

## APLICACIÓN DE TRANSFORMADA CONTINUA WAVELET EN LA DETECCIÓN DE FISURAS EN ESTRUCTURAS DE VIGAS

**Alejandro R. Ratazzi<sup>a</sup>, Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>, Carlos A. Rossit<sup>a,b</sup>, Santiago Maiz<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), Bahía Blanca, Argentina.*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Bahía Blanca, Argentina.*

*alejandro.ratazzi@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, carrossit@criba.edu.ar,  
santiagomaiz@gmail.com*

**Palabras Claves:** Viga cantiléver, fisura, vibraciones, vinculación elástico.

**Resumen.** A lo largo de las últimas décadas se ha desarrollado un enorme esfuerzo investigativo en la detección temprana de fisuras en estructuras civiles y elementos de maquinarias. En general, se basan en el estudio de los parámetros dinámicos de las estructuras que, como es sabido, son afectados por la pérdida de rigidez que ocasiona el daño. Una herramienta relativamente reciente en la evolución de dichos estudios es la utilización de la transformada wavelet en la evaluación del comportamiento dinámico de una estructura dañada. Es un análisis tiempo-frecuencia que proporciona información más detallada acerca de las señales no estacionarias que el tradicional análisis de Fourier que sólo brinda una representación frecuencial. En este trabajo se utilizan, por un lado el clásico método inverso y por otro lado el análisis mediante transformada continua wavelet (TCW) en la detección de daños en estructuras simples para estimar la localización y magnitud de fisuras. La eficiencia de los métodos aplicados se compara mediante valores determinados de manera experimental en un modelo construido al efecto.

## 1 INTRODUCCION

A lo largo de las últimas décadas se ha desarrollado un enorme esfuerzo investigativo en la detección temprana de fisuras en estructuras civiles y elementos de maquinarias. En general, se basan en el estudio de los parámetros dinámicos de las estructuras que, como es sabido, son afectados por la pérdida de rigidez que ocasiona el daño.

Uno de los métodos para detectar una fisura en una estructura, mediante las frecuencias naturales de la misma, es el denominado método inverso. Este tiene su base en la idea de que, tanto la ubicación como la profundidad de la grieta influyen en los cambios en las frecuencias naturales de una viga dañada. En consecuencia, una frecuencia particular podría corresponder a determinadas ubicación y profundidades de fisura. De esta manera por medio de los gráficos de contorno, en una cierta estructura y para valores dados de frecuencia se puede inferir las características de la fisura.

Se estudian las dos o tres primeras frecuencias naturales de la viga fisurada y se analizan a través de un gráfico de contorno. [Hu et al, \(1993\)](#), proponen encontrar la locación y el tamaño de la fisura por medio del punto de intersección de las curvas que relacionan las tres primeras frecuencias con los parámetros de la estructura. [Nandwana and Maiti, \(1997\)](#), utiliza este método para el análisis de una viga de sección variable. En este trabajo los errores obtenidos tanto de posición como de profundidad son aproximadamente del 3% y 4.5% respectivamente. [Owolabi et al. \(2003\)](#), realizaron estudios de medición de las tres primeras frecuencias sobre dos conjuntos de vigas de aluminio y su correspondiente amplitud, en este caso los errores entre lo experimental y lo predicho teóricamente son del orden de 0.1%. [Nahvi and Jabbari \(2005\)](#), detectaron fisuras por medio de las mediciones de laboratorio de una viga cantiléver. [Chen et al. \(2005\)](#), utilizan el método del punto de intersección de las tres frecuencias de forma experimental excitando una viga cantiléver por medio de un martillo. Los errores de locación y tamaño de la fisura son menores de 2 y 4 % respectivamente. También se pueden ver las contribuciones surgidas de la presente investigación: [Ratazzi et al. \(2013\)](#); [Rossit et al. \(2015\)](#).

La aplicación de la Transformada Wavelet (TW) al procesado de señales e imágenes es otra herramienta, muy reciente en el tiempo, para la detección temprana de fisuras en una estructura.

A finales de 1970, el ingeniero Jean Morlet, propuso una alternativa para la transformada de Fourier. Su propósito era la búsqueda de petróleo, y para ello necesitaba producir inicialmente vibraciones y analizar los ecos resultantes, cuyas frecuencias se correlacionaban con el grosor de las diferentes capas existentes bajo tierra.

Unos años después, Alex Grossmann, físico teórico especializado en mecánica cuántica, reconoció ciertas similitudes entre el trabajo de Morlet y los estados coherentes, y construyó una fórmula de inversión exacta para la transformada de Morlet.

En 1985, Yves Meyer, matemático, observó el trabajo desarrollado por J. Morlet y A. Grossmann, así como su fórmula de reconstrucción, y se dio cuenta de que era un redescubrimiento de la fórmula que Alberto Calderón había introducido en la década de 1960 en el análisis armónico.

En 1986 aparece el nombre de Stéphane G. Mallat, especializado en visión por ordenador y análisis de imagen, el cual se interesó rápidamente por las bases de wavelets y todas sus posibles aplicaciones.

En el campo de las vibraciones mecánicas, [Newland \(1994\)](#) fue uno de los primeros en aplicar (TW). [Wang and Deng \(1999\)](#), aplican el análisis de wavelet a la señal de la deflexión de una viga fisurada. [Douka et al \(2003\)](#), analizan analítica y experimentalmente una viga



$$Rm = \frac{EI}{h} \frac{1}{f(\alpha)}. \quad (2)$$

En donde definimos  $\alpha = h_c/h$ , con  $h_c$  como profundidad de la fisura y  $h$  altura de la sección rectangular.

