las hipótesis básicas, hay formulaciones substancialmente diferentes en la literatura, que llevan a discrepancias elevadas en los resultados obtenidos, conforme a lo mencionado por [Argyris \(1978\)](#). Una vez presentadas las formulaciones de manera resumida, seguidamente se discuten las controversias en relación a esa cuestión. Se adoptó como herramienta de análisis un programa disponible y comprobado [Ronda \(1987\)](#) y [Pereira de Almeida \(1985\)](#), que fue modificado para implementar diferentes matrices geométricas provenientes de la literatura aquí citada. Los resultados numéricos, han sido organizados secuencialmente en base a la complejidad tanto de las estructuras como de las cargas y muestran resultados bastante diferentes entre sí, y son presentados sistemáticamente. Para dirimir las dudas, los resultados de ensayos de carga crítica según [Ronda \(1987\)](#) y [Spillers et al. \(1993\)](#) en una estructura susceptible de pandeo lateral, corrobora las previsiones, cuyos resultados son presentados y confirman las observaciones conclusivas de este trabajo.

## 2 ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

En la siguiente figura se muestra los grados de libertad o desplazamientos generalizados y las cargas generalizadas.

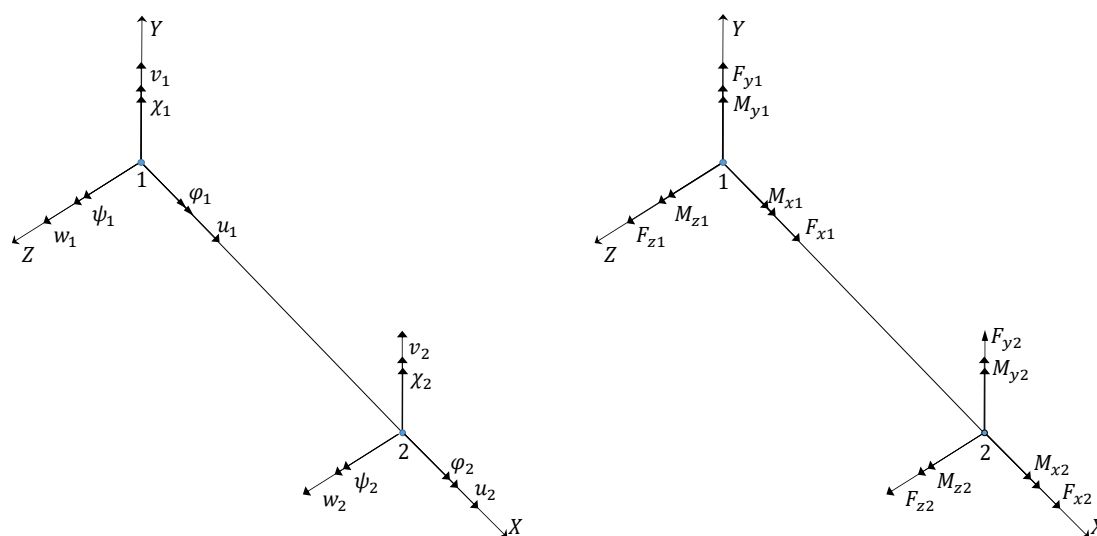


Figura 1. Elemento de Pórtico Espacial. Grados de Libertad y Esfuerzos Asociados

Donde

$$\{P\} = \{F_{x1} F_{y1} F_{z1} M_{x1} M_{y1} M_{z1} F_{x2} F_{y2} F_{z2} M_{x2} M_{y2} M_{z2}\} \quad (1)$$

es el vector de fuerzas generalizado.

Introduciendo la formulación natural de [Argyris \(1978\)](#), que consiste en encontrar un vector de fuerzas naturales que sea estáticamente equivalente al vector de cargas globales, de modo que sea posible expresar las resultantes en la sección transversal del elemento en términos de fuerzas naturales  $P_{Ni}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} N &= P_{N1}, & S_y &= -\frac{2}{l}P_{N3}, & S_z &= -\frac{2}{l}P_{N5}, \\ T &= P_{N6}, & M_y &= P_{N4} - \frac{2x}{l}P_{N5}, & M_z &= -(P_{N2} - \frac{2x}{l}P_{N3}) \end{aligned} \quad (2)$$

### 3 OBTENCION DE LAS MATRICES GEOMÉTRICAS

Limitaciones de espacio impiden presentar la formulación completa del método de la rigidez que permite obtener las tensiones actuantes en la estructura a través de un procedimiento estándar disponible tanto en la literatura como en diversos programas computacionales. La matriz geométrica  $[K_G]$ , adicionada a la matriz de rigidez elástica  $[K_E]$ , llevan a la ecuación matricial de equilibrio.

$$([K_E] + [K_G])d\{r\} = d\{f\} \quad (3)$$

donde  $d\{r\}$  y  $d\{f\}$  son los incrementos en los desplazamientos y en las fuerzas generalizadas del elemento, por lo tanto puede ser fácilmente implementada en un análisis no-lineal incremental, asociada al método de Newton-Raphson o a métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, bastando con notar que  $[K_E]$  y  $[K_G]$  deben ser reformuladas siempre que ocurran alteraciones apreciables en la geometría. En el problema de estabilidad linealizada, se admite que tales matrices son formuladas en la geometría inicial, y que  $[K_G]$  es proporcional a un determinado nivel de carga, designado por un parámetro  $c$ , de forma que la ecuación (3) se puede escribir como:

$$([K_E] + c[K_G])d\{r\} = d\{f\} \quad (4)$$

Cuando se alcanza el nivel de carga  $c_{cr}$ , la matriz del sistema se vuelve singular, pudiendo haber incrementos de desplazamientos sin incremento de las cargas, por lo tanto  $c_{cr}$  es el menor autovalor del problema de autovalor lineal generalizado

$$([K_E] + c[K_G])d\{r\} = \{0\} \quad (5)$$

Para la obtención de  $c_{cr}$ , se disponen de técnicas numéricas eficientes, como el monitoreo de términos de la diagonal en el proceso de eliminación Gaussiana, [Pereira de Almeida \(1985\)](#).

Para nuestro caso en estudio del elemento de viga o pórtico espacial, considerando rotaciones moderadas, la matriz geométrica es obtenida usualmente de la expresión de la energía de deformación asociada a las componentes cuadráticas del tensor Lagrangeano de las deformaciones. Cabe resaltar que las matrices geométricas obtenidas de esta forma, no consideran el trabajo no lineal proveniente de las cargas aplicadas, que debe ser incluido en forma de matrices adicionales, llamadas matrices de rigidez o de dirección de las cargas según [Pereira de Almeida \(1985\)](#). Por otro lado, esta afirmación implica no tomar en cuenta todas las componentes de orden superior en el tensor Lagrangeano de las deformaciones, que en algunos

casos puede provenir del uso de funciones de interpolación de orden bajo, o simplemente por desprestigiar productos de infinitésimos de orden superior, que justamente envuelven los trabajos no lineales que forman parte de una formulación consistente.

A continuación se utilizará la notación indicial asociada a la matricial con las respectivas convenciones. Los ejes de referencia en las direcciones longitudinal y transversal de la viga son  $x_i$  ( $i = 1$  a  $3$ ). Los desplazamientos respectivos son designados por  $u_i$  ( $i = 1$  a  $3$ ); las tensiones existentes en el elemento por  $T_{ij}$  y las componentes cuadráticas de las deformaciones por  $D_{ij}$ , siendo estas últimas obtenidas por la siguiente expresión.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (6)$$

La ecuación de la energía correspondiente es obtenida integrando sobre el volumen  $V$  del elemento:

$$U = \int_V T_{ij} D_{ij} dV \quad (7)$$

Los desplazamientos de un punto de la sección transversal en la dirección  $x_1$ , pueden ser calculados a partir de los desplazamientos nodales  $r$ , a través de funciones de interpolación dispuestas en vectores  $n_i(x_1, x_2, x_3)$ , como se muestra en la siguiente ecuación (el índice superior  $T$  indica transposición):

$$u_i = [n]_i^T \{r\} \quad (8)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez geométrica obtenida a través de consideraciones usuales del análisis matricial, resulta de la siguiente forma:

$$[K_G] = \int_V [n]_{k,i} T_{ij} [n]_{k,j}^T dV \quad (9)$$

Una descripción detallada de la manera de obtener esta matriz geométrica, se encuentra en la referencia [Ronda y Rosas e Silva \(1989\)](#).

En la ecuación (9), al ser efectuada la integración parcial en la sección, quedan explícitos los esfuerzos resultantes. Para el caso en estudio, nos limitamos a los esfuerzos usuales en elementos de sección llena, despreciando los esfuerzos asociados al alabeo (bimomento). De esta manera, llegamos a la expresión siguiente (suponiendo  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$  los ejes principales de la sección), en ausencia de cargas internas al elemento:

$$[K_G] = P_1 [K_G^1] + M_2 [K_G^2] + M_3 [K_G^3] + M_1 [K_G^4] + P_2 [K_G^5] + P_3 [K_G^6] \quad (10)$$

donde  $P_1$  es la fuerza axial;  $M_1$  es el momento torsor;  $M_2$  y  $M_3$  son los momentos flectores medios;  $P_2$  y  $P_3$  son las fuerzas cortantes.

Los términos explícitos de las diversas matrices se encuentran en [Pereira de Almeida \(1985\)](#), y pueden ser obtenidos de las diversas referencias citadas. En el desarrollo se buscó apenas brindar un mínimo de información que permita una descripción comparativa de los diferentes enfoques encontrados en la literatura, lo cual es realizado a continuación.

