

## FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO FINITO JERÁRQUICO PARA EL ANÁLISIS DE VIGAS LAMINADAS

Ezequiel D. Sánchez<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup>, Facundo J. Bellomo<sup>a</sup> y Sergio Oller<sup>b</sup>

<sup>a</sup>INIQUI (CONICET), ICMASA, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, [iniqui@unsa.edu.ar](mailto:iniqui@unsa.edu.ar), <http://www.ing.unsa.edu.ar/>

<sup>b</sup>CIMNE – UPC, Universidad Politécnica de Cataluña, C/Jordi Girona 1-3, Ed. C1, Campus Nord, 08034, Barcelona, España, [cimne@cimne.upc.edu](mailto:cimne@cimne.upc.edu), <http://www.cimne.com/>

**Palabras Clave:** Vigas Laminadas, Método de los Elementos Finitos, Teorías de Orden Superior.

**Resumen.** En este trabajo se desarrolla un elemento finito jerárquico general, apropiado para el análisis estático y dinámico de vigas laminadas. La formulación se basa en el empleo de varias teorías de orden superior por corte (HBT), en el marco de las teorías de lámina única equivalente y mediante un tratamiento unificado. El elemento finito jerárquico se construye con funciones de soporte local, enriquecidas con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. Las teorías HBT incorporadas en la cinemática del elemento tienen la propiedad de anular las tensiones tangenciales en las superficies superior e inferior de las vigas laminadas, por lo que no es necesario el empleo de factores de corrección por corte. El elemento finito obtenido está libre de bloqueo por cortante, siendo posible el estudio de vigas delgadas laminadas con la misma formulación, sin recurrir al empleo de integración reducida. Se presentan resultados del análisis estático y dinámico de vigas laminadas simétricas y no simétricas, con diferentes configuraciones mecánicas y geométricas, lo que permite mostrar la precisión y aplicabilidad de la formulación desarrollada.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los compuestos laminados reforzados con fibras, desempeñan un papel que gradualmente se hace más importante en el diseño de elementos estructurales en diferentes áreas de la ingeniería tales como: mecánica, civil, aeroespacial y diversas aplicaciones industriales. Lo anterior se debe a múltiples razones, entre las que se destacan la alta relación resistencia - peso, alta rigidez en relación al peso, y la direccionalidad capaz de proporcionar los acoplamientos elásticos deseados a través de la selección adecuada de las láminas y de su secuencia de laminación. Sin embargo, la caracterización precisa de las capacidades estructurales de los materiales compuestos laminados es más difícil de determinar que si se trata de materiales isótropos. En particular, las vigas laminadas presentan una considerable deformación cortante transversal, lo que hace necesario el empleo de teorías avanzadas para poder realizar análisis precisos.

Físicamente, las vigas laminadas con secuencias de apilamiento arbitrario, son estructuras tridimensionales para las que los métodos de la teoría de la elasticidad son aplicables (Cheng et al, 1989). Sin embargo, las soluciones basadas en ecuaciones 3D para vigas compuestas son difíciles de obtener y, en la mayoría de los casos, las expresiones resultantes son inmanejables. Así, a través de hipótesis apropiadas respecto de la cinemática de los desplazamientos y del estado tenso-deformacional en el espesor de la viga, es posible reducir el estado 3D de la viga a diferentes representaciones 1D, con razonable precisión. Estos modelos se denominan de lámina única equivalente (ESL) y modelos por capa (LW). Siguiendo la clasificación más común, dentro de los modelos ESL se distinguen tres categorías principales, la teoría clásica de vigas (CBT), la teoría de primer orden (FBT) y las teorías de orden superior (HBT). La CBT, conocida como la teoría de Euler-Bernoulli es la teoría más simple y sólo puede aplicarse a vigas delgadas. La CBT subestima la deflexión y sobreestima las frecuencias naturales debido a que ignora los efectos de la deformación por cortante (Kapania and Raciti, 1989; Ghugal and Shimpi, 2001; Vinson and Sierakowski, 1986). Para considerar los efectos de la deformación por corte transversal en vigas, se desarrolló la teoría de Timoshenko (FBT), en la que la distribución de las deformaciones por corte transversal se supone constante en el espesor de la viga, siendo necesario el empleo de factores de corrección para representar de manera apropiada la energía de deformación correspondiente (Vinson and Sierakowski, 1986; Chandrashekhara, 1990; Omidvar, 1998). Las soluciones obtenidas empleando FBT dependen fuertemente del factor de corrección por corte empleado, cuyo valor no es una constante sino que depende de las propiedades materiales, la secuencia de laminación, las condiciones de contorno, etc. Las limitaciones propias de la teoría clásica y de primer orden estimularon el desarrollo de teorías de deformación por corte de orden superior para evitar el empleo de factores de corrección, incluir el alabeo de la sección transversal y considerar una variación más realista de las deformaciones y tensiones cortantes transversales en el espesor de las vigas. Se han desarrollado numerosas teorías de orden superior con diferentes funciones para la variación del desplazamiento en la coordenada normal al eje de la viga, incluyendo expresiones polinómicas (Reddy, 1984; Kant et al., 1997; Matsunaga, 2001), funciones trigonométricas (Touratier, 1992; Vidal and Polit, 2008), exponenciales (Karama et al., 2003; Aydogdu, 2009), etc.