La función  $f(\alpha)$  es de mucha importancia en nuestro trabajo, ya que es la que nos define la ley con la que varía la flexibilidad local con respecto a la profundidad del daño en la estructura. Esta es una función adimensional que en su forma general puede ser escrita como:

$$f(h_c / h) = a_0 \sum_{n=1}^{10} a_n (h_c / h)^n. \quad (3)$$

En este trabajo, por ser el más utilizado en la literatura, utilizaremos la fórmula de flexibilidad propuesta por [Chondros and Dimarogonas\(1998\)](#) que incorpora la influencia del coeficiente de Poisson  $\nu$  del material:

$$\beta_c = \frac{6\pi(1-\nu^2)h}{EI} f(\alpha), \quad (4)$$

en donde

$$f(\alpha) = 0.6272 \alpha^2 - 1.04533 \alpha^3 + 4.5948 \alpha^4 - 9.973 \alpha^5 + 20.2948 \alpha^6 - 33.0351 \alpha^7 + 47.1063 \alpha^8 - 40.7556 \alpha^9 + 19.6 \alpha^{10}. \quad (5)$$

### 3 MODELO EXPERIMENTAL

Se analizó una viga cantiléver, en el Laboratorio de Vibraciones de la Universidad Nacional del Sur, confeccionada por una planchuela de acero de 5/8 "× 1/8" ( $b=15.875\text{mm}$ ,  $h=3.175\text{mm}$ ), sección transversal  $4.064 \times 10^{-5} \text{mts}^2$ . El empotramiento se materializó por medio de una mordaza, construida con dos planchuelas de acero, sujeta a una mesa de trabajo como vemos en la [Figura 2](#).

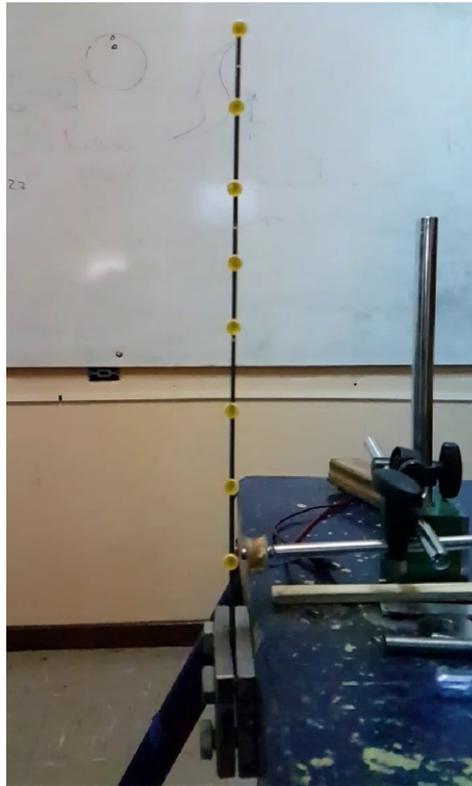


Figura. 2: Dispositivo Experimental.

Se provocó una fisura en la planchuela por medio de un corte con una hoja de sierra de 1 mm de espesor. Para poder lograr con mayor precisión la profundidad y uniformidad en el corte, se construyó una pieza de acero duro con una hendidura que nos sirvió de tope de profundidad del corte como vemos en la [Figura 3](#).

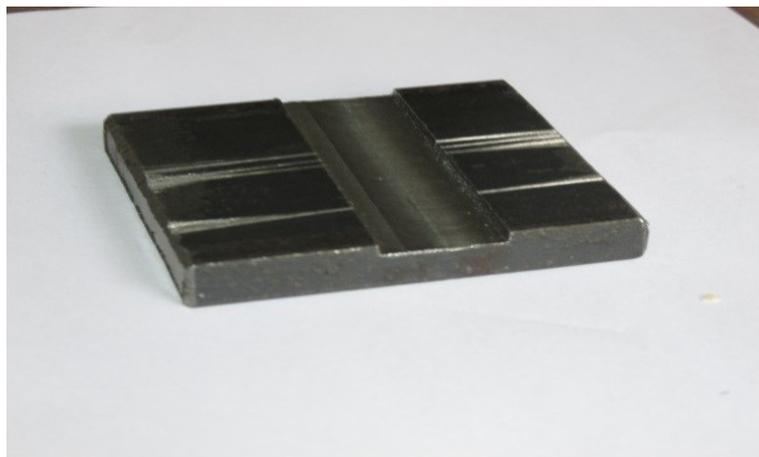


Figura 3. Pieza de acero para generar la profundidad de la fisura.

La planchuela se encastra en la hendidura y se corta transversalmente hasta la profundidad requerida.

### 3.1. DETECCIÓN DE FISURAS POR EL MÉTODO INVERSO

Debido a que en aplicaciones dinámicas, el valor del módulo de Elasticidad  $E$  y de la densidad  $\rho$  del material empleado están siempre involucrados a través de la relación  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  que es la velocidad de propagación de una onda en un medio elástico unidimensional, para obtener sus valores se optó por el siguiente procedimiento:

Se construyó una viga de  $360 \text{ mm}$  de longitud libre y rígidamente empotrada en uno de sus extremos. Como es sabido que el autovalor de una viga cantiléver es igual a  $1.8751$ , Blevins (2001), se midió experimentalmente el valor de la primera frecuencia de ese modelo. Con el fin de no perturbar el comportamiento de la estructura, las mediciones se tomaron con un proximíter. El dispositivo empleado fue un Pro vibtech, TMO 180. La señal de desplazamiento fue leída y procesada con un analizador de vibraciones de dos canales VIBXPERT II, con 24bits de resolución y  $1.000 \text{ Hz}$  de frecuencia de muestreo.