Elementos usuales en el análisis de pórticos espaciales son formulados con interpolaciones Hermitianas y Lagrangeanas. Para el caso de interpolaciones Hermitianas, el esquema tradicional usual para elementos esbeltos, utilizando 12 grados de libertad, es emplear funciones cúbicas para flexión, la rotación de flexión es obtenida por derivación de los desplazamientos transversales, y es interpolada con funciones cuadráticas. El desplazamiento axial es interpolado con funciones lineales. Siguiendo las funciones utilizadas en las diversas

formulaciones, la rotación de torsión es interpolada linealmente en los trabajos de [Argyris \(1979\)](#) y cúbicamente en los de [Bazant y El Nimeiri \(1973\)](#), [Barsoum y Gallagher \(1970\)](#) y [Yang y McGuire \(1986a\)](#). [Elias \(1986\)](#) presenta un tratamiento detallado, con matrices similares a las de [Argyris \(1979\)](#), [Yang y McGuire \(1986a\)](#) y [Yang y McGuire \(1986b\)](#). Un enfoque que facilita la consideración de cambios en la geometría es mencionado por [Bathe \(1982\)](#), tanto para elementos Hermitianos como Lagrangeanos. [Ronda \(1989\)](#), desarrolla una matriz geométrica para elementos de pórtico espacial, usando funciones de interpolación Lagrangeana lineal, independientemente para translaciones y rotaciones a través de una formulación paramétrica de la geometría y los desplazamientos, lo que evita algunos problemas observados en los elementos formulados con funciones de interpolación Hermitianas.

#### 4 CONSIDERACION DE EFECTOS EN LAS DIVERSAS FORMULACIONES

Sería de esperar que los elementos listados arriba, generasen resultados similares para cargas críticas, considerando discretizaciones que lleven a la convergencia en los resultados.

Matrices de rigidez geométrica para elementos de barra simple y viga-columna, fueron obtenidas por diversos autores considerando diversos efectos, como el efecto de la carga axial inicial [Oden \(1966\)](#), momentos flectores iniciales [Barsoum y Gallagher \(1970\)](#), torque y bimomento iniciales (medidas de rotación y alabeo de la sección) [Barsoum y Gallagher \(1970\)](#), efectos de deformación por alabeo [Bazant y El Nimeiri \(1973\)](#), consideración de la naturaleza de momentos flectores y torsos [Argyris \(1979\)](#), [Yang y McGuire \(1986a\)](#), [Yang y McGuire \(1986b\)](#) y [Oden \(1966\)](#) y la inclusión de matrices de rigidez de las cargas [Pereira de Almeida \(1985\)](#).

Un aspecto importante para una formulación coherente con la forma de aplicación de la carga, es la correcta descripción de las fuerzas nodales en el elemento a través de un vector de cargas generalizado, que lleva en cuenta la relación de dependencia de momentos quasitangenciales y semitangenciales frente a las rotaciones, es decir, que el uso de una formulación semitangencial para los momentos nodales según [Argyris \(1979\)](#), asegura esta descripción. En caso de que no se consideren, como es usual, efectos de contorno en las integrales para la obtención de la matriz geométrica, se debe hacer una corrección nodal, para garantizar que los momentos actuantes en los elementos sean semitangenciales. A pesar que dicha corrección es de fácil visualización e implementación, las justificativas presentadas en las diversas referencias a su favor, encuentran ciertas inconsistencias en sus argumentos, lo que ha generado diversas controversias.

[Barsoum y Gallagher \(1970\)](#) formulan su matriz geométrica, basándose en el método de los desplazamientos, para análisis de estabilidad de miembros sometidos a flexión. El campo de desplazamientos representa la acción del elemento en flexión simple, y son despreciadas las deformaciones debidas al cizallamiento. En la expresión de la energía potencial, en la parte correspondiente al potencial de las cargas aplicadas, son excluidos los términos de contorno en el potencial dado por torques y momentos flectores conservativos. No toman en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsos.

[Bazant y El Nimeiri \(1973\)](#), desprecian los efectos del momento torsor y las fuerzas cortantes, basándose en su deducción en un raciocinio intuitivo, aparentemente justificado, ya que las deformaciones de cizallamiento son comúnmente despreciadas en un análisis lineal de vigas y pórticos. Esta formulación no toma en cuenta la naturaleza de los momentos flectores y torsos, ni la variación de los momentos flectores a lo largo del eje del elemento, es decir que la matriz proveniente de estos autores, no contiene términos de cortante, por lo que para efectos comparativos, se desarrolló otra matriz basada en la anterior, tomando en consideración la variación del momento flector, es decir la inclusión de efectos de cizallamiento.

[Yang y McGuire \(1986a\)](#) y [Yang y McGuire \(1986b\)](#) adoptan la formulación Lagrangeana

actualizada (U.L) para el análisis no-lineal, y de la misma manera que [Argyris \(1979\)](#), llevan en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

Los autores de las referencias [Bazant y El Nimeiri \(1973\)](#), [Barsoum y Gallagher \(1970\)](#) y [Yang y McGuire \(1986a\)](#), consideran el efecto de alabeo a torsión (torsión no uniforme), y por razones de comparación, fueron descartados los grados de libertad correspondientes, quedando todas ellas de dimensión 12 x 12.

[Elias \(1986\)](#), considera las rotaciones no lineales por lo que su matriz geométrica sale con corrección automática. Esta formulación lleva en cuenta la naturaleza de los momentos flectores y torsores, y muestra que la matriz geométrica es nula para momentos semitangenciales.

[Ronda \(1989\)](#), usa una formulación paramétrica de la geometría y desplazamientos. Los elementos Lagrangeanos usan nodos internos al elemento. No es tomada en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

[Conci \(1988\)](#), deriva la matriz geométrica, asociada a desplazamientos no lineales, utilizando la formulación Lagrangeana actualizada (U.L). Considera el alabeo de torsión y la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

[Velásquez \(2015\)](#), sigue los lineamientos de [Elias \(1986\)](#) que es resultado del presente trabajo, considerando rotaciones finitas, por lo que la matriz geométrica sale con corrección nodal.

Formulaciones consideradas solo para referencia en los resultados son las provenientes de [Simo y VanQuoc \(1986\)](#), [Pacoste y Eriksson \(1995\)](#), [Pacoste y Eriksson \(1997\)](#) y [Laudiero y Zaccaria \(1983\)](#), por no tener la matriz geométrica de manera explícita.

A continuación se definirán los parámetros para el desarrollo de la matriz geométrica del presente trabajo, la cual se implementará al igual que las otras matrices todas de dimensión 12 x 12, para efectos de comparación.

## 5 ROTACIONES FINITAS

### 5.1 Introducción

Existen numerosas alternativas disponibles en la literatura para la parametrización de campos de desplazamiento de rotación para elementos de vigas y pórticos tridimensionales. Clásicamente, las provenientes de derivaciones geométricas como es el caso de los ángulos de Euler son apropiadas para la aplicación en dinámica de cuerpos, pero técnicas mucho más apropiadas para Elementos Finitos recientemente utilizadas y aplicadas en la literatura, incluyen rotaciones semitangenciales, vectores de rotación conforme, cuaterniones, y los denominados parámetros de Euler-Rodrigues.

Desde un punto de vista numérico, una particular selección de parámetros utilizados para la caracterización del campo de desplazamientos rotacionales, tiene una particular y directa inferencia en las propiedades de simetría de los operadores resultantes de la rigidez tangente. Adoptando una aproximación por Elementos Finitos Euleriana, con parámetros de rotación, tienen el significado tradicional de transformaciones ortogonales no conmutativas en el espacio Euclidiano. La forma variacional débil consistentemente linealizada, exhibe generalmente una matriz de rigidez geométrica no simétrica, aún para cargas conservativas, según lo apuntado por [Simo y VanQuoc \(1986\)](#), [Pacoste y Eriksson \(1995\)](#) y [Pacoste y Eriksson \(1997\)](#).

Ya que la descripción de la configuración de un elemento de viga o pórtico en el espacio está definida por un campo vectorial que define la posición de los puntos en la línea de referencia (centroidal), así como un campo vectorial (director) que da la orientación de las fibras materiales; la parametrización de este último campo utilizando grados de libertad nodal rotacionales, es complicado por el hecho de que rotaciones finitas en el espacio no pueden ser



tratadas como simples vectores, debido a la no conmutatividad en las rotaciones. En base a esto, se debe optar por la adopción de los parámetros de rotación que pueden ser; e.g. ángulos de Euler o Euler modificados, parámetros generalizados de Euler o de Rodrigues, cosenos directores, rotaciones roll-pitch-yaw, rotaciones semitangenciales y otras de acuerdo a [Cardona y Gerardin \(1988\)](#).

Para aplicaciones prácticas, autores como [Kuo et al. \(1993\)](#) sugieren que el uso de coordenadas generalizadas rotacionales de Rodrigues son las más apropiadas para aplicaciones de Elementos Finitos. El uso de estos parámetros se ilustra a continuación en el contexto de vectores de rotación de cuerpo rígido, según [Velásquez \(2015\)](#).

### 5.2 Parámetros de Rodrigues

Debido a limitaciones de espacio, solo se expondrán los conceptos y fórmulas para el desarrollo de una teoría no lineal de deformaciones.

El vector  $\vec{\varphi}$  y tres escalares  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  y  $\varphi_z$  denominados parámetros de Rodrigues, relacionan la rotación de un sistema  $\mathbf{m}$  en relación a otro fijo  $\mathbf{n}$ , definiéndose

$$\vec{\varphi} = \tan \frac{\psi}{2} \vec{\lambda} \tag{11}$$

de modo que

$$\varphi_i = \varphi \cdot v_i = \varphi \cdot v'_i \tag{12}$$

donde  $(\cdot)$  representa el producto escalar y  $v_i$  y  $v'_i$  son vectores dextrógiros fijos en  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$ .