Finalmente, en los modelos LW se considera cada capa del laminado como una viga y se aplican condiciones de compatibilidad entre las láminas adyacentes. Si bien los modelos LW son más realistas en cuanto a la distribución de tensiones obtenidas, presentan un elevado número de variables de desplazamiento en relación al número de láminas, resultando computacionalmente muy costosos para muchas aplicaciones prácticas. Un caso particular de

modelos LW lo constituyen los denominados modelos zig-zag, que contienen un número constante de variables cinemáticas (independientemente del número de capas). En estas teorías el número de incógnitas adicionales se elimina a través de forzar la continuidad de las componentes de tensiones cortantes transversales entre láminas adyacentes y de anular las tensiones en las superficies libres de la viga. Ejemplos de teorías LW pueden verse en varios artículos (Shimpi and Ghugal, 2001; Plagianakos and Saravanos, 2004; Chrysochoidis and Saravanos 2007; Tahani, 2007).

Para el análisis de estructuras compuestas laminadas se han propuesto diferentes enfoques analíticos (Pagano 1969, 1970; Pagano and Hatfield, 1972; Jiarang and Jianqiao, 1990; Leissa and Kang, 2002; Kang and Shim, 2004) y enfoques numéricos. Algunos de los métodos numéricos típicos, que se han aplicado con éxito en el análisis de estructuras laminadas, son el método de los elementos finitos (Lezgy-Nazargah et al., 2011; Beheshti-Aval and Lezgy-Nazargah, 2012, 2013; Beheshti-Aval et al., 2013), el método de las diferencias finitas (Numayr et al., 2004; Wu et al., 2008), los métodos *meshfree* (Bui et al., 2011), los métodos de cuadratura diferencial (Alibeigloo and Madoliat, 2009), el método de Ritz (Nallim et al, 2005; Nallim and Oller, 2008; Venini and Mariani, 1997; Hu et al., 2004; Rango et al., 2015), etc. Entre estas técnicas, el método de los elementos finitos es un enfoque muy potente y confiable, que tiene mucha aplicación en la solución de este tipo de estructuras. Sin embargo, se presentan algunas desventajas inherentes a la utilización del proceso de mallado para la obtención de una geometría discretizada. Este proceso a menudo conduce a errores geométricos. Por otra parte, la generación de mallas, el re-mallado y lograr suavidad para la continuidad de elementos con aproximaciones arbitrarias, son tareas engorrosas e implican procedimientos que requieren mucho tiempo cuando se emplea el análisis tradicional de elementos finitos (Lezgy-Nazargah et al, 2015). Para superar estos inconvenientes, existe varias alternativas, entre estas se puede mencionar el enfoque isogeométrico introducido recientemente por Hughes et al. (2005), o el empleo de la versión jerárquica del MEF (Rango et al, 2015). Esta última metodología es la que se emplea en este trabajo.

Por otra parte, un análisis exhaustivo de la literatura, permite concluir que la mayor parte de los trabajos anteriores se limitan a vigas laminadas simétricas. Aunque se han desarrollado varios modelos para analizar vigas con teorías de orden superior, muchos de ellos están restringidos a al empleo de una teoría específica y son aplicables a condiciones particulares de carga, contorno o esquemas de laminación.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una formulación unificada para el análisis estático y dinámico de vigas arbitrariamente laminadas. Para ello se emplea una formulación débil basada en el Principio de los Trabajos Virtuales y se deriva un algoritmo empleando elementos finitos jerárquicos y tomando como base diversas teorías de orden superior de deformación por corte. Se consideran los acoplamientos elásticos extensionales-flexionales, flexionales-torsionales y extensionales-torsionales. La formulación propuesta es particularmente atractiva ya que pueden estudiarse vigas con cualquier relación de esbeltez sin que se produzca bloqueo por cortante, obteniéndose, como caso particular los resultados correspondientes a vigas de Bernoulli. Para estudiar la convergencia, y analizar la eficiencia y precisión de la de la formulación propuesta, así como explorar su aplicabilidad, se presentan ejemplos de vigas con diferentes condiciones de laminación, tipos de carga, condiciones de contorno, etc.