Se realizaron varias mediciones; el promedio de los valores medidos en el modelo fue  $19.53 \text{ Hz}$ , con ello fue posible determinar la relación buscada, utilizando la conocida expresión de la ecuación de vibraciones libres:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \frac{1}{A} = \frac{h^2}{12};$$

$$19.53 \text{ Hz} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1.8751)^2}{(0.36 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{E(0.003175 \text{ m})^2}{\rho 12}}; \quad (6)$$

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4934.97 \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

Esta relación, que es la velocidad de una onda longitudinal en acero, fue utilizada en los parámetros mecánicos de los modelos experimentales de laboratorio.

Como ejemplo práctico se tomaron los datos de las tres primeras frecuencias naturales de la viga cantiléver, con una fisura en un tercio de la luz  $l_1/l=1/3$  y una profundidad de fisura  $\alpha = 0.30$  medidos en el laboratorio.

En la [Tabla 1](#), se muestran los tres primeros valores de frecuencia de la viga sin fisura. En la fila superior están ubicados los obtenidos experimentalmente y en la siguiente fila los calculados analíticamente.

$L_1/l$	$\alpha$	$R_m$	1	2	3	
			19.53	121.98	339.93	Experimental (Hz)
	S/F		19.68	123.35	345.39	Analítico (Hz)

Tabla 1: Primeras tres frecuencias naturales de la viga, obtenidas experimental y Analíticamente.

Para poder acoplar los resultados medidos, en el modelo experimental con el modelo matemático de resorte, normalizamos las frecuencias por medio del procedimiento “zero

setting”, utilizado por [Nandwana and Maiti en 1997](#). Obtenemos un factor  $Z_i$  mediante la relación entre la frecuencia teórica y la medida en el modelo experimental, para la viga no fisurada.

$$Z_i = \frac{f_{Teórico}}{f_{Medido}}. \quad (7)$$

En la [Tabla 2](#), tenemos los valores del factor  $Z$  y los de frecuencias corregida  $f_c$ , de los tres primeros modos de la viga fisurada. Con estos valores normalizados, armamos las curvas en función de la rigidez del resorte y la posición del mismo en la viga ( $R_m, l_l$ ).

Modelo	$\alpha$	Modos	$f$ -laboratorio	Factor-Z	$f_c$
		1	19.40	1.007	19.54
1	0.3	2	123.30	1.011	124.65
		3	340.9	1.016	346.35

Tabla 2: Valores de  $Z$  y  $f$ , para una relación de  $h_c/h$  igual a 0.30.

Incorporando los valores normalizados de frecuencia medidos en el laboratorio en el determinante ecuación característica obtenidos en la resolución del sistema, pueden obtenerse gráficas que representan los valores de dichos determinantes para distintas magnitudes de  $R_m$  y  $l_l$ .

En las [Figura 4 y 5](#) podemos ver los valores de  $R_m$  y  $l_l$  obtenidos por medio del método inverso para una profundidad de fisura de  $h_c/h = 0.30$ . Se utilizó un modelo analítico desarrollado para el estudio de vibraciones de pórticos planos con rótula intermedia [Ratazzi et al \(2013\)](#). El valor de la rigidez del resorte que simula la fisura, propuesto según la teoría de Chondros, es de  $R_m = 19 \text{ Kg m}$ . Por otro lado como ya mencionamos, la fisura fue provocada en el modelo experimental a una distancia del empotramiento de un tercio de la luz  $l_l = 0.12 \text{ m}$ .

Los valores adquiridos a partir del método inverso, con las frecuencias medidas en el modelo de laboratorio son;  $R_m = 18.85 \text{ Kg m}$  y  $l_l = 0.1016 \text{ m}$ .

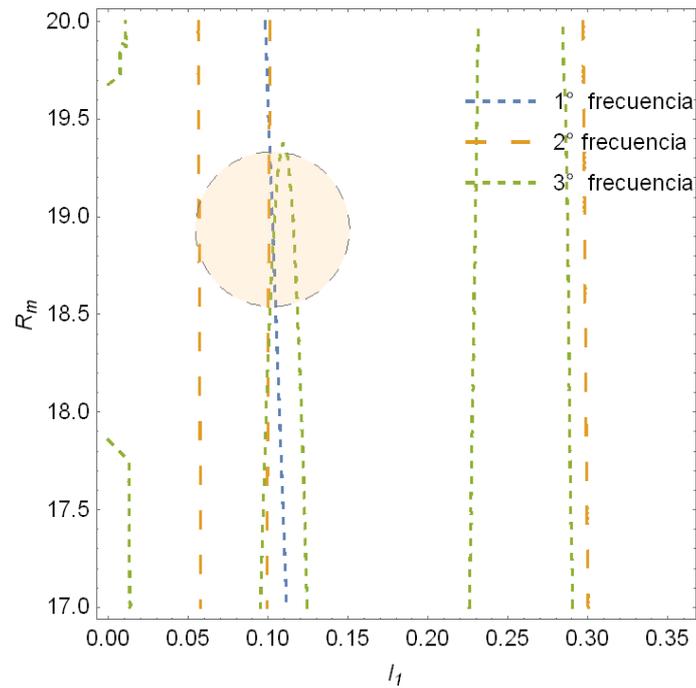


Figura 4, Gráfico de contorno  $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}$ , de:  $h_c/h = 0.30, l_1 = 0.33l$

