

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN DE VIBRACIONES EN MEDIOS ELÁSTICOS

Pablo L. Sierra^a, Oscar Möller^{a,b}, Juan P. Ascheri^a y Mauro Poliotti^a

^a*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad de Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina, sierrapa@fceia.unr.edu.ar, <http://www.imaefceia.unr.edu.ar>*

^b*Consejo de Investigaciones (CIUNR), Universidad Nacional de Rosario, Maipú 1065, 2000 Rosario, Argentina, <http://www.unr.edu.ar>*

Palabras Clave: Vibraciones en estructuras, Transmisión de ondas en suelos, Métodos implícitos, Métodos explícitos.

Resumen. El desarrollo y aplicación de los métodos numéricos para aproximar el alcance de las vibraciones generadas por una fuente puntal, ya sea en aquellas estructuras donde se desarrolla la excitación como en aquellas que son afectadas por la mismas, está vinculada con el estudio de factibilidad de proyectos y con el diseño de elementos disipadores o de aislación que permitan mantener las perturbaciones por debajo de los límites tolerables y reglamentarios. En este trabajo se realiza una introducción teórica al problema de propagación de vibraciones en medios elásticos, tanto unidimensionales como tridimensionales. Se analiza el caso de la propagación de una perturbación generada por una carga puntal dinámica en un medio semi-infinito. Se presentan diversos métodos numéricos implícitos y explícitos para la integración de las ecuaciones en el tiempo. Se presentan dos casos de aplicación un modelo de una barra donde se propaga una onda unidimensional y un modelo tridimensional axisimétrico perturbado por una carga puntal. Se contrastan las soluciones teóricas descritas con las obtenidas de los modelos numéricos de elementos finitos, utilizando los diversos métodos de integración en el tiempo. Se compara la precisión de las soluciones obtenidas con cada uno, los rangos de estabilidad y el costo computacional, a través de los tiempos de procesamiento, para los problemas propuestos.

1. INTRODUCCIÓN

La actividad industrial, los eventos deportivos, el transporte ferroviario, los subterráneos y eventos de concurrencia masiva, generan vibraciones que se propagan por el suelo que pueden llegar no sólo a provocar molestias a los habitantes de edificios, si no que pueden aparecer daños en elementos no estructurales y en la propia estructura resistente. Es por esto que interesa predecir la zona de afectación y los movimientos que se puedan generar en las estructuras, las directamente vinculadas a la fuente de las excitaciones y las cuales son afectadas por la misma. También interesa poder cuantificar la efectividad en la reducción de dichas vibraciones de intervenciones del medio, colocación de elementos de disipación o aislación u otros elementos correctivos, con el fin de analizar la factibilidad técnica de distintas opciones.

El problema de vibraciones de una fuerza vibrante actuando en un punto sobre la superficie de un espacio semi-infinito lo estudió Lamb en 1904, (Lamb, 1904), el cual es referido como el problema dinámico de Boussinesq. Continuando con los estudios, varios autores han encontrado soluciones analíticas en el dominio de las frecuencias para casos particulares, (Das y Ramana, 2010). Para representar de manera integral el problema, debe abordarse el modelo dinámico de la fuente de excitación, el modelo de transmisión de las vibraciones por el suelo y el modelo dinámico de la estructura a analizar y sus interacciones.

En nuestro país se han realizado estudios acerca de la afectación en edificios cercanos por las vibraciones originadas por espectáculos musicales en el estadio de River Plate, (Bertero et al., 2010), y por las vibraciones originados por el hincado de la tablestacas, (Bertero et al., 2012). En el medio local se han realizado numerosos trabajos de asistencia técnica sobre medición y evaluación de vibraciones producidas por equipos industriales y por partidos de fútbol en el estadio del Club Atlético Newell's Old Boys. Consisten en la medición de vibraciones en edificio donde se reportan quejas y evaluarlas en función de las normativas vigentes.

En Möller et al. (2014) se analiza el desempeño del software COMSOL Multiphysics, (Comsol, 2012), para la transmisión de ondas unidireccional y se aplica al caso tridimensional, donde se analiza la respuesta de una estructura a una perturbación generada por una fuente distante. Continuando con la misma línea de trabajo, en el presente se busca optimizar los modelos, comparando los resultados obtenidos, tiempos de procesamiento y límites de los mismos, para los diferentes análisis que permite el programa.

2. TRANSMISIÓN DE ONDAS EN MEDIO ELÁSTICO UNIDIMENSIONAL

Se plantea un breve resumen de la transmisión de ondas en barras de comportamiento elástico. Para ello se considera una barra de sección transversal A , constituida por un material de módulo de elasticidad igual a E y una densidad ρ . En la Fig. (1) se esquematiza la barra y se separa un elemento diferencial de la misma.

Aplicando la segunda Ley de Newton en el elemento diferencial, resulta

$$\sum F = m a \rightarrow -\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) A = \frac{\gamma A dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Siendo γ el peso específico del material. Considerando al material elástico lineal, utilizando la ley de elasticidad de Hooke, podemos expresar la tensión en función de la deformación de la siguiente forma:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

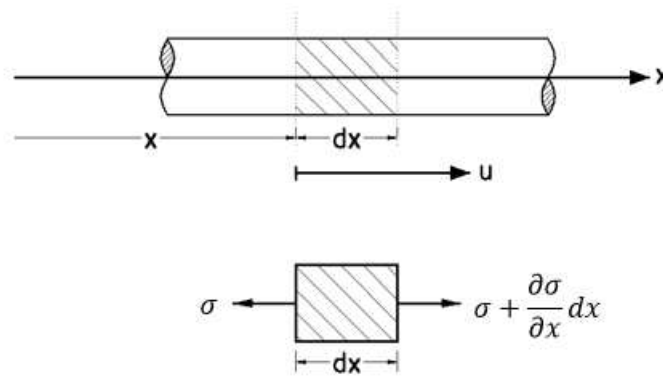


Figura 1: Barra elástica

Reemplazando Ec. (2) en Ec. (1) resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

Haciendo:

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4)$$

Resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

La Ec. (5) es la ecuación de la onda de presión longitudinal y el término v_c es la velocidad de propagación de la misma. La ecuación resultante resulta una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales o EDP, de 2º orden del tipo hiperbólico. La solución más general para una ecuación hiperbólica a coeficientes constantes es la siguiente:

$$u(x, t) = F(v_c t + x) + G(v_c t - x) \quad (6)$$

Donde F y G son funciones dependientes de las condiciones iniciales. Se puede interpretar como la superposición de dos pulsos que viajan en sentidos opuestos con una velocidad v_c .

Considerando un pulso rectangular de compresión de magnitud σ_x y duración t' aplicado en el extremo de una barra como se observa en la Fig. (2).