La matriz de cosenos directores se expresa como:

$$D_{ij} = v_i \cdot v_j \tag{13}$$

Por lo tanto cada  $\varphi_i$  puede escribirse como:

$$\varphi_i = \frac{D_{kj} - D_{jk}}{1 + D_{11} + D_{22} + D_{33}} \tag{14}$$

La rotación  $\psi \vec{\lambda}$  que corresponde al ángulo  $\psi$  en torno de  $\vec{\lambda}$  se denomina vector de rotación de Rodrigues (ver [Figura 2](#)) y tiene la propiedad de tener las mismas componentes en relación

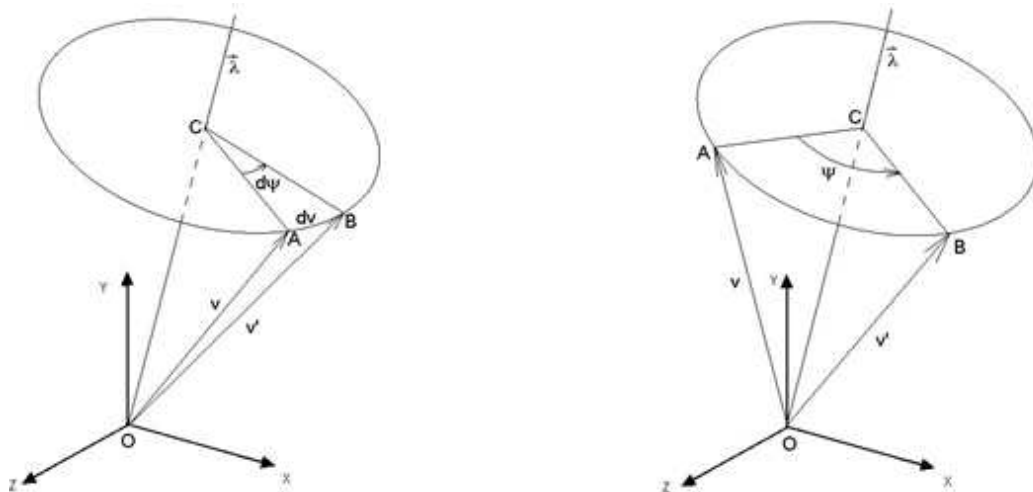


Figura 2. Rotaciones infinitesimales y Finitas

a  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$ . De acuerdo a esto,  $\vec{v}$  es rotado un ángulo  $\psi$  y se transforma en  $\vec{v}'$ . Para poder expresar  $\vec{v}'$  en función de  $\vec{v}$ ,  $\psi$  y  $\vec{\lambda}$ , se define el vector de rotación modificado  $\vec{\phi}$  como

$$\vec{\phi} = 2 \tan \frac{\psi}{2} \vec{\lambda} \quad (15)$$

Se puede expresar el vector girado en función del original según Kane et al. (1983), como:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \times \vec{\phi} \quad (16)$$

donde

$$\vec{u} = \cos^2 \frac{\psi}{2} (\vec{v} - \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{\phi}) = \cos^2 \frac{\psi}{2} (\vec{v}' + \frac{1}{2} \vec{v}' \times \vec{\phi}) \quad (17)$$

Desde el eje de rotación,  $\vec{\phi}$  tiene las mismas componentes en  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$ . Con esto se puede escribir la (16) como

$$\vec{v}' = [R] \vec{v} \quad (18)$$

donde

$$[R] = [I] + \cos^2 \frac{\psi}{2} (\vec{\phi} + \frac{1}{2} \vec{\phi} \vec{\phi}) \quad (19)$$

Finalmente,  $[R]$  puede expresarse como

$$[R] = [I] + \frac{4}{4+\phi^2} \begin{bmatrix} 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{4+\phi^2} \begin{bmatrix} -(\phi_2^2 + \phi_3^2) & \phi_1 \phi_2 & \phi_1 \phi_3 \\ \phi_2 \phi_1 & -(\phi_1^2 + \phi_3^2) & \phi_2 \phi_3 \\ \phi_3 \phi_1 & \phi_3 \phi_1 & -(\phi_1^2 + \phi_2^2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

con  $\phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^{\frac{1}{2}}$  que denota la magnitud del vector de rotación  $\vec{\phi}$ .

Varias aproximaciones para  $[R]$  se obtienen de la expresión (20), como la aproximación de primer orden, usual para representaciones de rotaciones infinitesimales, con solo los dos primeros términos, y la aproximación de segundo orden, usual en rotaciones finitas, usa la expresión completa, similar a la expuesta en Argyris (1981a) y Kane et al. (1983).

Si  $\vec{\phi}$  es el vector de rotación de  $\vec{v}$  en  $\vec{v}'$  y  $\delta\vec{\phi}$  es la variación infinitesimal, el movimiento infinitesimal de cuerpo rígido  $\delta\vec{v}'$  de  $\vec{v}'$  posee un vector  $\delta\vec{\omega}$  de modo que cumple con:

$$\delta\vec{v}' = -\vec{v}' \times \delta\vec{\omega} \quad (21)$$

Dados dos vectores de rotación  $\vec{\phi}$  y  $\vec{\phi}^*$ , que rotan  $\vec{v}$  en  $\vec{v}'$  y  $\vec{v}^*$ . El objetivo es encontrar el vector de rotación  $\vec{\phi}_r$  que rota  $\vec{v}'$  en  $\vec{v}^*$ .

$$\begin{aligned} \vec{v}' - \vec{v} &= -\frac{1}{2} (\vec{v}' + \vec{v}) \times \vec{\phi} \\ \vec{v}^* - \vec{v} &= -\frac{1}{2} (\vec{v}^* + \vec{v}) \times \vec{\phi}^* \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora hay que encontrar  $\vec{\phi}_r$  de modo tal que

$$\vec{v}^* - \vec{v}' = -\frac{1}{2} (\vec{v}^* + \vec{v}') \times \vec{\phi}_r \quad (23)$$

Finalmente, el vector de rotación relativa se expresa como:



$$\vec{\phi}_r = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \vec{\phi}^* \cdot \vec{\phi}} (\vec{\phi}^* - \vec{\phi} - \frac{1}{2} \vec{\phi}^* \times \vec{\phi}) \tag{24}$$

### 5.3 Teoría de Deformaciones

#### 5.3.1 Desplazamientos

Considerando un elemento cuya orientación inicial sea definida en relación a un sistema de referencia inicial  $\vec{v}$ . En el estado inicial, la componente  $v_x$  se desarrolla a lo largo del eje del elemento, mientras que las componentes  $v_y$  y  $v_z$  tienen su orientación definida sobre la sección transversal.

Asumiendo que La sección transversal a una distancia  $x$  se desplaza como un cuerpo rígido, los desplazamientos de esta sección transversal pueden ser descritos a través de un vector de translación  $\vec{u}$  y un vector de rotación  $\vec{\phi}$  según [Elias \(1986\)](#).

Según se muestra en la siguiente [Figura 3](#), el vector  $\vec{u}$  está inicialmente ligado al punto material de la sección a una distancia  $x$  sobre el eje  $x$ . A este punto se lo denomina punto de referencia inicial.  $\vec{\phi}$  es el vector de rotación modificado definido en la ecuación (15). El estado deformado del elemento, puede ser descrito por estos dos parámetros  $\vec{u}$  y  $\vec{\phi}$  en función de  $x$ . La terna  $\vec{v}'$  coincide con  $\vec{v}$  en el estado inicial. La determinación de la orientación de  $\vec{v}'$  en referencia de  $\vec{v}$  fue definida anteriormente en la ecuación (18). Los desplazamientos escalares en  $x$  son definidos por sus componentes en  $\vec{v}$ .

$$\langle \vec{u} \ \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{u}^T \ \vec{v} \ \vec{\phi}^T \ \vec{v} \rangle \tag{25}$$

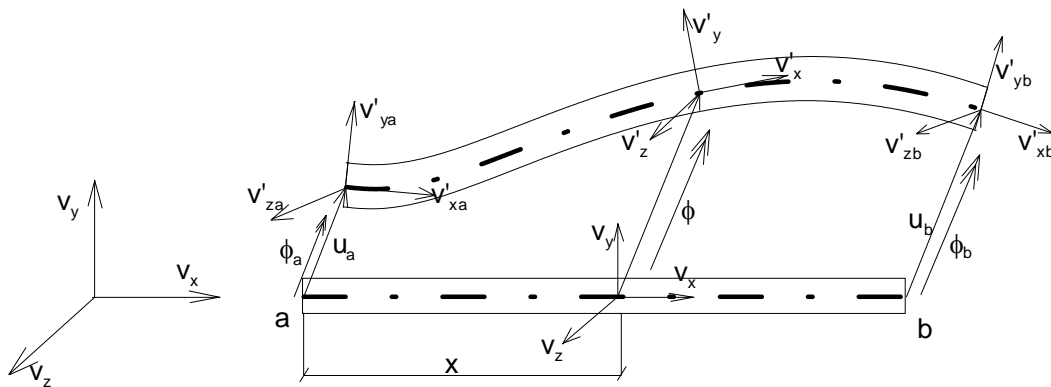


Figura 3. Sistema de referencia y desplazamientos

Como fue mencionado anteriormente,  $\vec{\phi}$  tiene las mismas componentes en  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$ .

Los desplazamientos de las secciones extremas a y b, pueden ser definidos como  $\langle \vec{u}_a \ \vec{\phi}_a \ \vec{u}_b \ \vec{\phi}_b \rangle$ . Las ternas ligadas a a y b son  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$ , siendo la siguiente ecuación la correspondiente a la transformación entre los sistemas

$$\langle \vec{v}'_a \ \vec{v}'_b \rangle = \langle \vec{R}_a \ \vec{v} \ \vec{R}_b \ \vec{v} \rangle \tag{26}$$

donde  $\vec{R}_a$  y  $\vec{R}_b$  se obtienen aplicando la ecuación (19) o (20).