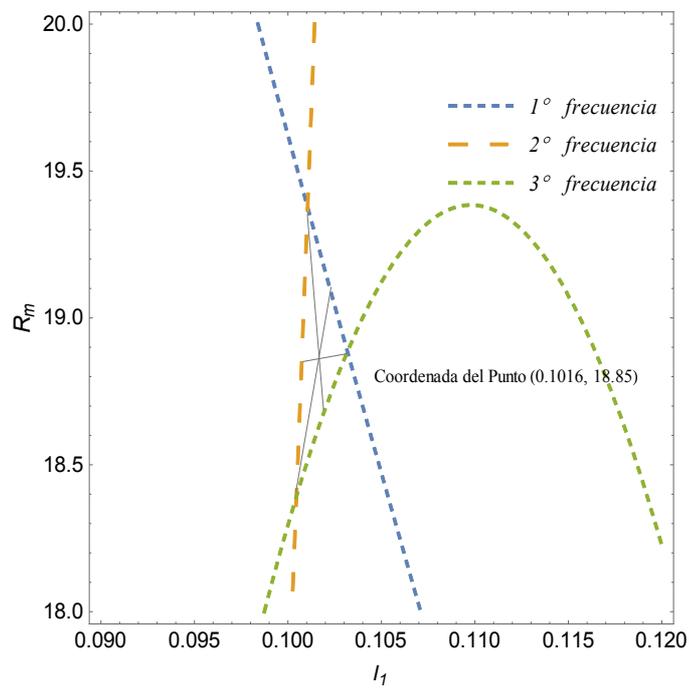


Figura 5, Zona ampliada del gráfico de contorno  $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}$ , de:  $h_c/h = 0.30, l_1 = 0.33l$

#### 4. DETECCIÓN DE FISURAS POR TRANSFORMADA ESPECIAL DE WAVELET.

Las señales transitorias son más complejas que las señales estacionarias. Para las primeras,

se utiliza la Transformada de Wavelet (TW) para su estudio. Las segundas se analizan a través de la conocida Transformada de Fourier (TF).

La Transformada Wavelet (TW) permite variar el tamaño de la ventana de análisis. Al igual que la Transformada de Fourier por Intervalos, la TW puede medir las variaciones en tiempo-frecuencia de las componentes espectrales, pero posee una resolución diferente.

El análisis por medio de las wavelet permite el uso de intervalos grandes de tiempo en aquellos segmentos en los que se requiere mayor precisión en baja frecuencia, y regiones más pequeñas en donde se requiere información en alta frecuencia.

La forma de comprender cómo opera la transformada de wavelet, es pensar en una señal temporal pasando por varios filtros que dividen a esta en porciones de alta y baja frecuencia.

En la TW aparece un parámetro de escala, que es similar a la escala utilizada en los mapas, las escalas grandes pertenecen a vistas globales y las chicas a detalles más refinados. Comparando en términos de frecuencia, la frecuencia baja corresponde a información global de la señal, mientras que la alta frecuencia corresponde a una información detallada de patrones ocultos de la señal.

La TW descompone la señal en pequeñas ondas. Estas son ondas localizadas, es decir son señales que tienden a cero en un corto tiempo. En resumen las wavelet son funciones que tienen dos propiedades importantes: oscilación y corta duración.

Una función  $\psi(x)$  es una función wavelet si y solo si su transformada de Fourier  $\Psi(\omega)$  satisface

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|^2} d\omega < +\infty, \quad (8)$$

Esta condición implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (9)$$

El valor de la función  $\psi(x)$  localizada en los dominios de tiempo y frecuencia es usada para crear la familia de wavelets

$$\psi_{u,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{u-x}{s}\right), \quad (10)$$

en donde  $s$  y  $u$  son números reales que denotan los parámetros de escala y traslación respectivamente.

La función original  $\psi(x)$  sin escalar ni trasladar se denomina la wavelet madre. La función  $\psi_{u,s}(x)$  será la función de comparación que reemplazan a las exponenciales complejas de la transformada de Fourier.

Si tenemos la señal  $f(x)$ , en donde la variable  $x$  es el tiempo o el espacio, podemos definir a la transformada continua de wavelet como la integral del producto de la señal y la función wavelet

$$W_f(u,s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^*\left(\frac{u-x}{s}\right) dx. \quad (11)$$

En donde  $W_f(u,s)$  son los coeficientes de wavelet.

#### 4.1. Adquisición experimental de la línea de deflexión de la viga fisurada

Tomamos la viga cantiléver fisurada a un tercio de la luz, modelada en el laboratorio, descrita en la sección 3, y estudiamos los desplazamientos de doce puntos distribuidos a lo largo de la misma. La elástica se obtuvo por medio de una técnica de medición óptica con el programa Tracker 4.94. Se dividió la viga de 360 mm de luz en 12 puntos de 3 mm de diámetro, como vemos en la Figura 2. Se midió la primer frecuencia natural de la viga (19.53 Hz), y con esta frecuencia fue excitada la viga con una bobina como se muestra en el esquema de la Figura 6.