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA MECÁNICO

### 2.1 Cinemática

En este estudio se considera una viga compuesta laminada, tal como la representada en la Figura 1. La viga laminada está constituida por un número arbitrario de láminas ortótropas, donde los ejes principales de cada lámina pueden estar orientados en un ángulo cualquiera respecto del eje  $x$ . Se emplea un sistema de ejes cartesiano ortogonal con el eje  $x$  coincidente con el eje de la viga y el origen en el plano medio de la viga. La longitud, el ancho y el espesor de la viga se representan mediante  $L$ ,  $b$  y  $h$ , respectivamente.

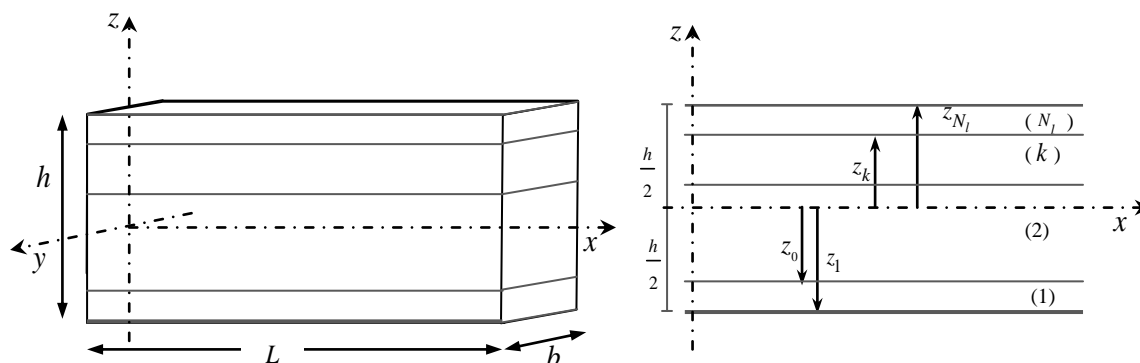


Figura 1: Geometría, ejes coordenados y notación para la viga laminada

La cinemática de la deformación de la viga laminada está caracterizada por los desplazamientos de su línea media y ocurre en el plano  $x - z$ . Las componentes del campo de desplazamiento se basan en el empleo de teorías generales de deformación por corte, adoptando la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f_i(z) \phi_0(x, t) \\
 u_2(x, z, t) &= 0 \\
 u_3(x, z, t) &= w_0(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde  $u_1, u_2, u_3$  son los desplazamientos de cualquier punto material en el dominio de la viga a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente;  $u_0, w_0$  son los desplazamientos longitudinal (eje  $x$ ) y transversal (eje  $z$ ) de puntos genéricos ubicados sobre la línea media de la viga;  $\phi_0$  es la rotación adicional de la normal a la sección transversal alrededor del eje  $y$ ;  $f_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  representa las funciones de corte que determinan la distribución de la deformación por corte transversal en el espesor de la viga. Si se considera a esta función como cero o uno se puede obtener la teoría de clásica de Bernoulli (TBC) o la teoría de Timoshenko (TBT), respectivamente, como casos particulares.

El planteo que aquí se propone admite la consideración de cualquier teoría HBT, pero en este trabajo se emplean cuatro que son abarcativas de los diferentes tipos existentes, es decir una trigonométrica, una exponencial, una polinómica y una hiperbólica, dadas por:

$$f_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{Arya et al. (2002)} \quad (2)$$

$$f_2(z) = h \arctan\left(\frac{2z}{h}\right) - z \quad \text{Thai et al. (2014)} \quad (3)$$

$$f_3(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{Karama (2009)} \quad (4)$$

$$f_4(z) = z - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \quad \text{Reddy (1984)} \quad (5)$$

En los ejemplos (Secciones 4 y 5) se denomina a cada teoría como: HBT1 (ec. (2)), HBT2 (ec. (3)), HBT3 (ec. (4)) y HBT4 (ec. (5)).

## 2.2 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas lineales elásticas 3D de la  $k$ -ésima lámina en coordenadas globales pueden expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & 0 \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

donde  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) denotan, respectivamente, las componentes de los tensores de tensión y deformación infinitesimales;  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) son las constantes materiales elásticas.