Durante un intervalo de tiempo definido, la tensión viaja una distancia:

$$\Delta x = v_c \Delta t \quad (7)$$

Para un tiempo $t > t'$ la longitud \bar{x} del segmento de la barra que está comprimido resulta:

$$\bar{x} = v_c t' \quad (8)$$

El acortamiento elástico que se produce en la barra es:

$$u = \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) (\bar{x}) = \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) (v_c t') \quad (9)$$

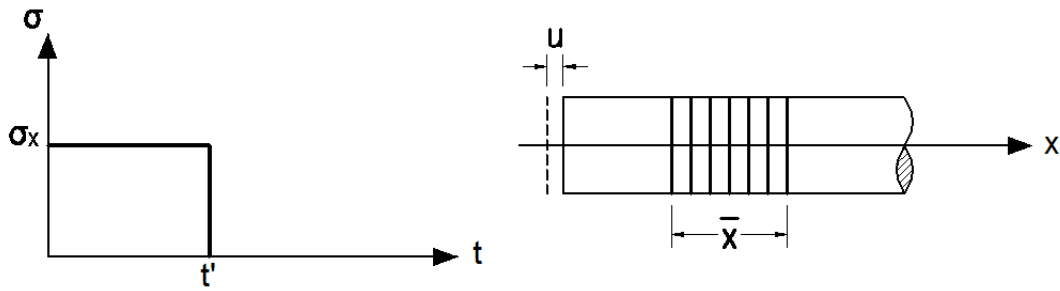


Figura 2: Pulso de presión rectangular sobre la barra

Donde u es el desplazamiento al final de la barra. La velocidad del final de la barra, lo que representa la velocidad de la partícula es la siguiente:

$$\dot{u} = \frac{u}{t'} = \frac{\sigma_x v_c}{E} \quad (10)$$

Comparando las ecuaciones de la velocidad de propagación de la onda Ec. (4) y la velocidad de las partículas Ec. (10), podemos decir que la velocidad de las partículas \dot{u} es directamente proporcional a la tensión σ_x , mientras que la velocidad de propagación de la onda es función únicamente del material de la barra. Además ambas tienen la misma dirección cuando la tensión es de compresión, en cambio cuando la tensión es de tracción, las velocidades tienen direcciones opuestas.

3. TRANSMISIÓN DE ONDAS EN MEDIO ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL

3.1. Ondas en medio elástico infinito

En la presente sección se realiza una introducción teórica al problema tridimensional de propagación de ondas, para un material elástico lineal e isótropo.

En la Fig. (3) se observan las tensiones actuando en un elemento de un medio elástico de lados dx , dy y dz . Para obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento se requiere sumar las fuerzas en las tres direcciones.

Sumando las fuerzas que actúan en la dirección del eje x se obtiene:

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] (dy)(dz) + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] (dx)(dy) + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] (dx)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

Donde ρ es la densidad del medio y u es la componente del desplazamiento en dirección x . Operando se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12)$$

Análogamente se obtienen las sumatorias según y y z . Ec. (13) y Ec. (14).

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13)$$

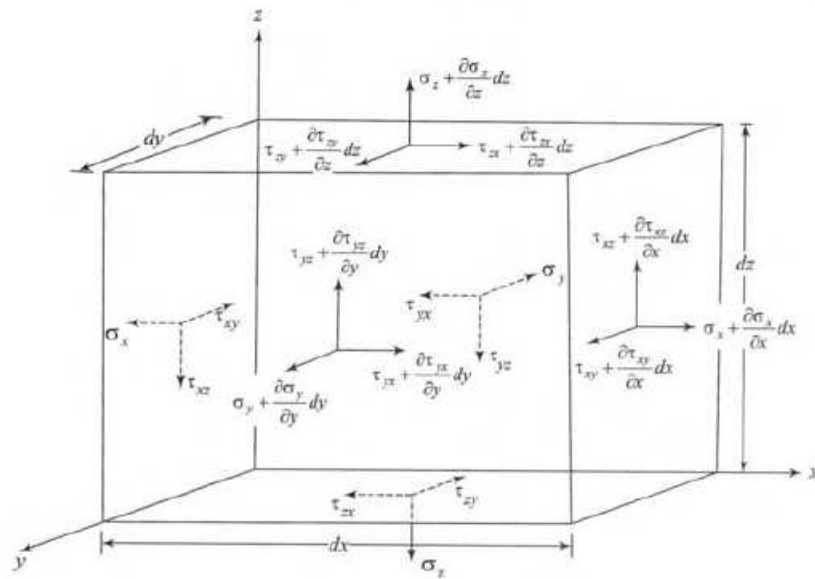


Figura 3: Ecuación del movimiento en un medio elástico

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{14}$$

Donde v y w son las componentes del desplazamiento en la dirección y y z respectivamente.

Siendo el material elástico lineal e isótropo son válidas las relaciones dadas por la ley de Hooke. Teniendo en cuenta la simetría del tensor de tensiones de Cauchy, derivando la Ec. (12) con respecto a x , Ec. (13) respecto a y y Ec. (14) con respecto a z y sumándolas, resulta: (ver Das y Ramana (2010) para el desarrollo completo)

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \bar{\epsilon} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\epsilon} \tag{15}$$

Donde $\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ y las constantes del material son:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{16}$$

Donde E es el módulo de elasticidad y μ el coeficiente de Poisson. La Ec. (15) es la ecuación de onda primaria, onda-P u onda de compresión y el término v_p es la velocidad de propagación de las mencionadas ondas.

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \tag{17}$$

Comparando la Ec. (17) con Ec. (4) se observa que la velocidad de propagación de las ondas-P es mayor a la velocidad de la onda de presión longitudinal.

Teniendo en cuenta las siguientes rotaciones:

$$\bar{\omega}_x = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \bar{\omega}_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{18}$$

Derivando la Ec. (13) con respecto a z y la Ec. (14) con respecto a y y restando las mismas, operando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}_x = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad (19)$$

Operando de manera similar se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_y}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_y \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_z \quad (21)$$

Las ecuaciones Ec. (19), Ec. (20) y Ec. (21) son las ecuaciones de las ondas de distorsión, ondas de corte u ondas-S y el término v_s es la velocidad de propagación de dichas ondas.

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (22)$$

En resumen, hay dos tipos de ondas que se propagan en el medio elástico infinito, las ondas-P y las ondas-S. Cada una tiene una velocidad de propagación diferente v_p y v_s , que se relacionan de la siguiente forma:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} \quad (23)$$

La Ec. (23) muestra que la relación es siempre mayor que 1, por lo que la velocidad de las ondas-P es mayor a la de las ondas-S. Además para $\nu = 0,5$ (caso incompresible) la v_p tiende a infinito.

3.2. Ondas en medio elástico semi-infinito

Además de las ondas descritas en el apartado anterior, otro tipo de onda, denominadas ondas de Rayleigh, existe cerca de la frontera del medio elástico semi-infinito. Para su análisis, se considera una onda plana viajando en un espacio semi-infinito, representado en la Fig. (4), donde el plano xy es la frontera del medio. Se representa con u y w los desplazamientos en x y z respectivamente, independientes de y . Por lo que:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

Donde ϕ y ψ son dos funciones potenciales. Siendo que:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + 0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi \\ 2\bar{\omega}_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \psi \end{aligned} \quad (25)$$

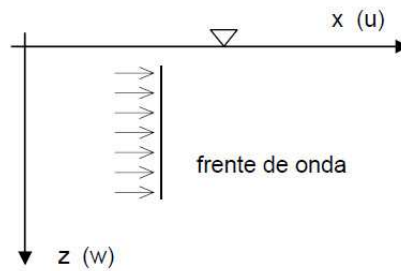


Figura 4: Onda plana en un medio elástico semi - infinito

Reemplazando Ec. (25) en Ec. (15) y Ec. (20) y operando se obtienen igualdades resultantes que se cumplen si:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= v_p^2 \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= v_s^2 \nabla^2 \psi\end{aligned}\quad (26)$$