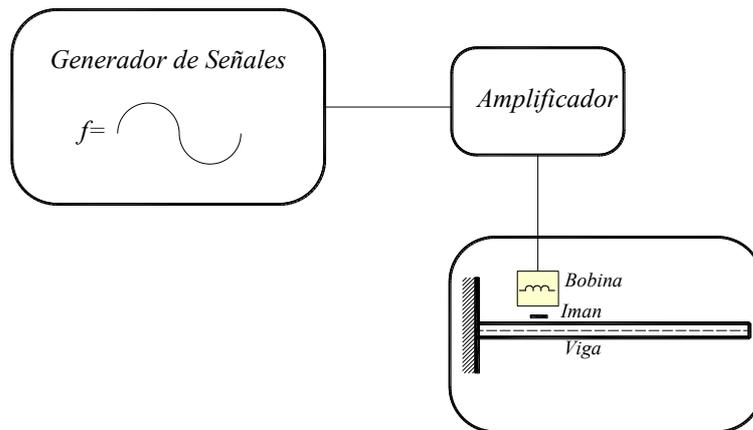


Figura 6, Esquema del laboratorio.

Este procedimiento se filmó en cámara lenta y fue capturado por un dispositivo con una resolución de 1280 x 720 píxeles, este además permite capturar 240 cuadros por segundo.

La filmación fue analizada con el software Tracker 4.94 (Copyright (C) 2007 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>). Se obtuvieron los máximos desplazamientos de los doce puntos distribuidos a lo largo de la viga, los cuales nos permite construir la elástica de la misma como vemos en la Figura 7.

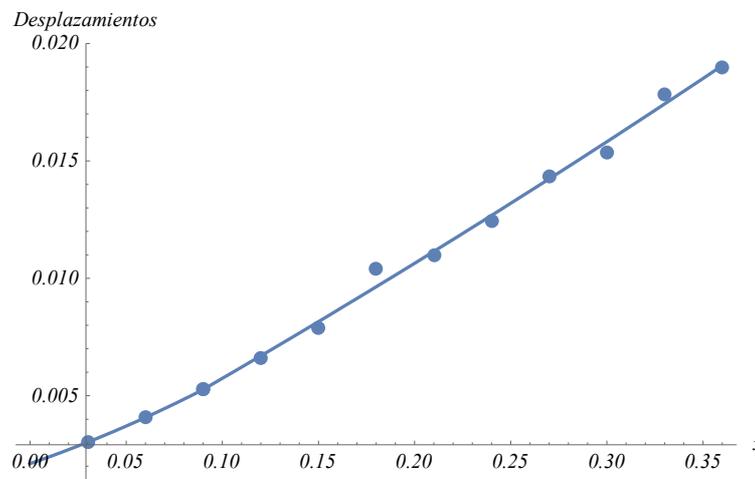


Figura 7, Desplazamientos máximo de la viga cantiléver.

#### 4.2. Aplicación de la transformada de wavelet a la señal.

Dado las características de las wavelet con respecto a los parámetros de escala y tiempo, éstas tienen la propiedad de detectar cambios sutiles en una señal. Los máximos desplazamientos de los 12 puntos del modelo experimental pueden ser tomados como una señal a la cual podemos aplicarle la TCW. Los cambios repentinos en los coeficientes de wavelet analizados puede significar la presencia de una grieta.

En el análisis y detección de una singularidad, los momentos de fuga tienen un protagonismo fundamental. Una wavelet tiene  $n$  momentos de fuga teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12)$$

Una wavelet con  $n$  momentos nulos es ortogonal a los polinomios de grado  $n-1$ . Si tenemos una señal que tiene una singularidad en un punto determinado  $u$ , esto significa, que la señal no es diferenciable en ese punto, y que los coeficientes de la transformada continua de wavelet toman un valor muy alto.

Mallat (1998) demostró por medio de un teorema que: Una función  $\psi(t)$  con un decrecimiento rápido posee  $n$  momentos nulos si, y sólo si, existe  $\theta(t)$  de soporte compacto, de decrecimiento rápido, tal que:

$$\psi(x) = (-1)^n \frac{d^n \theta(x)}{dx^n}. \quad (13)$$

Como consecuencia

$$Wy(u, s) = s^n \frac{d^n}{dx^n} (y \times \bar{\theta}_s)(u), \quad (14)$$

Con

$$\bar{\theta}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{-t}{s}\right). \quad (15)$$

Además,  $\psi(t)$  tiene  $n$  momentos nulos si, y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0. \quad (16)$$

Al producto de  $y \times \bar{\theta}_s$  se lo denomina consolución de las funciones y se lo interpreta como un promedio de la señal, sobre un dominio proporcional a la escala  $s$ .

El tipo de wavelet seleccionada y el número de momentos nulos es fundamental para realizar el análisis por medio de wavelet.

En este trabajo analizaremos la viga cantiléver fisurada a un tercio de la luz, por medio de la Mexican Hat wavelet, esta función presenta al menos dos momentos de fuga nulos que nos permite obtener buenos resultados en la aplicación de la transformada. La deflexión de la viga de laboratorio es aproximada mediante la unión de polinomios de grado tres, por medio de un algoritmo en el software Mathematica 10. Las Figuras 8-11 nos

muestran, la transformada de la deflexión  $y(x)$  por medio de la Mexican Hat wavelet y sus tres momentos de fuga.