En una viga la relación entre ancho y longitud es pequeña por lo que es posible considerar para cada lámina un estado de tensiones planas y esto lleva a las siguientes relaciones constitutivas 1D:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Los coeficientes de la matriz constitutiva  $\bar{\mathbf{C}}$  se describen en el Apéndice A.

## 2.3 Principio de los Trabajos Virtuales

La expresión del trabajo virtual está dada por:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \iint_A \left( \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz}^{(k)} \right) dA dx - \int_0^L q(x) \delta u_3 dx \\ & - \int_0^L \iint_A \rho \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right) dA dx = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $q(x)$  representa la carga transversal distribuida a lo largo de la viga,  $A$  es el área de la sección transversal,  $t$  denota el tiempo,  $\delta\varepsilon_{xx}, \delta\gamma_{xz}, \delta u_1, \delta u_3$  son las deformaciones y desplazamientos virtuales y  $\rho$  es la densidad del material.

Las componentes de deformaciones infinitesimales se obtienen a partir de la cinemática definida en la Sección 2.1. Las componentes del tensor de deformación para un punto arbitrario de la lámina  $k$ -ésima de la viga están dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{df_i(z)}{dz} \phi_0 \quad (11)$$

Las funciones de deflexión de las ec. (1), a efectos de considerar vibración libre, se asumen periódicas en el tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} u_0 &= u \sin(\omega t), \\ w_0 &= w \sin(\omega t), \\ \phi_0 &= \phi \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

Reemplazando en la ec. (9) las relaciones constitutivas dadas por las ecs. (10) y (11), e integrando respecto del eje coordenado  $z$  se obtiene para el análisis estático:

$$0 = \int_0^L (\delta\varepsilon^T \mathbf{A}\varepsilon + \delta\phi B_1\phi) dx - \int_0^L \delta w q(x) dx \quad (13)$$

donde

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{13}, A_{23}, A_{33}) = \iint_A \bar{Q}_{11}^{(k)}(1, z, z^2, f(z), zf(z), zf(z)) dA \quad (15)$$

$$B_1 = \iint_A \bar{Q}_{55}^{(k)} [f(z)_{,z}]^2 dA$$

Reemplazando en la ec. (9) las ecs. (12) e integrando respecto del eje coordenado  $z$ , se obtienen para el análisis de vibración libre:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^L (\delta\varepsilon^T \mathbf{A}\varepsilon + \delta\phi B_1\phi) dx - \omega^2 \left( I_0 \int_L u \delta u dx - I_1 \int_L (u \delta w_{,x} + w_{,x} \delta u) dx + I_2 \int_L w_{,x} \delta w_{,x} dx \right. \\ \left. - I_3 \int_L (w_{,x} \delta \phi + \phi \delta w_{,x}) dx + I_4 \int_L (u \delta \phi + \phi \delta u) dx + I_5 \int_L \phi \delta \phi dx + I_0 \int_L w \delta w dx \right) \end{aligned} \quad (16)$$

donde

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \iint_A \rho (1, z, z^2, zf(z), f(z), [f(z)]^2) dA \quad (17)$$

### 3 ELEMENTO FINITO JERÁRQUICO

Para la aproximación de las tres variables cinemáticas nodales,  $u$ ,  $w$  y  $\phi$  del campo de desplazamientos, se propone emplear macro-elementos finitos basados en la versión jerárquica del MEF:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_u} N_i^u(\xi) c_i^u = \mathbf{N}^{u^T} \cdot \mathbf{c}^u \\ w(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_w} N_i^w(\xi) c_i^w = \mathbf{N}^{w^T} \cdot \mathbf{c}^w \\ \phi(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_\phi} N_i^\phi(\xi) c_i^\phi = \mathbf{N}^{\phi^T} \cdot \mathbf{c}^\phi \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $-1 \leq \xi \leq 1$  es la coordenada natural a lo largo de la longitud  $L$  de la viga dada por  $\xi = 2\frac{x}{L} - 1$ ;  $c_i^*$  ( $*$  =  $u, w, \phi$ ) son los desplazamientos generalizados;  $n_*$  son las cantidades de términos en las funciones de aproximación para las tres variables nodales y  $N_i^*$  son las funciones de forma que se describen en el párrafo siguiente.