Las deformaciones del tipo cantilever son definidas como los desplazamientos relativos a la terna  $\vec{v}'_a$  ligada a la sección a, y las deformaciones definidas en la extremidad b se denominan deformaciones del elemento.

El desplazamiento de cuerpo rígido de la extremidad b relativa a  $\vec{v}'_a$  (ver [Figura 4](#)) es

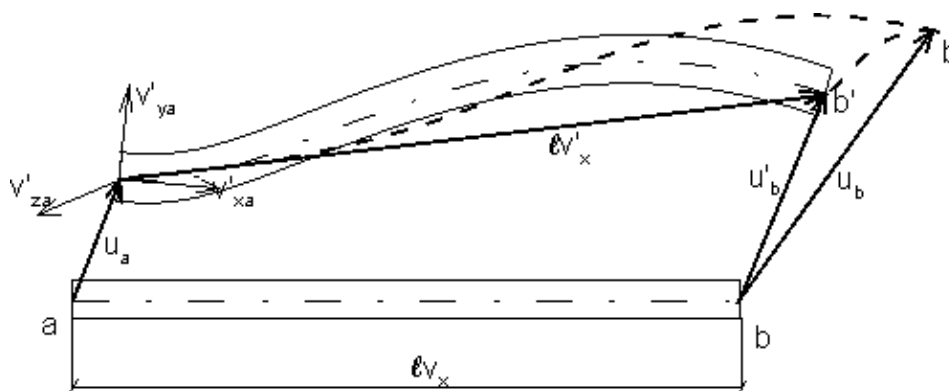


Figura 4. Desplazamientos de las secciones extremas

descrito por una translación relativa  $\vec{u}_r$  y una rotación relativa  $\vec{\phi}_r$  de acuerdo a [Elias \(1986\)](#), donde  $\vec{u}_r$  es igual a  $\vec{u}_b - \vec{u}'_b$  donde  $\vec{u}'_b$  es el desplazamiento del punto b' fijo en  $\vec{v}'_a$  y que es coincidente con b en el estado inicial. El vector posición del punto b' en el estado inicial b es  $\vec{l}v_x$ , luego hay una translación  $\vec{u}_a$  y una rotación hasta llevar el punto b a b', quedando el vector posición en  $\vec{l}v'_{xa}$  según se muestra en la [Figura 4](#), por lo tanto se tiene el vector de translación relativa

$$\vec{u}_r = \vec{u}_b - \vec{u}_a - l(\vec{v}'_{xa} - \vec{v}_x) \quad (27)$$

y el vector la rotación relativa

$$\vec{\phi}_r = \frac{\vec{u}_r - \frac{1}{2}\vec{\phi}_b \times \vec{\phi}_a}{1 + \frac{1}{4}\vec{\phi}_a \cdot \vec{\phi}_b} \quad (28)$$

### 5.3.2 Deformaciones

Considerando un elemento diferencial de pórtico de longitud  $dx$ , podemos tomar a la extremidad a como el punto  $x$  y a la extremidad b como el punto  $x + dx$ . De esta manera podemos llamar  $\vec{u}_a = \vec{u}$ ,  $\vec{u}_b = \vec{u} + d\vec{u}$ ,  $\vec{\phi}_a = \vec{\phi}$ ,  $\vec{\phi}_b = \vec{\phi} + d\vec{\phi}$ . Con esto  $\vec{u}_r$  y  $\vec{\phi}_r$  se vuelven infinitesimales, iguales a  $\vec{\epsilon} dx$  y  $\vec{\chi} dx$ , por lo tanto los vectores de deformación son:

$$\vec{\epsilon} = u_{,x} + v_{,x} - v'_{,x} \quad (29)$$

$$\vec{\chi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\phi^2} (\phi_{,x} + \frac{1}{2}\vec{\phi} \times \phi_{,x}) \quad (30)$$

Las componentes escalares de deformación son definidas como componentes de los vectores de deformación en  $\vec{v}'$ , luego

$$\langle \vec{\epsilon} \vec{\chi} \rangle = \langle \epsilon^T \vec{v}' \quad \chi^T \vec{v}' \rangle \quad (31)$$

La interpretación cinemática de  $\vec{\chi}$  es que  $\vec{\chi} dx$  es un vector de rotación infinitesimal del movimiento de  $v'$  a lo largo de la línea media deformada de  $x$  a  $x + dx$  por lo que el vector  $d\vec{v}' = -\vec{v}' \times \vec{\chi} dx$ , luego

$$\vec{v}'_{,x} = -\vec{v}' \times \vec{\chi} = \vec{\chi} \times \vec{v}' \quad (32)$$

Las relaciones de translación y rotación relativa (27) y (28) son simplificadas con las hipótesis de  $u_{x,x} \ll 1$ , por lo tanto, los vectores de deformación se pueden escribir como:

$$\varepsilon_x = u_{x,x} + \phi_z(u_{y,x} - \frac{1}{2}\phi_z) - \phi_y(u_{z,x} + \frac{1}{2}\phi_y) \quad (33)$$

$$\varepsilon_y = u_{y,x} - \phi_z + \phi_x(u_{z,x} + \frac{1}{2}\phi_y) \quad (34)$$

$$\varepsilon_z = u_{z,x} + \phi_y - \phi_x(u_{y,x} + \frac{1}{2}\phi_z) \quad (35)$$

$$\chi_x = \phi_{x,x} + \frac{1}{2}(\phi_z \phi_{y,x} - \phi_y \phi_{z,x}) \quad (36)$$

$$\chi_y = \phi_{y,x} + \frac{1}{2}(\phi_x \phi_{z,x} - \phi_z \phi_{x,x}) \quad (37)$$

$$\chi_z = \phi_{z,x} + \frac{1}{2}(\phi_y \phi_{x,x} - \phi_x \phi_{y,x}) \quad (38)$$

De acuerdo con las hipótesis iniciales  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$  y  $\phi_x^2 \ll 1$ , de las ecuaciones (34) y (35) se obtiene

$$\phi_y = -u_{z,x} - \phi_x u_{y,x} + \frac{1}{2}\phi_x \phi_z \quad (39)$$

$$\phi_z = u_{y,x} - \phi_x u_{z,x} + \frac{1}{2}\phi_x \phi_y \quad (40)$$

#### 5.4 Matriz de Corrección Nodal

En la formulación de la matriz de rigidez del elemento, además de la adecuada elección de los desplazamientos generalizados, es necesaria la correcta representación de los desplazamientos  $u_x, u_y, u_z$  y la rotación  $\phi_x$ . Otro factor a ser llevado en cuenta es la continuidad cinemática en los nudos, para estructuras constituidas por elementos que forman ángulo según lo citado por Elias (1986), Bazant y El Nimeiri (1973) y Kuo et al. (1993).

Cuando se utilizan derivadas de desplazamientos  $u_{y,x}, u_{z,x}$  como rotaciones generalizadas, una transformación no lineal puede ser realizada para asegurar esa continuidad. Las rotaciones generalizadas aquí utilizadas en este contexto, pueden ser relacionadas con las rotaciones finitas de Rodrigues  $\vec{\phi}$  a través de las siguientes expresiones.

$$\theta_x = \phi_x \quad (41)$$

$$\theta_y = -u_{z,x} = \phi_y - \frac{1}{2}\phi_x \phi_z \quad (42)$$

$$\theta_z = -u_{y,x} = \phi_z + \frac{1}{2}\phi_x \phi_y \quad (43)$$

En función de esto, la variación en las Rotaciones Finitas virtuales de Rodrigues, puede ser relacionada con la variación en las Rotaciones Generalizadas a través de la siguiente expresión:

$$d\theta_x = \delta\phi_x \quad (44)$$

$$d\theta_y = -u_{z,x} = d\phi_y - \frac{1}{2}d(\phi_x \phi_z) = d\phi_y - \frac{1}{2}\phi_z \delta\phi_x - \frac{1}{2}\phi_x d\phi_z \quad (45)$$

$$d\theta_z = d\phi_z + \frac{1}{2}d(\phi_x \phi_y) = d\phi_z + \frac{1}{2}\phi_y \delta\phi_x + \frac{1}{2}\phi_x d\phi_y \quad (46)$$

En forma matricial se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\phi_z & 1 & -\frac{1}{2}\phi_x \\ \frac{1}{2}\phi_y & \frac{1}{2}\phi_x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Utilizando la notación para los grados de libertad rotacionales, esta última expresión se puede expresar como:

$$\begin{Bmatrix} d\varphi \\ d\chi \\ d\psi \end{Bmatrix} = [\Lambda] \begin{Bmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Considerando que  $\overrightarrow{d\phi}$  es diferencial total, no necesariamente  $\overrightarrow{d\phi}$  lo sea, por lo que se puede resumir la última relación como:

$$\overrightarrow{\delta\phi} = [\Lambda]\overrightarrow{\delta\phi} \quad (49)$$

Ya que el método de generación de fuerzas y momentos es importante en la teoría no lineal de la estabilidad, vamos a concentrarnos en el método de generación de momentos.

Sea  $\overrightarrow{M}$  el momento entendido como una función vectorial de los desplazamientos generalizados  $\vec{u}$  y  $\vec{\phi}$ , según Ronda (1987).

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}(u, v, w, \varphi, \chi, \psi) = \overrightarrow{M}(\vec{u}, \vec{\phi}) \quad (50)$$

Si consideramos pequeños desplazamientos y rotaciones, debido a esta restricción, podemos representar a  $\overrightarrow{M}$  como una función lineal de  $\vec{\phi}$ .

Si suponemos que los incrementos  $\overrightarrow{M}_\Delta$  del momento  $\overrightarrow{M}$  dependen linealmente de  $\overrightarrow{M}$ , podemos escribir la siguiente relación lineal:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{M}_\Delta \quad (51)$$

Donde

$$\overrightarrow{M}_o = \langle M_{ox} \quad M_{oy} \quad M_{oz} \rangle \quad (52)$$

es el vector momento en la posición inicial para  $\vec{\phi} = 0$ , y

$$\overrightarrow{M}_\Delta = \langle M_{ox}[\lambda_x] + M_{oy}[\lambda_y] + M_{oz}[\lambda_z] \rangle \vec{\phi} \quad (53)$$

es el vector momento incremental.