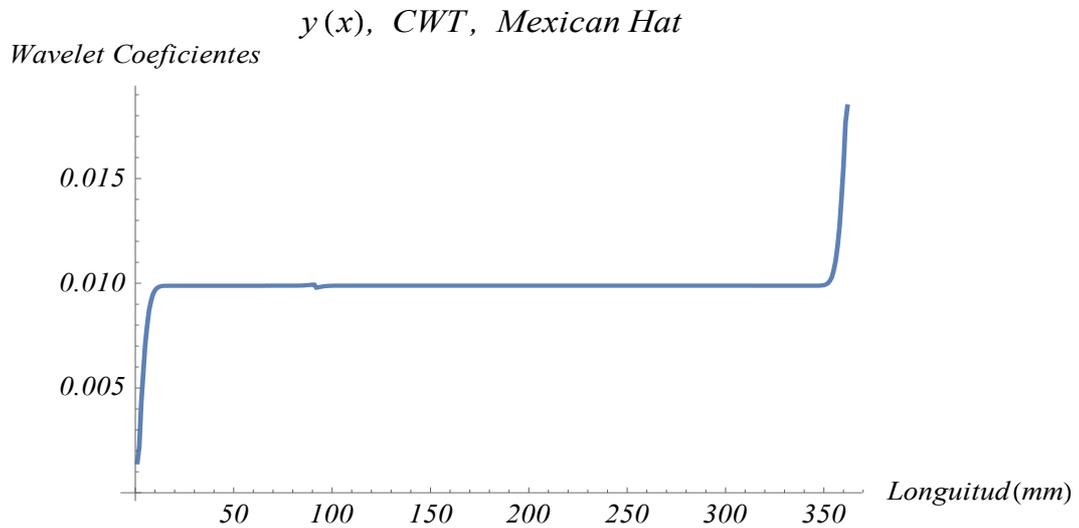


Figura 8, Transformada wavelet de la elástica.

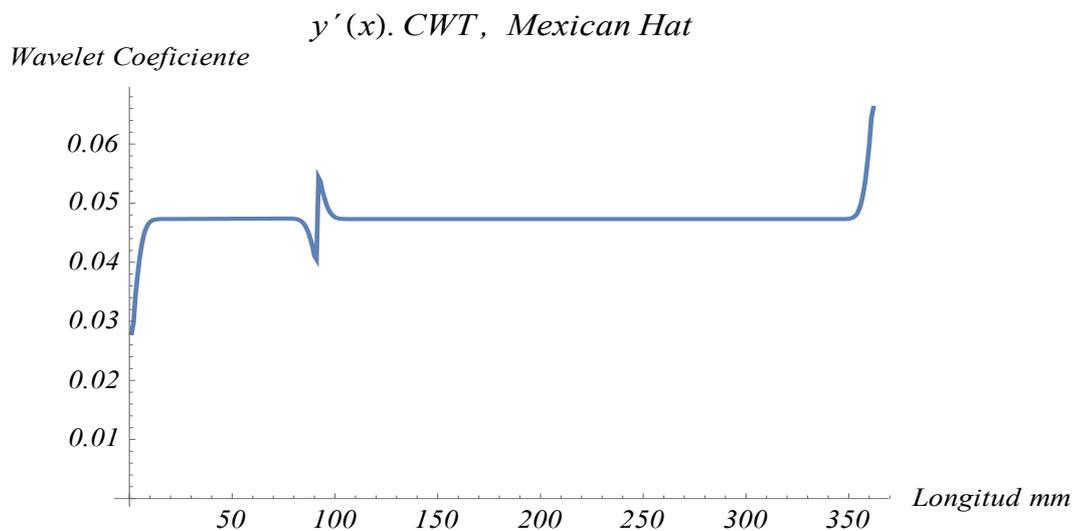


Figura 9, Transformada wavelet del primer momento de fuga.

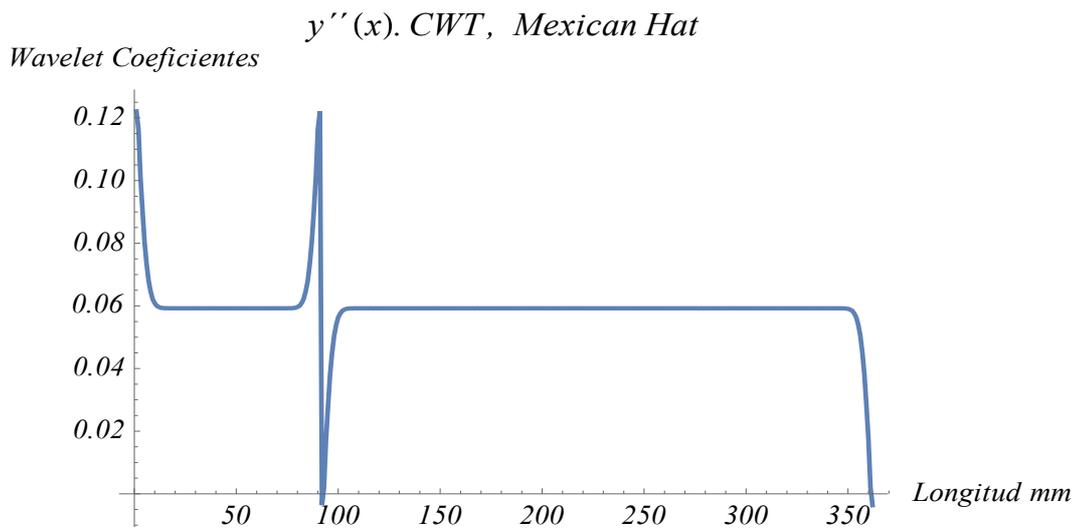


Figura 10, Transformada wavelet del segundo momento de fuga.