Se considera una onda sinusoidal viajando en la dirección positiva de x. Las soluciones de ϕ y ψ pueden expresarse como:

$$\phi = F(z)e^{i(\omega t - fx)} \quad \psi = G(z)e^{i(\omega t - fx)} \quad (27)$$

Donde $F(z)$ y $G(z)$ son funciones de la profundidad y la constante f resulta:

$$f = \frac{2\pi}{\text{longitud de onda}} \quad (28)$$

Sustituyendo Ec. (27) en las ecuaciones de Ec. (26) y operando se obtiene la solución:

$$V^6 - 8V^4 - (16\alpha^2 - 24)V^2 - 16(1 - \alpha^2) = 0 \quad (29)$$

Donde:

$$V = \frac{v_r}{v_s} \quad \alpha = \frac{v_s}{v_p} = \sqrt{\frac{1 - 2\mu}{2 - 2\mu}} \quad (30)$$

Donde v_r es la velocidad de la onda de Rayleigh. En función del valor de la relación de Poisson, se obtiene α , con el cual se calcula el valor apropiado de V . Con el valor de V y v_p o v_s se puede obtener el valor v_r de la velocidad de la onda de Rayleigh.

Reemplazando Ec. (27) en las Ec. (24) y desarrollando, las tasas de atenuación de los desplazamientos en dirección horizontal u y vertical w en función de la profundidad resultan:

$$U = -e^{qz} + \frac{2qs}{s^2 + f^2} e^{-sz} \quad W = -e^{qz} + \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sz} \quad (31)$$

Donde:

$$q^2 = f^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \quad s^2 = f^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \quad (32)$$

En la Fig. (5) puede observarse la variación de los coeficientes de atenuación horizontales y verticales para una relación de Poisson de $\nu = 0,25$ en función de la relación entre la profundidad y la longitud de onda.

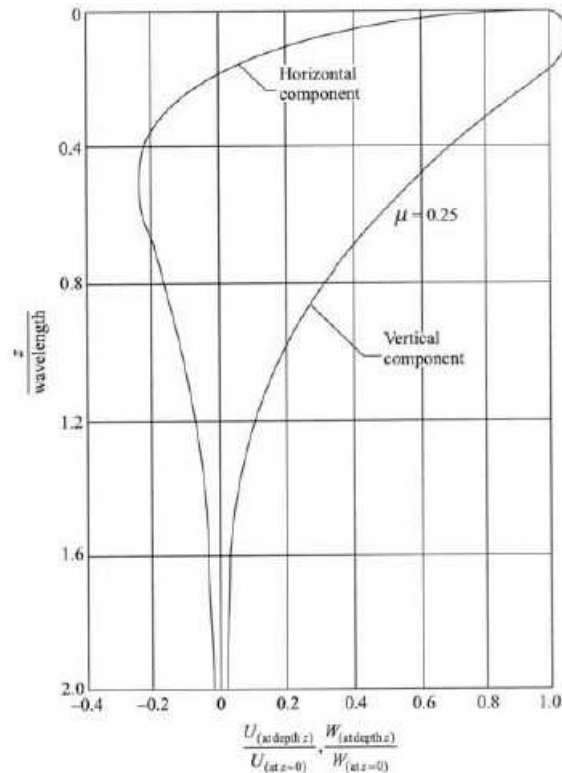


Figura 5: Factor de atenuación de los desplazamientos en relación a la profundidad, obtenida de Das y Ramana (2010)

Si se crea un impulso de corta duración sobre la superficie de un medio elástico semi-infinito las ondas-S y ondas-P creadas viajan a través del medio con frentes de onda semiesféricos. En cambio, las ondas-R se van a propagar de manera radial en un frente de onda cilíndrico. Para el desplazamiento de un punto de la superficie, al ser las ondas-P las más rápidas, las mismas van a llegar primero al punto, seguidas por las ondas-S y finalmente por las ondas-R. Como puede observarse en la Fig. (6) (a) y (b) el desplazamiento es mayor cuando arriban las ondas-R que las ondas-P y ondas-S. La amplitud de la perturbación decrece gradualmente con la distancia, cómo la amplitud es proporcional a la energía, por lo cual:

$$\begin{aligned} \text{Amplitud ondas-P y ondas-S} &\propto \frac{1}{r} \\ \text{Amplitud ondas-R} &\propto \frac{1}{\sqrt{r}} \end{aligned}$$

La pérdida de amplitud de las ondas por la distancia se denomina amortiguamiento geométrico. Además está el amortiguamiento material debido a la disipación de energía por las características propias del material.

Componiendo los desplazamientos en el tiempo, el movimiento de la partícula de la superficie describe una elipse retrograda, como se observa en Fig. (6) (c).

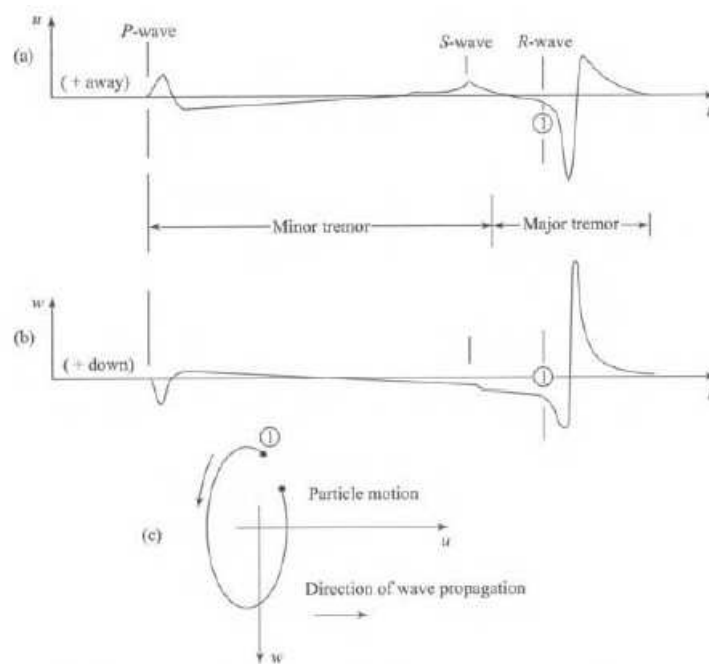


Figura 6: Ondas en un punto superficial en un medio semi-infinito ideal, obtenida de [Das y Ramana \(2010\)](#)

4. MÉTODOS NUMÉRICOS

Para resolver las ecuaciones de dinámica estructural para movimientos bajo excitaciones arbitrarias podemos considerar dos aproximaciones posibles, técnicas de superposición modal y métodos de integración directa del tiempo.

Las técnicas de superposición modal se basan en los resultados del análisis modal lineal y consisten en expresar la respuesta dinámica en una serie expandida de los modos propios de la estructura. Estas técnicas son muy efectivas cuando los modos fundamentales predominan en las respuestas. Cuando el espectro de frecuencias es tan amplio que requiere la inclusión de un gran número de modos para asegurar la convergencia, en lugar de las técnicas de superposición modal se utilizan los métodos de integración directa. Estos no están limitados solo al caso lineal, sino que pueden extenderse a sistemas no lineales, gracias a que tienen en cuenta los componentes de alta frecuencia de manera directa.