Las matrices  $[\lambda_i]$  ( $i = x' y' z'$ ) de orden 3 x 3 dependen exclusivamente de la naturaleza de los momentos y no dependen de  $\overrightarrow{M}_o$  y  $\vec{\phi}$ . Podemos decir que tanto las componentes de  $\overrightarrow{M}_o$  y  $\overrightarrow{M}_\Delta$  deben ser entendidas como torques en torno de ejes fijos al sistema de referencia.

Debido a la dependencia lineal entre  $\overrightarrow{M}$  y  $\vec{\phi}$ , se generan términos de segundo orden en las rotaciones cuando se considera la expresión del trabajo virtual de los momentos sobre las rotaciones según Ronda (1987), que determinan términos de la matriz de rigidez geométrica. Vamos entonces a proceder a la determinación de las matrices  $[\lambda_i]$ .

$$W = \frac{1}{2} \vec{\phi}^T \overrightarrow{M} = \frac{1}{2} [\vec{\phi}^T \overrightarrow{M}_o + \vec{\phi}^T (M_{ox}[\lambda_x] + M_{oy}[\lambda_y] + M_{oz}[\lambda_z]) \vec{\phi}] \quad (54)$$

Volviendo a la relación (51), si denominamos  $\overrightarrow{M}$  y  $\overrightarrow{M}_\phi$  a los momentos generalizados correspondientes a rotaciones generalizadas y rotaciones finitas, la invariancia del trabajo virtual implica que:

$$\langle M \rangle \{ \delta\varphi \} = \langle M_\phi \rangle \{ \delta\phi \} \quad (55)$$

Rotaciones incrementales pueden ser escritas de la forma como lo expresa la relación (49) luego, la relación entre momentos generalizados  $\vec{M}$  y  $\vec{M}_\phi$  puede ser obtenida a partir de la relación anterior a través de la ley de contragradiante como:

$$\{M_\phi\} = [\Lambda]^T \{M\} \quad (56)$$

cuya forma diferencial ofrece las relaciones entre los momentos incrementales

$$\{\delta M_\phi\} = [\Lambda]^T \{\delta M\} + \delta[\Lambda]^T \{M\} \quad (57)$$

Si en esta última expresión, sustituimos los vectores  $\{\delta M_\phi\}$  y  $\{\delta M\}$  por

$$\{\delta M_\phi\} = [K_\phi] \{\delta \phi\} \quad (58)$$

y

$$\{\delta M\} = [K] \{\delta \phi\} \quad (59)$$

con la ecuación (49), se tiene:

$$[K_\phi] \{\delta \phi\} = [\Lambda]^T [K] [\Lambda] \{\delta \phi\} + \delta[\Lambda]^T \{M\} \quad (60)$$

en la que

$$\delta[\Lambda]^T \{M\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\delta\phi_z & \delta\phi_y \\ 0 & 0 & \delta\phi_x \\ 0 & -\delta\phi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (61)$$

que puesto de otra forma

$$\delta[\Lambda]^T \{M\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & M_z & -M_y \\ M_z & 0 & 0 \\ -M_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Esta última relación la podemos escribir de manera expandida como:

$$\begin{aligned} \delta[\Lambda]^T \{M\} &= M_x \frac{1}{2} [0] \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} + M_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} + \\ &M_z \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

Si en la ecuación (61), al segundo miembro lo llamamos

$$\delta[\Lambda]^T \{M\} = \frac{1}{2} [C_{\chi\psi}^i] \{\delta \phi\} \quad (64)$$

se denomina a  $[C_{\chi\psi}^i]$  matriz de corrección nodal, con  $i = 1, 2$  los nudos inicial y final. Finalmente si relacionamos la (51) y (53) con la ecuación (63), el momento incremental queda:

$$\begin{aligned}
 [M_{\Delta}] &= (M_{ox}[\lambda_x] + M_{oy}[\lambda_y] + M_{oz}[\lambda_z])\vec{\varphi} = M_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} + \\
 &M_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} + M_z \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_x \\ \delta\phi_y \\ \delta\phi_z \end{Bmatrix} \quad (65)
 \end{aligned}$$

de donde vemos que

$$\begin{aligned}
 [\lambda_x] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\lambda_y] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\lambda_z] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)
 \end{aligned}$$

Como puede notarse, las matrices  $[\lambda_i]$  son simétricas, como era de esperar.

Finalmente la matriz de corrección que deberá adicionarse a la matriz de rigidez geométrica cuya expresión completa está basada en los parámetros de Rodríguez, se da a continuación en la siguiente [Tabla 1](#).

$$[C_{\chi\psi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabla 1. Matriz de corrección nodal

con

$$a_1 = \frac{1}{2}M_z^1; \quad b_1 = \frac{1}{2}M_y^1; \quad a_2 = \frac{1}{2}M_z^2; \quad b_2 = \frac{1}{2}M_y^2 \quad (67)$$

en la que los superescritos 1 y 2 indican los nudos inicial final del elemento, siendo

$$M_y^1 = -(P_{N4} + P_{N5}), \quad M_z^1 = (P_{N2} + P_{N3}), \quad M_y^2 = (P_{N4} - P_{N5}), \quad M_z^2 = (P_{N3} - P_{N2}) \quad (68)$$

En la **Tabla 2**, oriunda de la referencia **Velásquez (2015)** se muestra la matriz de rigidez geométrica asociada a los esfuerzos y es similar a la encontrada en **Ronda et. al (2002)**, habiéndose mostrado efectiva para seguimientos de trayectorias no lineales pre y post críticas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$\frac{2}{L^2} P_{N5}$					$-\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N5}$			
	$\frac{6}{5L} P_{N1}$		$-\frac{1}{L} (P_{N4} - P_{N5})$	$\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$\frac{6}{5L} P_{N1}$		$\frac{1}{L} (P_{N4} - P_{N5})$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$
		$\frac{6}{5L} P_{N1}$	$\frac{1}{L} (P_{N2} + P_{N3})$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{L} P_{N1}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N5}$		$-\frac{1}{L} (P_{N2} + P_{N3})$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$
			$\frac{L_x}{AL} P_{N1}$	$-\frac{1}{2} P_{N2} - \frac{1}{6} P_{N3}$	$-\frac{1}{2} P_{N4} - \frac{1}{6} P_{N5}$		$\frac{1}{L} (P_{N4} + P_{N5})$	$-\frac{1}{L} (P_{N2} + P_{N3})$	$-\frac{L_x}{AL} P_{N1}$	$-\frac{1}{3} P_{N3}$	$-\frac{1}{3} P_{N5}$
				$\frac{2L}{15} P_{N1}$			$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{3} P_{N3}$	$-\frac{L}{30} P_{N3}$	$\frac{1}{2} P_{N6}$
					$\frac{2L}{15} P_{N1}$		$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$-\frac{1}{3} P_{N5}$	$-\frac{1}{2} P_{N6}$	$\frac{L}{30} P_{N1}$
							$\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$\frac{2}{L^2} P_{N5}$			
							$\frac{6}{5L} P_{N1}$		$-\frac{1}{L} (P_{N4} - P_{N5})$	$\frac{1}{L} P_{N6}$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$
								$\frac{6}{5L} P_{N1}$	$\frac{1}{L} (P_{N2} - P_{N3})$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$\frac{1}{L} P_{N6}$
									$\frac{L_x}{AL} P_{N1}$	$\frac{1}{2} P_{N2} - \frac{1}{6} P_{N3}$	$\frac{1}{2} P_{N4} - \frac{1}{6} P_{N5}$
										$\frac{2L}{15} P_{N1}$	
											$\frac{2L}{15} P_{N1}$

**SIMÉTRICA**

Tabla 2. Matriz de Rigidez Geométrica Asociada a los Esfuerzos



El significado de  $P_{N1}$  a  $P_{N6}$  se define como:

$$\begin{aligned} P_{N1} &= \frac{1}{2}(F_{xB} - F_{xA}), & P_{N2} &= -\frac{1}{2}(M_{zB} - M_{zA}), & P_{N3} &= \frac{1}{2}(M_{zB} + M_{zA}) \\ P_{N4} &= \frac{1}{2}(M_{yB} - M_{yA}), & P_{N5} &= -\frac{1}{2}(M_{yB} + M_{yA}), & P_{N6} &= \frac{1}{2}(M_{xB} - M_{xA}) \end{aligned} \quad (69)$$

## 6 EJEMPLOS

Matrices geométricas explícitas han sido debidamente implementadas en un programa computacional, verificando la consistencia con las componentes de la matriz de rigidez elástica, obtenida con funciones de interpolación Hermitianas y utilizada para todas las comprobaciones.

La notación utilizada, para diferenciar el origen de las matrices, es como sigue:

$[K_G^{SS}]$  y  $[K_G^{SQ}]$  son oriundas de Velásquez (2015), en la que los superescritos SS y SQ indican matrices con y sin corrección nodal

$[K_G^Q]_{c.c.}$ ,  $[K_G^Q]_{s.c.}$ ,  $[K_G^S]_{s.c.}$ ,  $[K_G^S]_{c.c.}$  oriundas de la referencia Argyris (1979), donde el superescrito Q indica matriz sin corrección nodal y S indica matriz con corrección nodal y los subíndices c.c. y s.c. indican la consideración o no del efecto de cizallamiento.

$[K_{GB}]$  y  $[K_{GB}]_M$  oriundas de la referencia Bazant (1979), donde la segunda considera la variación de momentos flectores, o sea consideración de efectos de cortante.

$[K_{GG}]$  oriunda de Barsoum y Gallagher (1970).