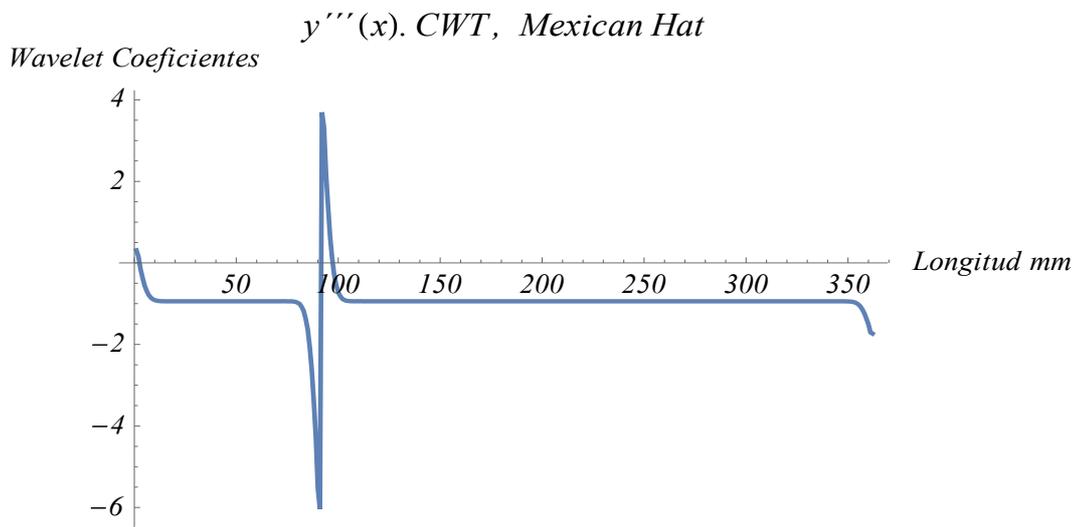


Figura 11, Transformada wavelet del tercer momento de fuga.

A continuación, en las [Figura 12 y 13](#), podemos identificar el punto en donde está la fisura en el modelo, a los 100 mm, por medio del pico que se produce en scalagrama. Mientras que en la vista en tres dimensiones de la transformada de wavelet podemos ver a la altura de 100 mm como los valores de los coeficientes alcanzan un valor máximo. Por medio de este procedimiento podemos detectar fácilmente la ubicación de la fisura. Para poder obtener el grado de penetración de la fisura hallamos la frecuencia natural del modelo de laboratorio. Por medio de una resolución analítica, por ejemplo a través del determinante ecuación característica, como se desarrolló para el método inverso, simulando un resorte rotacional en la posición de la fisura obtenemos su flexibilidad que nos lleva a una aproximación de la profundidad buscada.

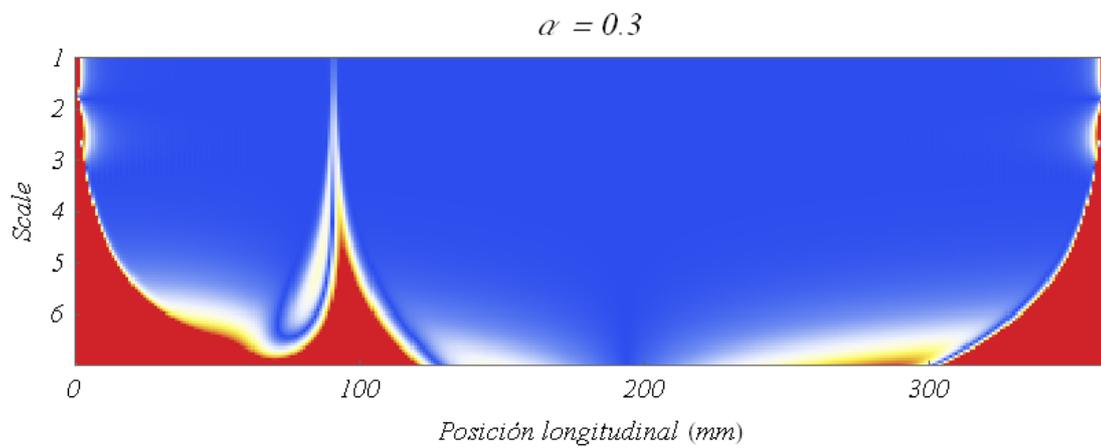


Figura 12, Escanograma Transformada wavelet.

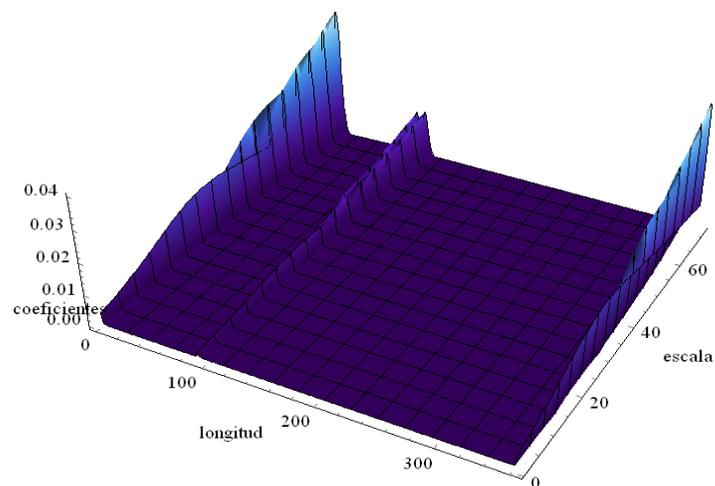


Figura 13, Gráfico en tres dimensiones de los coeficientes de la Transformada wavelet.