Los métodos de integración directa en el tiempo necesitan que los parámetros estén correctamente ajustados de acuerdo a la precisión y estabilidad requerida. Se basan en la diferencia finita del tiempo, que actúa como un filtro numérico en la solución, por lo que la elección del paso del tiempo a considerar es crítica. El mismo no sólo depende del espectro de frecuencias de la excitación sino que también de la discretización del espacio, el cual tiene que ser consistente con la velocidad de propagación de la onda y con el modelo a representar.

De manera general, los métodos de integración para sistemas de primer orden pueden representarse de la forma

$$\mathbf{u}_{n+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_{n+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{\mathbf{u}}_{n+1-j} \quad (33)$$

Donde $h = t_{n+1} - t_n$ es el paso del tiempo y \mathbf{u}_{n+1} es el vector de estado en el tiempo t_{n+1} calculado a partir de los vectores de estados en m tiempos anteriores, de sus derivadas y de la

derivada misma de \mathbf{u}_{n+1} .

Para $\beta_0 \neq 0$ el método de integración es implícito, ya que el vector de estado en el tiempo t_{n+1} es función de su propia derivada. Para $\beta_0 = 0$, \mathbf{u}_{n+1} no depende de la derivada $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$, sino que únicamente de las derivadas y valores de la propia función en pasos anteriores, por lo que son métodos explícitos.

En este trabajo se comparan la eficiencia de los los métodos implícitos y los explícitos para el caso de la propagación de ondas en medios elásticos.

4.1. Métodos implícitos

Para el caso de los métodos implícitos, se utilizan los métodos Backward Differentiation Formulas (BDF) y α -generalizado.

Los métodos BDF (o fórmulas de diferenciación regresiva) son una familia de métodos lineales implícitos, estables para los problemas "stiff", definidos como los problemas donde hay autovalores cuyas partes reales son muy distintas, es decir, hay modos muy rápidos y modos muy lentos. Calculan el valor de la variable de estado \mathbf{x}_{n+1} en el tiempo t_{n+1} en función de m pasos anteriores y la derivada de la misma variable de estado en ese tiempo, $\dot{\mathbf{x}}_{n+1}$, donde m es el orden del método. El software utiliza un "solver" que puede variar el orden del BDF y el paso del tiempo para lograr la precisión requerida.

El método α -generalizado es un método implícito de segundo orden con un parámetro α ($0 \leq \alpha \leq 1$) que controla el amortiguamiento de las frecuencias más altas. Con $\alpha = 1$, el método no tiene amortiguamiento numérico, mientras que para $\alpha = 0$ da el máximo amortiguamiento numérico, que en los casos lineales la máxima frecuencia es amortiguada en un solo paso. Consiste en predecir el valor de la variable de estado en un punto intermedio del paso $\mathbf{x}_{n+\alpha}$ con un método explícito, como puede ser el método de "Forward Euler", calcular la derivada en dicho punto y utilizarla para dar el paso completo en con un método implícito, como puede ser el método de "Backward Euler". Se puede resumir en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\ \mathbf{x}_{k+\alpha}^P &= \mathbf{x}_k + \alpha h \dot{\mathbf{x}}_k \\ \dot{\mathbf{x}}_{k+\alpha}^P &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+\alpha}^P, t_{k+1}) \\ \mathbf{x}_{k+1}^C &= \mathbf{x}_k + h \left((1 - \alpha) \dot{\mathbf{x}}_k + \alpha \dot{\mathbf{x}}_{k+\alpha}^P \right) \end{aligned} \quad (34)$$

En Chung y Hulbert (1993) se encuentra el desarrollo del método para la dinámica de estructuras lineales, y en Jansen y Hulbert (2000) la aplicación a las ecuaciones de Navier - Stokes.

4.2. Métodos explícitos

Para la integración por medio de métodos explícitos se utiliza el método de Runge-Kutta. Los métodos explícitos de Runge-Kutta son métodos de integración monopaso que pueden

describirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \text{etapa } 0 : \quad \dot{\mathbf{x}}^{P_0} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\
 \text{etapa } j : \quad \dot{\mathbf{x}}^{P_j} &= \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^j \beta_{ji} \dot{\mathbf{x}}^{P_{i-1}} \\
 &\quad \dot{\mathbf{x}}^{P_j} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\
 \text{etapa final} : \quad \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^l \beta_{li} \dot{\mathbf{x}}^{P_{i-1}}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Donde l denota el número de etapas del método. El método más popular de estos es el de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4) donde las etapas se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{etapa } 0 : \quad \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\
 \text{etapa } 1 : \quad \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1, t_k + \frac{h}{2}\right) \\
 \text{etapa } 2 : \quad \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \mathbf{k}_2, t_k + \frac{h}{2}\right) \\
 \text{etapa } 3 : \quad \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + h \mathbf{k}_3, t_k + h) \\
 \text{etapa } 4 : \quad \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2 \mathbf{k}_2 + 2 \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)
 \end{aligned} \tag{36}$$

Como puede verse, obtiene en cuatro pasos la derivada de la función de estado. Para el RK4 planteado, en la etapa cero obtiene la derivada en el inicio del intervalo de tiempo buscado $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$, con la cual predice el valor de $\mathbf{x}_{k+\frac{h}{2}}$. En la etapa uno calcula la derivada en el punto hallado y con dicha derivada vuelve a predecir el valor de $\mathbf{x}_{k+\frac{h}{2}}$. En la segunda etapa calcula la derivada en el último punto hallado y la utiliza para predecir el valor de \mathbf{x}_{k+h} . En la tercer etapa obtiene la derivada en el último punto obtenido. Finalmente realiza un promedio ponderado de las cuatro derivadas obtenidas y la utiliza para obtener \mathbf{x}_{k+1} . Es importante notar que el número de etapas y el orden de aproximación no son necesariamente iguales. Los algoritmos RK de orden superior requieren un mayor número de etapas que lo que indica el orden.

5. EJEMPLO DE VALIDACIÓN: VIBRACIONES EN BARRA CON EXTREMO FIJO

Se evalúan los métodos descritos en la sección anterior mediante el siguiente ejemplo de aplicación. Se considera una barra con un extremo empotrado y el otro libre, en el cual se le aplica un pulso sinusoidal $P(t)$, como se observa en la Fig. (7).

Los parámetros adoptados, elegidos para representar las características de un suelo, son los siguientes:

$$L = 100m \quad A = 1m^2 \quad \rho = 1800 \frac{kg}{m^3} \quad E = 112,5MPa \tag{37}$$

$$P(t) = 100 KN \sin\left(78,54 \frac{1}{s} t\right) \quad t \leq 0,04s \tag{38}$$

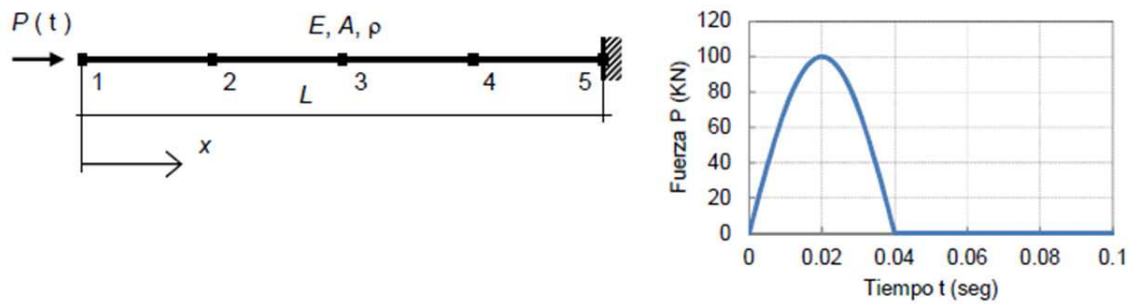


Figura 7: Barra con extremos libre y empotrado

Aplicando la Ec. (4), se obtiene la velocidad de propagación de la onda:

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 250 \frac{m}{s} \quad (39)$$

El tiempo que tarda la onda en llegar al extremo empotrado es:

$$t_L = \frac{L}{v_c} = 0,4 \text{ s} \quad (40)$$

Reemplazando el impulso del pulso rectangular considerado en la Ec. (9) por el impulso de la semionda del ejemplo planteado, se obtiene el desplazamiento máximo en la barra Ec. (41).

$$u_{max} = I \frac{v_c}{E} = \left(P_{max} \frac{2t_L}{\pi} \right) \frac{v_c}{E} = 5,66 \text{ mm} \quad (41)$$

Discretizando el modelo en N elementos finitos de igual longitud, desarrollando el análisis de los modos de vibración y frecuencias del sistema (Gérardin y Rixen, 1994), el límite superior de de las frecuencias del modelo puede obtenerse de la solución analítica.

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\frac{2r-1}{4N}\pi\right) \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (42)$$

Donde:

$$k = \frac{EA}{l} \quad M = ml \quad l = \frac{L}{N} \quad (43)$$

El límite superior puede ser alcanzado sólo cuando $N \rightarrow \infty$. Considerando a $l = 0,4 \text{ m}$, aplicando la relación de Courant para el método de Runge Kutta de orden 4 y reemplazando se obtiene:

$$h = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_{cr}} = 0,0036 \text{ s} \quad (44)$$

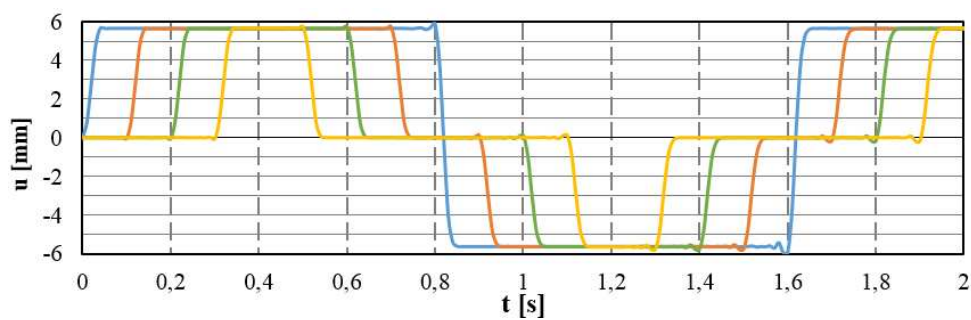
Siendo h el paso de tiempo límite de la condición de convergencia del algoritmo según la discretización planteada. Por otro lado, se encuentra el límite de estabilidad numérica del método, por lo que se debe adoptar un paso menor a ambos.

Se realiza un modelo numérico en el software COMSOL empleando de componente el elemento viga (beam), utilizando los subnodos de material elástico lineal (con los valores correspondientes a la Fig. (7)), extremo libre, carga puntual definida mediante una función por pasos,

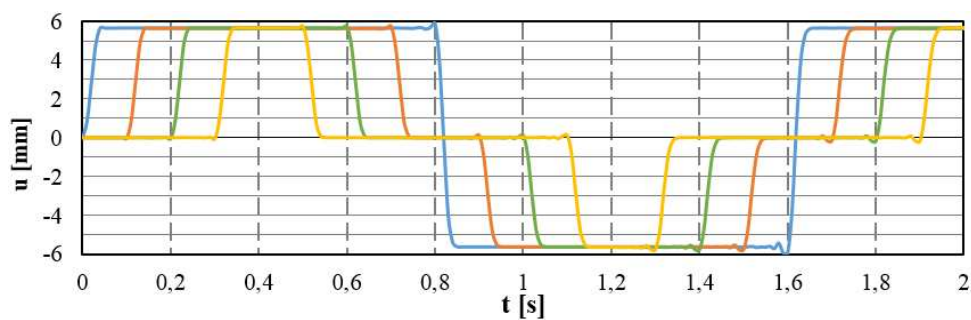
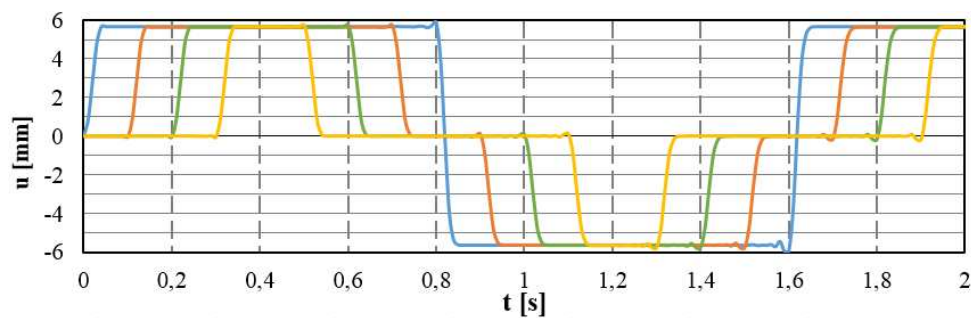
restricción fija en el extremo empotrado y valores iniciales nulos de velocidad y desplazamiento. El mallado corresponde al cuadrangular libre con restricción de tamaño a $0,4 m$. Se agregaron distintos estudios para cada método de integración utilizado, α -generalizado, BDF con orden máximo 5 y Runge Kutta de orden 4. Los primero métodos implícitos y el último explícito.

La computadora empleada, consta de un procesador Intel $\text{\textcircled{R}}$ Core TM i5-3210M, memoria RAM de 4 GB DDR3 a 800 MHz corriendo un sistema operativo Windows 8.1 $\text{\textcircled{R}}$ de 64 bits. Todos los modelos fueron procesados en igualdad de condiciones, con uso exclusivo del sistema.

En la Fig. (8) se comparan los desplazamientos en dirección del eje de la barra obtenidos para los distintos métodos, con un paso de tiempo $h = 0,0001$. Se toman como puntos característicos el extremo libre de la barra (Punto 1), a 25 m (Punto 2), 50 m (Punto 3) y 75 m (Punto 4) de dicho extremo.



(a) RK4

(b) α -generalizado

(c) BDF

— Punto 1 — Punto 2 — Punto 3 — Punto 4

(d) Referencias

Figura 8: Desplazamiento u para distintos métodos y paso $0,0001 s$

La onda tarda 0,4 s en llegar al extremo fijo de la barra y 0,8 s en volver al extremo libre la onda reflejada por el extremo fijo, lo obtenido en Ec. (40). Al considerar el material perfectamente elástico, no hay amortiguamiento material, por lo que el proceso se repite infinitamente sin disipar la amplitud del desplazamiento. El arribo de la onda a cada punto considerado se produce en un intervalo de 0,1 s, exactamente coincidente con la velocidad de propagación de la onda, Ec. (39).

En todos los casos, en los cambios de signo del desplazamiento, se observan pequeñas perturbaciones. Estas se vuelven cada vez más evidentes con el paso del tiempo. Para el método alfa generalizado y $h = 0,001$ la perturbación se reduce, ver Fig. (9).