$[K_{GY}^{SS}]$  y  $[K_{GY}^{SQ}]$  oriundas de Yang y McGuire (1986a) y Yang y McGuire (1986b), en la que el superescrito SS indica matriz con corrección nodal y SQ sin corrección nodal.

$[K_G]_{BL}$  oriunda de la referencia Ronda (1987), donde se obtuvo una matriz geométrica con funciones de interpolación Lagrangeana lineal.

$[K_{GA}^{SS}]$  y  $[K_{GA}^{SQ}]$  oriundas de la referencia de Conci (1988), en la que los superescritos SS indica matriz con corrección nodal y SQ indica matriz sin corrección nodal.

En ejemplos donde no se tiene la forma explícita de la matriz geométrica pero si el resultado, la referencia será etiquetada en la columna correspondiente para su identificación bibliográfica.

### 6.1 Viga cantiléver en flexión pura

Un ejemplo en el que no se define la naturaleza de generación del momento. Para este caso según Ziegler (1977), el momento es de tipo semitangencial, con  $\alpha = 1$  en la expresión

analítica de carga crítica,  $M_{cr} = \frac{\pi \sqrt{EI_y G I_x}}{\alpha l^2} = 622.2099 \text{ N} \cdot \text{mm}$

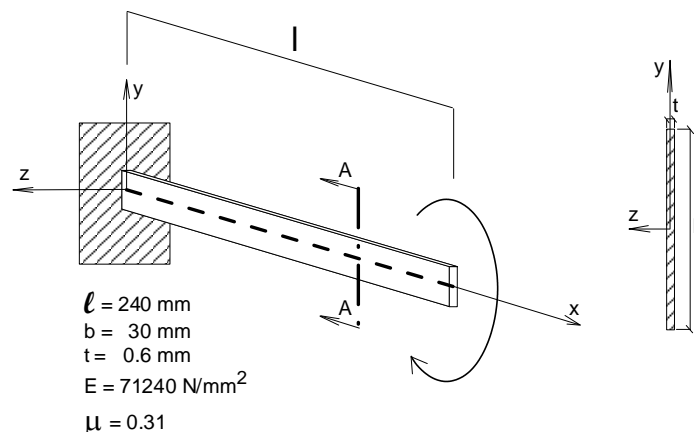


Figura 5. Viga cantiléver con momento flector en su extremo libre

La [Tabla 3](#), muestra los resultados numéricos para una discretización de 15 elementos.

$[K_G]$	$M_{cr}$ [N.mm]
$[K_G^{SQ}]$	311.2870
$[K_G^{SS}]$	623.0160
$[K_G^Q]_{c.c.}$	311.2870
$[K_G^S]_{c.c.}$	623.0160
$[K_G^Q]_{s.c.}$	311.2870
$[K_G^S]_{s.c.}$	623.0160
$[K_{GB}]$	311.2870
$[K_{GB}]_M$	311.2870
$[K_{GG}]$	311.2870
$[K_{GY}^{SQ}]$	311.2870
$[K_{GY}^{SS}]$	623.0160
$[K_G]_{BL}$	311.2870
$[K_{GA}^{SQ}]$	311.2950
$[K_{GA}^{SS}]$	623.0000

Tabla 3. Carga crítica para viga en flexión pura.

## 6.2 Viga cantilever con carga transversal

Es un problema que concierne al pandeo lateral de una viga cantiléver sujeta a una carga transversal  $P$  conservativa en su extremo libre. Se asume que la carga permanece adosada al punto de aplicación dejando la sección transversal girar libremente.

Este ejemplo a pesar de ser básico, puede llevar a conclusiones erróneas sobre la adecuación de matrices geométricas, ya que pasan desapercibidas deficiencias que serán mostradas en ejemplos más complejos. La matriz geométrica obtenida a través de un esquema de interpolación Lagrangeano lineal [Ronda \(1989\)](#), ha dado resultados consistentes utilizando una discretización razonable.

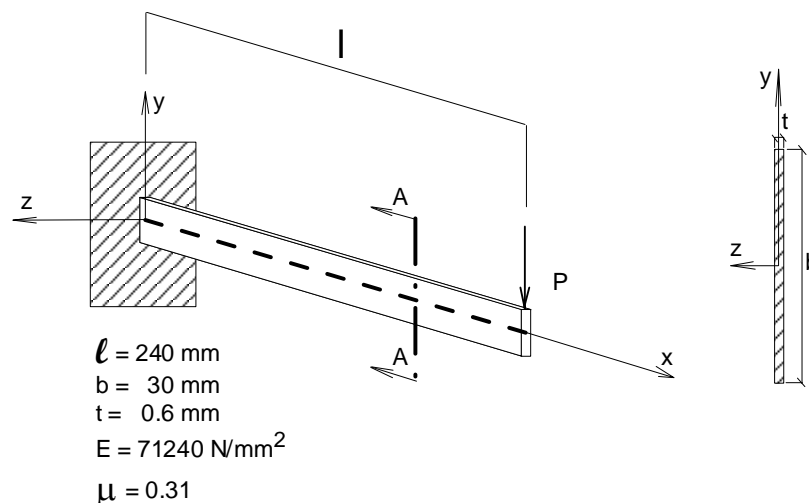


Figura 6. Viga cantiléver con momento flector en su extremo libre

El resultado analítico proviene de [Timoshenko \(1961\)](#).

$$P_{cr} = \frac{4.013}{l^2} \sqrt{EI_y GI_x} = 3,3112 \text{ N} \tag{70}$$

La siguiente [Tabla 4](#), muestra los resultados obtenidos de la implementación de las diversas matrices geométricas, utilizando una discretización de 15 elementos.

$[K_G]$	$P_{cr}$ [N]
$[K_G^{SQ}]$	3.316
$[K_G^{SS}]$	3.316
$[K_G^Q]_{c.c.}$	3.316
$[K_G^S]_{c.c.}$	3.316
$[K_G^Q]_{s.c.}$	3.316
$[K_G^S]_{s.c.}$	6.647
$[K_{GB}]$	3.312
$[K_{GB}]_M$	3.316
$[K_{GG}]$	3.312
$[K_{GY}^{SQ}]$	3.312
$[K_{GY}^{SS}]$	3.312
$[K_G]_{BL}$	3.319
$[K_{GA}^{SQ}]$	3.329
$[K_{GA}^{SS}]$	3.329

Tabla 4. Carga crítica para viga con carga transversal

### 6.3 Viga cantiléver con momento flector autoequilibrado

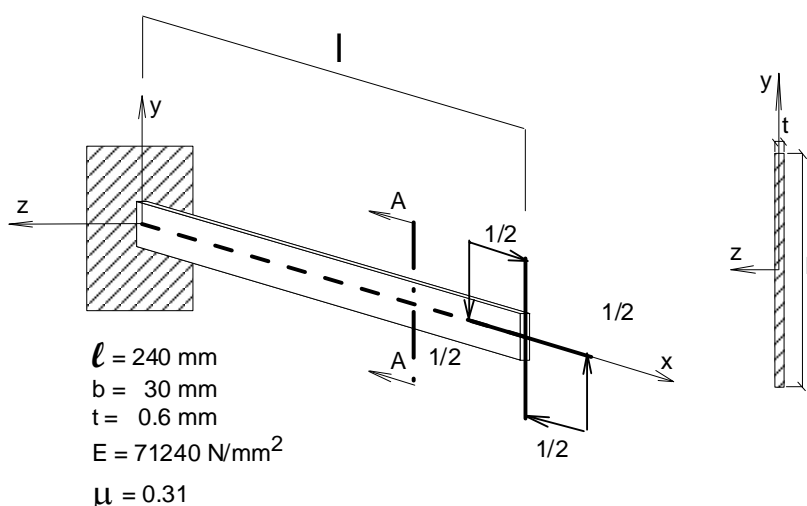


Figura 7. Viga cantiléver con momento flector autoequilibrado en su extremo libre

El momento crítico analítico según [Ronda \(1987\)](#) es

$$M_{cr} = \frac{2}{L} \sqrt{E I_y G I_x} \tag{71}$$

$$M_{cr} = 396.0695 [N \cdot mm]$$

La [Tabla 5](#), muestra los resultados utilizando una discretización de 15 elementos.

$[K_G]$	$M_{cr} [N.mm]$
$[K_G^{SQ}]$	198.008
$[K_G^{SS}]$	395.674
$[K_G^Q]_{c.c.}$	198.008
$[K_G^S]_{c.c.}$	395.674
$[K_G^Q]_{s.c.}$	24544.400
$[K_G^S]_{s.c.}$	30870.400
$[K_{GB}]$	24544.400
$[K_{GB}]_M$	24544.400
$[K_{GG}]$	17197.500
$[K_{GY}^{SQ}]$	198.008
$[K_{GY}^{SS}]$	623.0160
$[K_G]_{BL}$	198.008
$[K_{GA}^{SQ}]$	197.289
$[K_{GA}^{SS}]$	394.174

Tabla 5. Carga crítica para viga con momento flector autoequilibrado.

#### 6.4 Pórtico Espacial

El presente ejemplo, a pesar de ser bastante simple, es muy divulgado en la literatura, por lo que se va a utilizar para mostrar la eficiencia de la formulación propuesta en este trabajo, frente a otras formulaciones que utilizan diversos esquemas y enfoques.

Adicionalmente a las matrices utilizadas en los ejemplos anteriores, las siguientes citas de autores son incluidas en la tabla de resultados:

[*ELIAS*] resultado obtenido de la referencia de [Elias \(1986\)](#), donde el autor resuelve analíticamente utilizando rotaciones no lineales, con lo cual no necesita matriz de corrección nodal. No presenta la forma explícita de la matriz geométrica.