## 5 CONCLUSIONES

Lo desarrollado en este trabajo, nos permitió analizar el comportamiento de una viga cantiléver dañada, a través de las variaciones de sus frecuencias naturales y de la deflexión de la viga vibrando en el primer modo de vibración. De esta forma presentamos dos herramientas valederas para poder realizar la detección temprana de una fisura. Se simuló una fisura por medio de la teoría del resorte rotacional, propuesta por Chondros y Dimarogonas, los valores fueron comparados con los medidos en un modelo experimental. Los errores porcentuales de los valores de  $R_m$  y  $l_1$  entre los valores del modelo teórico, y de laboratorio no supera el 1.5 %.

En primer lugar se aplicó el método inverso combinando, el desarrollo teórico aplicando algoritmos en el software mathematica, y los resultados medidos en la viga construida en el laboratorio. Los resultados obtenidos en la experiencia fueron muy buenos. Los puntos de cruce de las tres curvas de frecuencia en los gráficos, se aproximan con un error porcentual menor al 7 %.

En segundo lugar se detectó la fisura por el método basado en las transformadas continuas de wavelet. La transformada fue aplicada a la forma modal de la primera frecuencia natural de la viga cantiléver fisurada. La curva se obtuvo por medio de un método óptico, combinado con un algoritmo desarrollado en el software mathematica.

La función de onda Mexican Hat con tres momentos de fuga proporcionó una manera clara y precisa de detectar la posición de la grieta, arrojando valores máximos de los coeficientes. La técnica de detección de ondas hace posible detectar grietas que requieren un mínimo de datos de entrada, es decir, solamente la respuesta de la estructura. La precisión del método depende de la calidad de la filmación y resolución de la cámara, aunque nos proporciona una herramienta para obtener una primera aproximación para detectar una fisura.

## 6 AGRADECIMIENTOS.

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a la Comisión de Investigaciones Científicas-CIC de la Prov. De Buenos Aires, bajo cuyos auspicios se desarrolló el presente trabajo.

## 7 REFERENCIAS

- Andreas U , Baragatti P, Casini P and Iacoviello D, Experimental damage evaluation of open and fatigue cracks of multi-cracked beams by using wavelet transform of static response via image analysis; *Struct. Control Health Monit. Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com)*. DOI: 10.1002/stc.1902, 2016.
- Blevins R., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Publishing, Malabar, Fla, USA, 2001.
- Caddemi S., Calì I., Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks, *Journal of Sound and Vibration*; 327 473–489, 2009.
- Chen X. F., He Z. J., Xiang J. W., Experiments on crack identification in cantilever beams. *Experimental Mechanics*, 45- 3: 295-300, 2005.
- Chondros T.G., Dimarogonas A.D., Yao J. , A continuous cracked beam vibration theor.

- Journal of Sound and Vibration* ,215 17–34, 1998.
- Douka E, Loutridis S, Trochidis A, Crack identification in beams using wavelet analysis. *International Journal of Solid and Structures*;40:3557–69, 2003.
- Hu J., Liang J, An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics. *Journal of the Franklin Institute*; 330 841–853,1993.
- Mallat S, A wavelet tour of signal processing. *Academic Press*; 1998.
- Nahvi H., Jabbari M., Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *International Journal of Mechanical Sciences* , 47-10: 2005 1477–1497, 2005.
- Nandwana B.P. , Maiti S.K., Modelling of vibration of beam in presence of inclined edge or internal crack for its possible detection based on frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 58- 3:193-205, 1997.
- Newland, D. E. ,Wavelet analysis of vibration. Part 1: theory. *Journal of Vibration Acoustics*, 116, 409–416 ,1994a.
- Newland, D. E., Wavelet analysis of vibration. Part 2: wavelet maps. *Journal of Vibration Acoustics*, 116, 417–424, 1994b.
- Ovanesoava AV, Suarez LE, Application of wavelet transform to damage detection in frame structures. *Engineering Structures*;26:39–49, 2004.
- Owolabi, G.M., Swamidass, A.S.J., and Seshadri, R., Crack Detection in Beams Using Changes in Frequencies and Amplitudes of Frequency Response Functions. *Journal of Sound and Vibration* 265: 1–22, 2003.
- Ratazzi A., Bambill B. and Rossit C., Vibrations of a Frame Structure With a Crack,. *Mecánica Computacional* Volumen XXXII, 3563-3574, 2013.
- Rossit C.A., Bambill D.V., Ratazzi A.R., and Maiz S., Vibrations of L-Shaped Beam Structures With a Crack: Analytical Approach and Experimental Validation. *Experimental Techniques (2015)* © 2015, Society for Experimental Mechanics, doi:10.1111/ext.12157, 2015.
- Rucka M, Wilde K., Crack identification using wavelets on experimental static deflection profiles. *Engineering Structures*; 28(2):279–288, 2006.
- Xiang J, Liang M.,Wavelet-Based Detection of Beam Cracks Using Modal Shape and Frequency Measurements. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* ;27 439–454, 2012.
- Wang Q, Deng X., Damage detection with spatial wavelets. *International Journal of Solid and Structures*;36:3443–68, 1999.
- Wolfram MATHEMATICA 9 software. Version 9, Copyright 1988–2012.
- Tracker 4.94 (Copyright (C) 2007 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>).
- Wu N, Wang Q., Experimental studies on damage detection of beam structures with wavelet transform. *International Journal of Engineering Sciences*; 49:253-261, 2011.