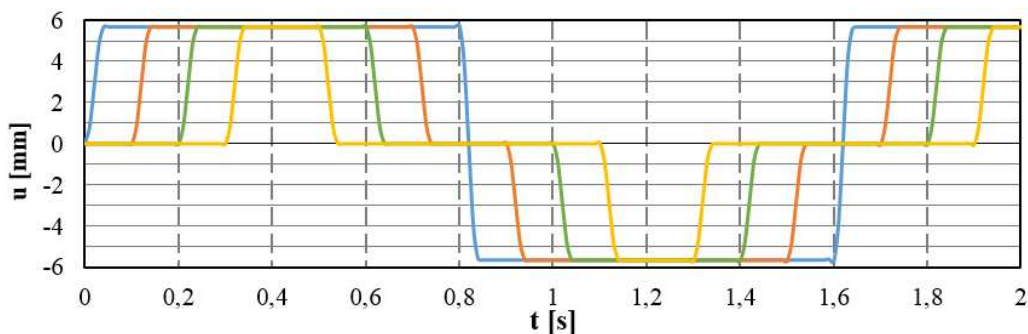


Figura 9: Desplazamiento u para el método α - generalizado y paso 0,001 s

Por esto se concluye que dichas oscilaciones aparecen debido a que el paso de cálculo adoptado difiere del que surge de la relación de Courant para el método. En la Tabla (1) se observan los resultados del desplazamiento u en el Punto 1 para $t = 0,40$ s y $t = 0,80$ s y la relación entre ambos, para el paso $h = 0,0001$.

Método	0,40 s	0,80 s	Relación
RK4	5,659 mm	5,896 mm	104,19 %
α -gen	5,659 mm	5,896 mm	104,19 %
BDF	5,659 mm	5,886 mm	104,00 %

Tabla 1: Desplazamiento u en Punto 1 para los distintos métodos y paso $h = 0,0001$ s

Comparando los resultados con los valores que surgen de la Ec. (41) y considerando que los picos producto de las perturbaciones afectan en menos de un 5 %, podemos considerar que los resultados obtenidos para los distintos métodos son aceptables.

Se compara cómo varían los tiempos de procesamiento, para distintos pasos de integración y métodos. Los resultados pueden observarse en la Tabla (2) y la Fig. (10).

Métodos	0,000025 s	0,000050 s	0,000075 s	0,000100 s	0,000500 s	0,001000 s
RK4	93,28 Min	47,48 Min	31,98 Min	24,05 Min	Inestable	Inestable
Alfa	70,80 Min	36,60 Min	24,57 Min	18,50 Min	8,40 Min	4,03 Min
BDF	Inestable	Inestable	Inestable	16,45 Min	14,23 Min	Inestable

Tabla 2: Tiempos de procesamiento de los distintos métodos y pasos de integración

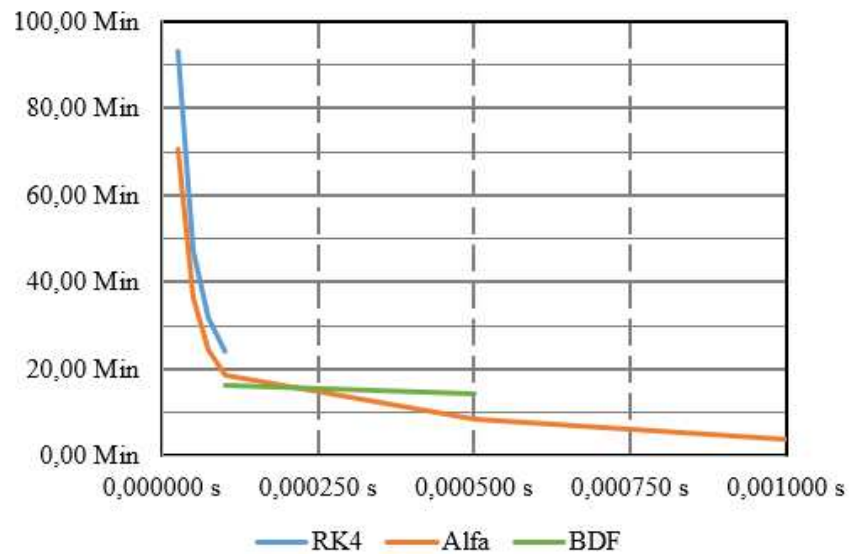


Figura 10: Tiempos de procesamiento en función del paso para los distintos métodos

El análisis por el método BDF es el más rápido para el paso $h = 0,0001s$ pero tiene una estabilidad acotada. El método α - generalizado es estable para todos los pasos analizados y los tiempos de procesamiento crecen rápidamente cuando $h \rightarrow 0$. El método RK4 es aún más lento que el α - generalizado y tiene una distribución similar a este, pero no es estable para tiempos mayores a $h = 0,0001s$.

6. APLICACIÓN: VIBRACIONES EN SEMI-ESPACIO INFINITO

Se analiza la situación de una placa circular de hormigón de radio 20 cm y alto 20 cm apoyada en un suelo de similares características del ejemplo anterior, en la cual se aplica la carga de impacto $P(t)$ en el centro de la cara superior, como puede observarse en la Fig. (11).

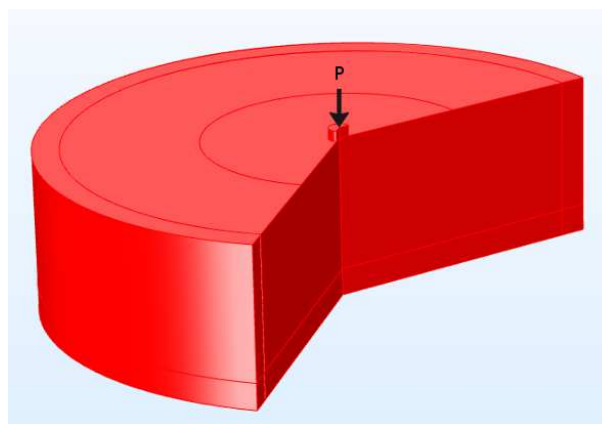


Figura 11: Modelo realizado en COMSOL

Las propiedades del suelo consideradas son las siguientes:

$$\rho = 1800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad E = 112,5 \text{MPa} \quad \nu = 0,35 \quad (45)$$

Las propiedades del hormigón que forma la base:

$$\rho = 2400 \frac{kg}{m^3} \quad E = 25,300 MPa \quad \nu = 0,2 \quad (46)$$

La carga de impacto aplicada:

$$P(t) = 100 KN \sin \left(78,54 \frac{1}{s} t \right) \quad t \leq 0,04s \quad (47)$$