[*FLDZ*] resultado obtenido de la referencia de [Laudiero y Zaccaria \(1983\)](#), donde los autores han utilizado una formulación con campos de desplazamiento completos y también las componentes del tensor de las deformaciones. No presentan la forma explícita de la matriz geométrica.

[*SIMO*] resultado obtenido de la referencia [Simo y VanQuoc \(1986\)](#). No presentan la forma explícita de la matriz geométrica. El resultado es obtenido de un análisis no lineal incremental con iteraciones de equilibrio.

[*PACOSTE*] resultado obtenido de un análisis no lineal incremental de la referencia [Pacoste y Eriksson \(1997\)](#). No presentan la forma explícita de la matriz geométrica. El resultado es obtenido de un análisis no lineal incremental con iteraciones de equilibrio. La [Tabla 6](#), muestra los valores de carga crítica para los casos a) y b) con discretización de 15 elementos por lado.

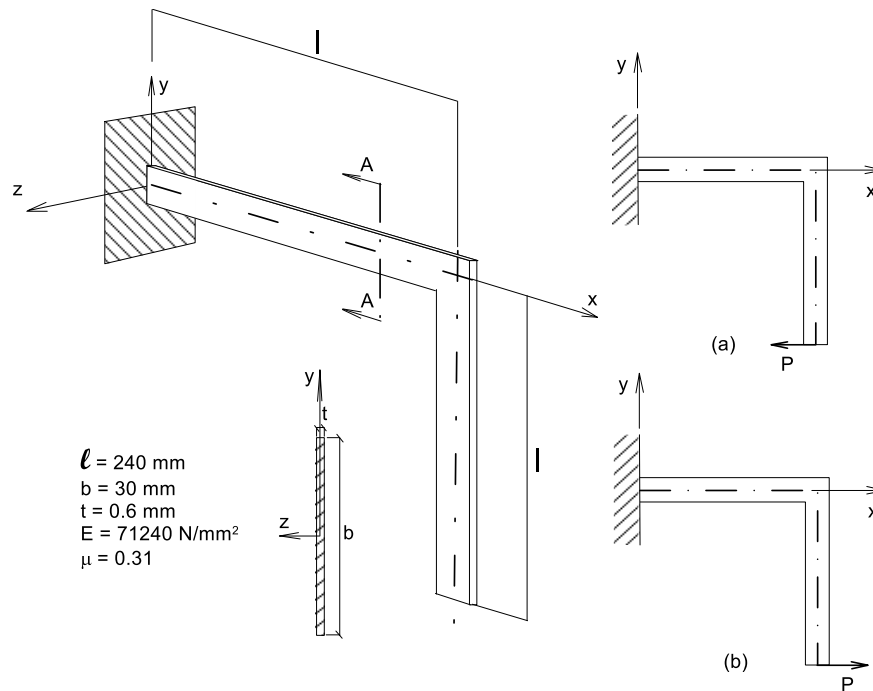


Figura 8. Pórtico espacial y estados de carga a) y b)

$[K_G]$	$P_{cr}$ [N] caso a)	$P_{cr}$ [N] caso b)
$[K_G^{SQ}]$	0.4373	0.5607
$[K_G^{SS}]$	0.6940	1.0972
$[K_G^Q]_{c.c.}$	0.4217	0.5505
$[K_G^S]_{c.c.}$	0.6808	1.0880
$[K_G^Q]_{s.c.}$	0.8236	1.2234
$[K_G^S]_{s.c.}$	1.0775	2.0965
$[K_{GB}]$	0.8236	1.2234
$[K_{GB}]_M$	0.8236	1.2234
$[K_{GG}]$	0.7101	1.0079
$[K_{GY}^{SQ}]$	0.4217	0.5505
$[K_{GY}^{SS}]$	0.6808	1.0873
$[K_G]_{BL}$	0.4217	0.5505
$[K_{GA}^{SQ}]$	0.4403	0.5697
$[K_{GA}^{SS}]$	0.7000	1.1000
[ELIAS]	0.6818 *	1.0847 *
[FLDZ]	0.6804 **	-
[SIMO]	-	1.09 ***
[PACOSTE]	-	1.094 ***
*	Resultado analítico	
**	10 elementos por lado	
***	Sin referenciar discretización	
-	Caso no contemplado	

Tabla 6. Carga crítica de pórtico espacial para casos de carga a) y b)

La siguiente [Figura 9](#), muestra la configuración de pandeo para el caso de carga a).

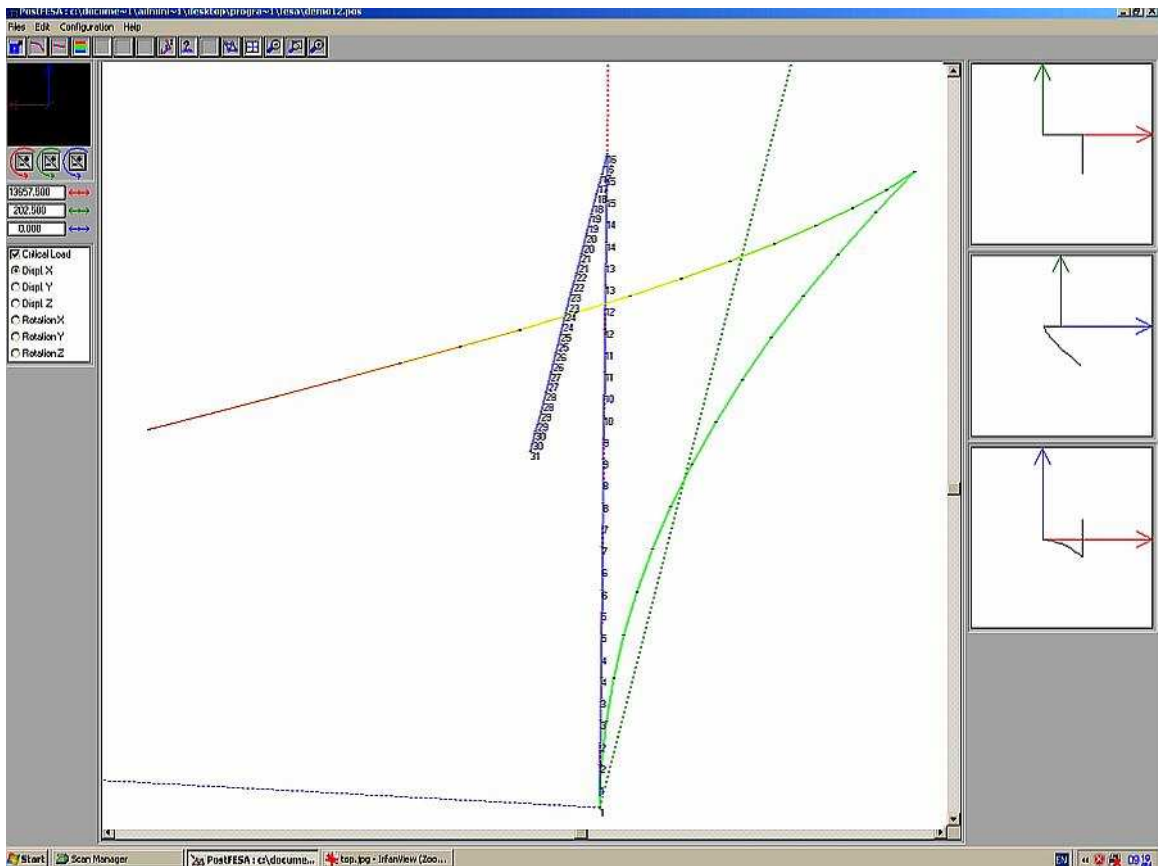


Figura 9. Vista del pórtico espacial y la configuración de pandeo (a color) caso a)

En este ejemplo se introduce una nueva variable respecto de los ejemplos anteriores, y es el ángulo formado por el eje de los elementos que conforman la estructura. Puede observarse una dispersión en los resultados y las únicas matrices que convergieron a los valores de carga crítica analítica fueron aquellas con corrección nodal y con consideración de cortante.

Cabe destacar que para el caso de carga a) de este modelo, ha sido obtenido el valor experimental en laboratorio y está debidamente corroborado en la referencia [Ronda \(1987\)](#), cuyos resultados de carga crítica han sido coherentes con los valores de carga crítica para matrices con corrección nodal y con consideración del efecto de cortante.

Un pórtico de similares características y con una carga igual al caso b), ha sido experimentado en laboratorio por [Spillers et al. \(1993\)](#) y corroborado numéricamente en un programa que tiene implementada una matriz con rotaciones finitas, oriunda de la referencia [Levy y Spillers \(2003\)](#), cuyo resultado es coherente con las previsiones descritas en este trabajo.

## 7 CONCLUSIONES

Los ejemplos expuestos fueron escogidos y organizados secuencialmente para garantizar una evaluación de la eficiencia de la presente formulación de la matriz geométrica frente a otras disponibles de la literatura y el procedimiento de búsqueda del primer autovalor lineal.

El ordenamiento secuencial está en función de los efectos que intervienen en el cálculo de la carga crítica. Esto permite ver los efectos que causan diferencias entre los resultados analíticos o los provenientes de referencias bibliográficas y los provistos por el programa, con la implementación de las diversas matrices geométricas.

Históricamente, las discrepancias pueden surgir de diversos orígenes provenientes de las diversas formulaciones, como: a) formulación con diferentes esquemas y grados de funciones de interpolación en los elementos; b) consideración o no de alabeo de torsión. c) efecto del ángulo formado por los ejes de los elementos; d) consideración de componentes de trabajo no lineales en el tensor de deformaciones; e) consideración o no de efectos de cizallamiento.

En relación al ítem a) que la utilización de diferentes campos de desplazamiento (Hermitianos o Lagrangeanos) para la formulación de matrices geométricas, no afecta el valor de la carga crítica desde que se haga una buena discretización de la estructura.

Todas las matrices llevan a resultados dentro de una tolerancia razonable con una subdivisión de 10 elementos o más, en los casos en que los demás ítems no son preponderantes. Se observó además que existen diferencias de hasta un 20% en los términos de las matrices geométricas con elementos Hermitianos, y una configuración diferente para la matriz con elemento Lagrangeano, incluyendo fuerzas axiales y momentos de inercia referidos a otros ejes.

Con relación al ítem b), cabe destacar que tanto para la matriz elástica como para la geométrica, no se ha considerado el grado de libertad de alabeo de torsión, por lo que solamente elementos de sección bisimétrica han sido modelados con elementos de sección esbelta como los utilizados en los ejemplos, o de sección cuadrada o circular, sin que ello afecte los resultados, los cuales han sido corroborados. Los resultados obtenidos por simple reducción de matrices (14x14) a matrices (12x12) con alabeo a torsión restringido, fueron los mismos valores obtenidos con matrices formuladas sin alabeo a torsión. Como era de esperar, esto no afectó los resultados pues se trata de elementos de sección rectangular fina, poco sensible al alabeo a torsión. En la referencia [Ronda \(1987\)](#), fueron consideradas otras vigas de sección cuadrada, y esto no modificó los resultados.

En lo referente al ítem c), se han reportado diferencias de valores de carga crítica cuando la estructura está conformada por elementos que forman un ángulo no nulo entre sus ejes, por lo que se ha elegido una estructura con elementos dispuestos en ángulo, que posee valores de carga crítica analítica y se han corroborado los resultados con los valores provistos por el programa.

Para el ítem d), en un análisis de equilibrio convencional, el efecto de tensiones iniciales (tensiones de cizallamiento y normales) son comúnmente despreciadas en la teoría convencional de vigas, que supone movimientos de cuerpo rígido de las secciones transversales. Para un análisis lineal ésta puede ser una hipótesis válida, pero para la obtención correcta de la matriz geométrica, deben ser incluidos términos cuadráticos y la contribución de estos términos no puede ser despreciada. Para considerar este efecto, [Argyris \(1979\)](#) ha sugerido utilizar una matriz de corrección nodal, que debe ser sumada a la matriz geométrica convencional para que los momentos flectores y torsores actúen de manera semitangencial. Esta corrección, genera los términos complementarios en la matriz de rigidez que saldrían naturalmente si se hubiese tomado en cuenta todos los términos no lineales en el tensor de las deformaciones, especialmente los provenientes del cizallamiento, por lo tanto, independientemente del grado de esbeltez de los elementos de la estructura, el efecto de la inclusión de términos no lineales en el tensor de las deformaciones no puede ser despreciado, ya que conduce a una formulación de matriz de rigidez incompleta que genera resultados erróneos

En relación al ítem e), las matrices que no toman en cuenta los efectos de la fuerza cortante inicial en su formulación, vemos que los resultados como es el caso de la matriz  $[K_G^S]_{s.c.}$ , causa incrementos de más de 100% en el valor de la carga crítica. Solamente problemas en los que la fuerza cortante es nula, se ve una convergencia al valor de carga crítica, pero ya que es un caso simple y no general, este efecto no debe despreciarse.



Como paso final, la verificación experimental de los resultados del pórtico en L, como es citado en [Ronda \(1987\)](#) y [Levy y Spillers \(2003\)](#), confirma la validez de los resultados lineales, ya que para los niveles de carga mostrados, los desplazamientos pre pandeo son pequeños comparados con la altura de la sección. El modo de pandeo obtenido contiene desplazamientos asociados a la torsión y flexión fuera del plano. De esta manera, se trata de un problema típico de bifurcación de equilibrio, y el análisis lineal de autovalor es una aproximación adecuada de la carga crítica real de la estructura.

Para el caso de aplicación de momentos a través de barras rígidas, como el [Ejemplo 6.3](#), de momento flector autoequilibrado, los resultados han sido correctos y no ha habido necesidad de considerar matrices de corrección nodal como lo destaca [Argyris \(1979\)](#). Solamente las formulaciones que toman en cuenta los efectos de la fuerza cortante inicial y corrección nodal han dado resultados correctos en el valor de la carga crítica.

La utilización de los parámetros de Rodrigues para la obtención de la matriz de corrección nodal, asegura el desempeño eficiente y consistente de la presente formulación para cualquier configuración de cargas y geometría, no solo para el estudio de problemas asociados a la estabilidad elástica linealizada (problema de autovalor generalizado), sino también para problemas de análisis no lineal incremental con iteraciones de equilibrio

Diversos enfoques que contienen matrices de corrección nodal o rotaciones no lineales y que consideran todos los términos del tensor de las deformaciones, llevan a resultados similares, coherentes con la forma de aplicación del vector de carga, desde que se tomen en cuenta los efectos de la fuerza cortante, lo cual es válido para otros enfoques, como el corrotacional y el total, como lo menciona [Pacoste y Eriksson \(1997\)](#).

La coherencia observada en un análisis cuidadoso cruzando resultados de los diversos ejemplos, así como la verificación experimental de los resultados en [Ronda \(1987\)](#) y [Spillers et al. \(1993\)](#) y la abundante argumentación en [Argyris \(1978\)](#), [Argyris \(1979\)](#), [Argyris \(1981a\)](#) y [Argyris \(1981b\)](#) corroborada en [Yang y McGuire \(1986a\)](#), [Yang y McGuire \(1986b\)](#), [Elias \(1986\)](#), [Ronda \(1987\)](#), [Conci \(1988\)](#), [Ronda y Rosas e Silva \(1989\)](#), [Levy y Spillers \(2003\)](#) y [Kuo et al. \(1993\)](#), muestra la necesidad de considerar los efectos de las fuerzas cortantes y matrices de corrección nodal para tener una formulación consistente, aún en el caso de elementos esbeltos donde la deformación por cizallamiento en el régimen lineal es despreciable.

## REFERENCIAS

- Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannakis, G.A. and Scharpf, D. On Large Displacement - Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14: 401-451 and 15: 99-135, 1978.
- Argyris, J.H., On the Geometrical Stiffness of a Beam in Space - A Consistent V. W. Approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20: 105-131, 1979.
- Argyris, J.H. and Symeonidis, Sp. Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Systems Under Nonconservative Loading - Natural Formulation, Part I. Quasistatic Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20: 75-123, 1981a.
- Argyris, J.H. and Symeonidis, Sp. A Sequel to: Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Systems Under Nonconservative Loading - Natural Formulation, Part I. Quasistatic Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20: 377-383, 1981b.
- Barsoum, R.S. and Gallagher, R.H., Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2: 335-352, 1970.
- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

- Bazant, Z.P. and El Nimeiri, M., Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames, *Journal of the Engineering Mechanics Division* (ASCE), 99:1259-1281, 1973.
- Cardona, A. and Gerardin, M., A Beam Finite Element Non-linear Theory with Finite Rotations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26: 2403-2438, 1988.
- Conci, A., Análise de Estruturas Reticuladas de Aço com Consideração de Empenamento e não Linearidades Geométrica e Material, PhD. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R.J., 1988.
- Elias, Z.M., *Theory and Methods of Structural Analysis*, John Wiley and Sons, 1986.
- Kane, T.R., Likins, P.W. and Levinson, D.A., *Spacecraft Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1983.
- Kuo, S.R., Yang, Y.B. and Chou, J.H., Nonlinear Analysis of Space Frames with Finite Rotations, *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 119,1: 1-15, 1993.
- Laudiero, F. and Zaccaria, D., Finite Element Analysis of Stability of Thin-Walled Beams of Open Section, *Int. J. Mech. Sci.*, 30, 8: 543-557, 1983.
- Levy, R. and Spillers, W.R., *Analysis of Geometrically Nonlinear Structures*, Springer-Science+Business Media Dordrecht, BV, 2003.
- Oden, J.T., Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures, *AIAA Journal*, 4,8: 1480-1482, 1966.
- Pacoste, C. and Eriksson, A., Element behavior in post-critical plane frame analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 125: 319-343, 1995.
- Pacoste, C. and Eriksson, A., Beam Elements in Instability Problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 144: 163-197, 1997.
- Pereira de Almeida, F.J., *Instabilidade Elástica de Pórticos Sujeitos a Cargas Dependentes dos Deslocamentos*, MSc. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R.J., 1985.
- Ronda Vásquez, Juan A., *Estudo Comparativo de Matrizes Geométricas para Análise da Estabilidade de Pórticos Espaciais*, MSc. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R.J., 1987.
- Ronda Vásquez, J.A. and Rosas e Silva, R., Spatial Buckling Analysis; A Comparison of Formulations, MECOM 88, *AMCA, Mecánica Computacional*, 7: 143-154, 1989.
- Ronda, J.A., Prato, C.A., y Godoy, L.A., Inestabilidad de Pórticos Espaciales, *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras, Escuela Superior Politécnica del Ejército*, Quito, Ecuador, 7,1: 67-86, 2002.
- Simo, J.C. and Vu-Quoc, L., A Three Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II., Computational Aspects, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 58: 79-116, 1986.
- Spillers, W.R., Saadeghvaziri, A. and Luke, A., An Example of Three Dimensional Frame Buckling, *Computers and Structures*, 47,3: 483-486, 1993.
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, USA. 1961
- Velásquez Garnica., P.C., *Un Enfoque Consistente Para Análisis de Cargas Críticas Linealizadas para Pórticos Espaciales*, MSc. Thesis, E.M.I., Escuela Militar de Ingeniería, La Paz, Bolivia, 2015.
- Yang, Y.B. and McGuire, W., Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis, *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 112: 853-877, 1986a.
- Yang, Y.B. and McGuire, W., Joint Rotation and Geometric Nonlinear Analysis, *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 112: 879-905, 1986b.
- Ziegler, H., *Principles of Structural Stability*, 2nd Edition, Birkhäuser Verlag, Bassel und Stuttgart, 1977.