Con los datos del suelo se obtienen los valores de las velocidades de propagación de las ondas. De la Ec. (16) se obtiene:

$$\lambda = 97,22 MPa \quad G = 41,66 Mpa \quad (48)$$

Con lo cual, reemplazando en Ec. (17) y en Ec. (22) se obtienen:

$$v_p = 316,7 \frac{m}{s} \quad (49)$$

$$v_s = 152,1 \frac{m}{s} \quad (50)$$

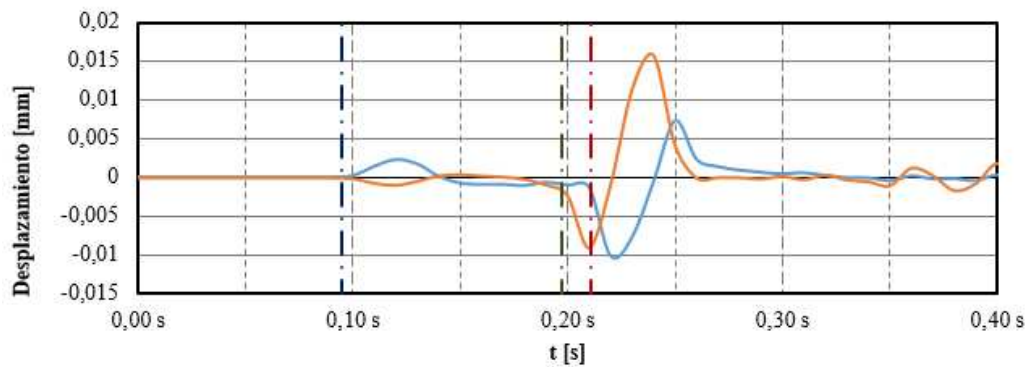
Aplicando las ecuaciones Ec. (29) y Ec. (30) se obtiene una única raíz real para V^2 , por lo que resulta:

$$V = 0,935 \rightarrow v_r = 142,2 \frac{m}{s} \quad (51)$$

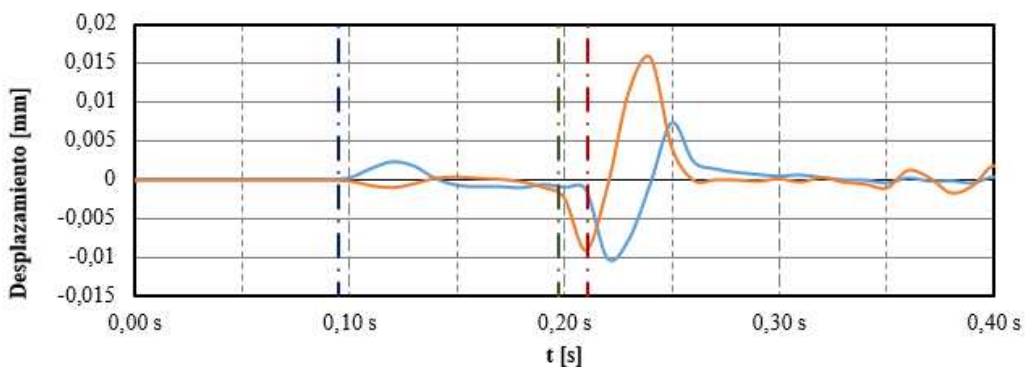
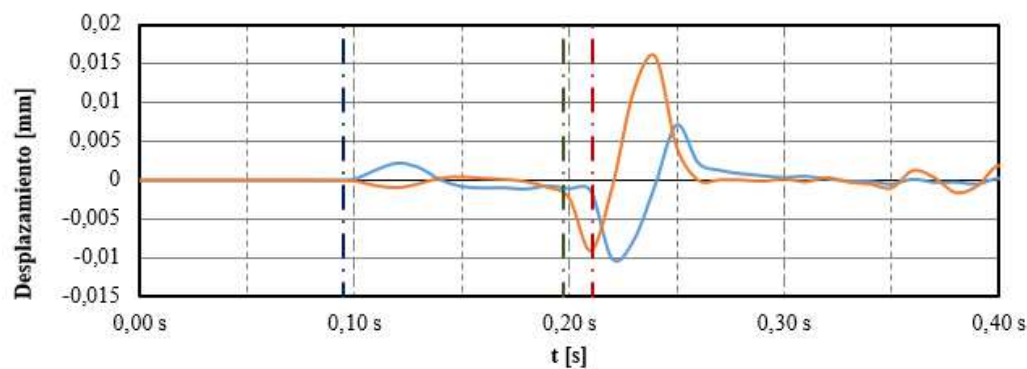
Se modela en COMSOL utilizando la componente 2D axisimétrico y la física de mecánica de sólidos. Se utiliza el material elástico lineal con las definiciones respectivas tanto para el hormigón como para el suelo. Al suelo se lo modela de 40 m de ancho y 30 m de profundidad, con el extremo superior libre. El extremo inferior y el lateral, que no es el eje de simetría rotacional, se agregan dominios de elementos infinitos los cuales simulan la continuidad del macizo de suelo en el infinito. El mallado se realiza con elementos cuadrangulares libre con restricción de tamaño a 0,4 m por lado del elemento.

La computadora empleada, consta de un procesador Intel ® Core™ i7-4790K, memoria RAM de 16 GB DDR3 a 1.600 MHz corriendo un sistema operativo Windows 10 ® de 64 bits. Todos los modelos fueron procesados en igualdad de condiciones, con uso exclusivo del sistema.

En la Fig. (12) se grafican los resultados obtenidos para los desplazamientos u y w para los distintos métodos analizados para el punto que se ubica sobre la superficie a 30 m del eje rotacional. Las gráficas resultan muy similares entre sí y a la vez similares a las que se encuentran en la bibliografía (Das y Ramana, 2010), ver Fig (6). Además se agregan de referencia el tiempo teórico de llegada de las ondas, con las velocidades calculadas anteriormente.



(a) RK4

(b) α -generalizado

(c) BDF

— u — w — Onda-P — Onda-S — Onda-R

(d) Referencias

Figura 12: Desplazamiento u y w para distintos métodos y paso 0,0001 s

Puede apreciarse que a partir de los 0,35 s se observan pequeñas oscilaciones en los desplazamientos. Esto es debido a que los límites de dominios infinitos no absorben la perturbación en su totalidad sino que reflejan un pequeño porcentaje de la misma, por lo que continúan apareciendo desplazamientos en el sistema, aún luego del paso de la onda.

Los tiempos de procesamiento obtenidos para el cálculo con cada uno de los métodos, con un paso de $h = 0,0001$, se reproducen en la Tab. (3). Contrario a lo que se obtuvo en el punto anterior, el método más rápido resultó el α -generalizado, seguido por el BDF y finalmente por

RK4. Esto es debido a que el primero está optimizado para aplicar a modelos de mayor escala que los demás.

Métodos	Tiempo procesamiento
RK4	366 Min
Alfa	208 Min
BDF	295 Min

Tabla 3: Tiempos de procesamiento de los distintos métodos

Para los puntos que se ubican a 30 m del eje rotacional, se analiza la atenuación del desplazamiento en función de la profundidad. En la Fig. (13) se muestran los resultados para el método RK4. El caso de la componente vertical, o desplazamiento w , la atenuación resultante es similar a la que se observa en la Fig. (5). En cambio, en el caso de la componente horizontal, o desplazamiento u , la mínima relación aparece a mayor profundidad que lo esperado.

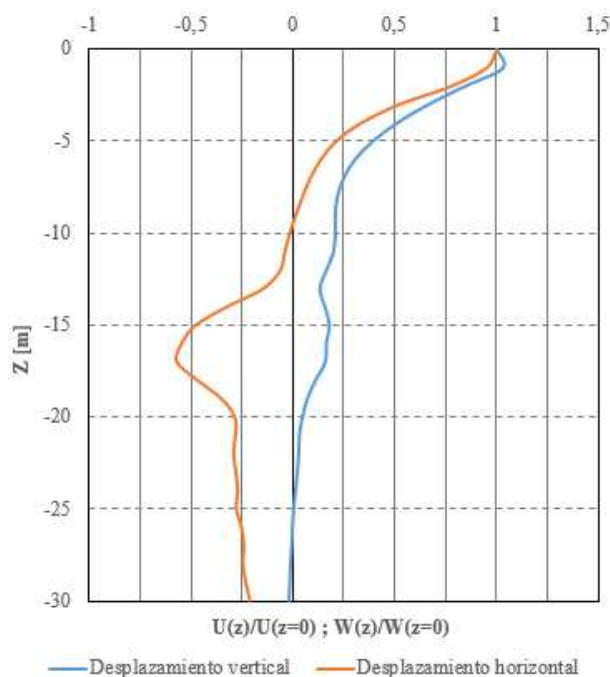
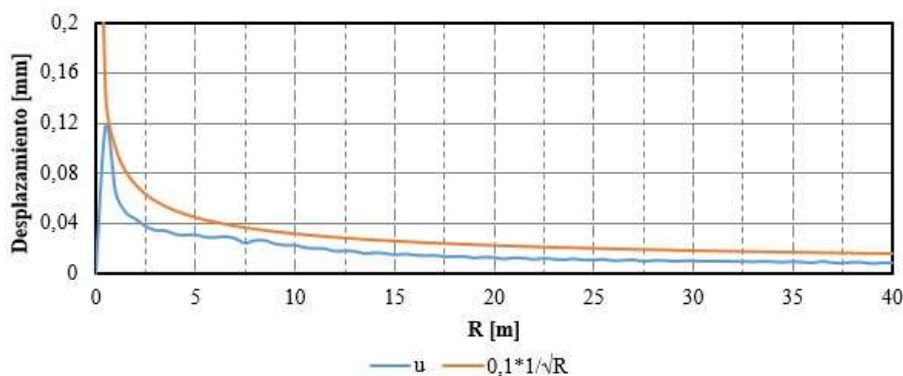
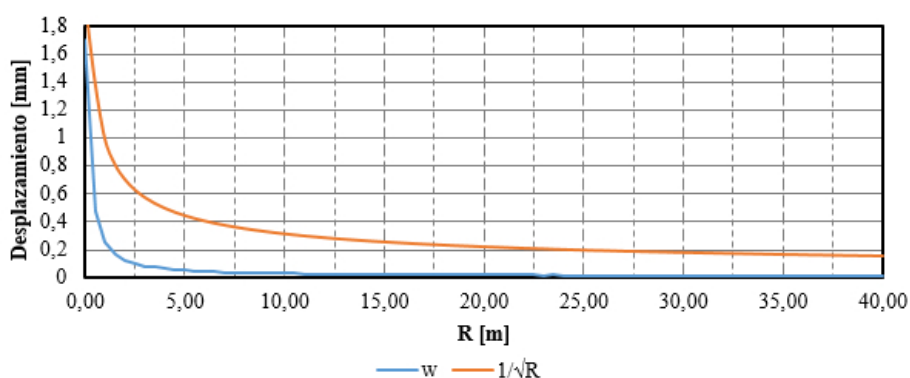


Figura 13: Atenuación de ondas-R con la profundidad

En la Fig. (14) se observa la variación de los desplazamientos máximos horizontales y verticales en función de la distancia, producto del paso de la Onda-R. Puede observarse que existe una variación proporcional a $\frac{1}{\sqrt{R}}$ en ambos caso, cómo se mencionó anteriormente.



(a) Atenuación de desplazamiento horizontal



(b) Atenuación de desplazamiento vertical

Figura 14: Atenuación de la onda-R con la distancia

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron distintos métodos de integración para dos ejemplos donde se produce el fenómeno de propagación de ondas en medios elásticos lineales e isótropos, con el fin de concluir cual es más conveniente para captar el fenómeno y poder predecir de mejor forma las perturbaciones que se genera.

En el ejemplo de transmisión de ondas unidimensionales en una barra, de material elástico lineal, los resultados obtenidos fueron coincidentes con la solución analítica, para los tres métodos de integración. Si bien el método de integración más rápido para un paso de tiempo determinado resulta ser el método BDF, el mismo resulta ser el más acotado en rango de estabilidad. Por el contrario, el método α - generalizado resulta estable para todo el rango adoptado. El método explícito de Runge-Kutta de orden cuatro fue el más lento, pero resulta estable por debajo de un paso de integración límite. En virtud del rango de estabilidad del método α - generalizado, se comprueba la aparición de perturbaciones por la integración con pasos numéricos distintos al que resulta de la respectiva relación de Courant. Resulta que los pasos máximos que permiten por estabilidad los métodos BDF y RK4 son un orden menor que los que pasos de integración que surgen de la relación de Courant y para los cuales se debería encontrar la solución sin perturbación.

En la aplicación del caso axisimétrico, una carga puntual de impacto rápido se aplica sobre una base de hormigón la cual yace sobre un medio elástico semi-infinito, con propiedades elásticas propias de un suelo, también se obtienen resultados satisfactorios en relación a los teóricos,

en las distintas comparaciones realizadas. Se comparan la variación de los desplazamientos de un punto superficial en el tiempo, las velocidades de propagación de las distintas ondas en el medio y la atenuación, tanto radial como en profundidad, de las ondas de Rayleigh. Contrario a lo obtenido para el caso unidimensional, el método que tuvo el menor tiempo de procesamiento fue el método de α - generalizado, seguido por el BDF y el más lento volvió a resultar el RK4.

En resumen, los resultados obtenidos fueron satisfactorios, lo cual alienta utilizar la herramienta en problemas más complejos, utilizando modelos de suelos no lineales, otros tipos de fundaciones y cargas aplicadas más realistas, estructuras receptoras de las perturbaciones, estratificaciones en suelos e interposición de barreras para la atenuación. Además, en futuros trabajos, se buscará, mediante la realización de ensayos, la verificación cuantitativa de los resultados de algún modelo.

REFERENCIAS

- Bertero R., Lehmann A., Verri A., Vaquero S., y Mussat J. Vibraciones en edificios cercanos originadas por espectáculos musicales en estadios. *Memorias 21 Jornadas de Ingeniería Estructural, AIE*, páginas T-006, 2010.
- Bertero R., Mussat J., Verri A., y Lehmann A. Vibraciones en edificios originadas por la hinca de tablestacas en centros urbanos. *Memorias 22 Jornadas de Ingeniería Estructural, AIE*, páginas T-053, 2012.
- Chung J. y Hulbert G.M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized - α method. *Journal of Applied Mechanics*, 60:371–375, 1993.
- Comsol. *Reference Manual*. COMSOL, 2012.
- Das B. y Ramana G. *Principles of Soil Dynamics*. Cengage Learning, 2010.
- Gérardin M. y Rixen D. *Mechanical Vibrations*. Wiley, 1994.
- Jansen K.E.W.C.H. y Hulbert G.M. A generalized - alpha method for integrating the filtered navier-stokes equations with stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:305–319, 2000.
- Lamb H. *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 1904.
- Möller O., Ascheri J., y Poliotti M. Predicción numérica de vibraciones en estructuras producidas por fuentes distantes. *XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones ENIEF 2014. Publicado en Mecánica Computacional Vol. XXXIII, AMCA*, páginas 1666–1670, 2014.