Las primeras funciones de forma son funciones de soporte local. Para las aproximaciones de  $u$  y de  $\phi$  se emplean idénticas funciones, a las que se designan:  $N_1^u(\xi)$  y  $N_2^u(\xi)$ , que son los polinomios lineales clásicos de Lagrange. Para la aproximación de  $w$ ,  $N_i^w(\xi)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), se emplean polinomios de Hermite. Luego, se adicionan polinomios ortogonales de Gram-Schmidt (GS) para formular un macro-elemento finito de viga enriquecido:  $N_i^u(\xi)$  ( $i = 3 \dots n_u, n_\phi$ ) y  $N_i^w(\xi)$  ( $i = 5 \dots n_w$ ). El grado del primer polinomio de GS es 4 para el desplazamiento transversal ( $w$ ) y 2 para el desplazamiento longitudinal ( $u$ ) y para la rotación ( $\phi$ ). Estos polinomios se determinan de tal manera que tengan una contribución nula a los desplazamientos generalizados correspondientes a los nodos, es decir a los extremos de la viga. Los demás elementos de los conjuntos de polinomios ortogonales característicos se generan siguiendo el procedimiento de GS (Nallim, et al., 2005; Nallim and Oller, 2008; Rango et al., 2013). De esta manera, los modos jerárquicos contribuyen sólo a los desplazamientos generalizados internos del elemento y, por lo tanto, no afectan los desplazamientos en los nodos de borde (Bardell et al., 1996a; Bardell et al., 1996b). Los polinomios de soporte local y los de enriquecimiento se muestran a continuación, en la Tabla 1.

Polinomios de Hermite para $w$	$N_1^w = 0.25(2 - 3\xi + \xi^3)$
	$N_2^w = 0.25(2 + 3\xi - \xi^3)$
	$N_3^w = 0.25(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$
	$N_4^w = 0.25(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$
Polinomios de Lagrange $u, \phi$	$N_1^u = 0.5(-\xi + 1)$
	$N_2^u = 0.5(\xi + 1)$
Primer polinomio de Gram-Schmidt para $w$	$N_5^w = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$

Primer polinomio de Gram-Schmidt para $u, \phi$	$N_3^u = -1 + \xi^2$
---	----------------------

Tabla 1. Polinomios de soporte local y primeros polinomios de Gram-Schmidt para las tres variables nodales

Debido a que en la ec. (18) las funciones de forma  $N_i^u(\xi)$  para  $i=1,2$  y  $N_i^w(\xi)$  para  $i=1,\dots,4$  son funciones de soporte local, y que las funciones de enriquecimiento tienen una contribución nula a los desplazamientos generalizados nodales, resulta:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u|_{\xi=-1} = c_1^u, & u_2 &= u|_{\xi=+1} = c_2^u, \\
 \phi_1 &= \phi|_{\xi=-1} = c_1^\phi, & \phi_2 &= \phi|_{\xi=+1} = c_2^\phi, \\
 w_1 &= w|_{\xi=-1} = c_1^w, & w_2 &= w|_{\xi=+1} = c_2^w, \\
 \frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-1} &= c_3^w, & \frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=+1} &= c_4^w
 \end{aligned} \tag{19}$$

donde se designa como nodo 1 al que corresponde a la coordenada natural  $\xi = -1$  y el nodo 2 corresponde a la coordenada natural  $\xi = +1$ .

Reemplazando la ec. (18) en la ec. (13) y simplificando las variables cinemáticas nodales virtuales se llega a:

$$\underbrace{\left( \int_{-1}^1 \left( \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{A} \mathbf{D}^{(1)T} + \mathbf{N}^u B_1 \mathbf{N}^{uT} \right) \frac{L}{2} d\xi \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{c} - \underbrace{\int_{-1}^1 \mathbf{N}^w q \frac{L}{2} d\xi}_{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \tag{20}$$

donde

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{L^2} \mathbf{N}^w_{,\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} \end{bmatrix} \tag{21}$$

La ec. (20) es la ecuación de equilibrio en el formato estándar:

$$\mathbf{Kc} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{22}$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{c}$  es el vector de desplazamientos generalizados y  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas equivalentes. La matriz de rigidez está dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{uu} & \mathbf{k}^{uw} & \mathbf{k}^{u\phi} \\ & \mathbf{k}^{ww} & \mathbf{k}^{w\phi} \\ sym & & \mathbf{k}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \tag{23}$$

donde

$$k_{ij}^{uu} = A_{11} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi, \quad i=1, n_u; j=1, n_u$$



$$\begin{aligned}
 k_{ij}^{uw} &= -A_{12} \frac{4}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{d^2 N_j^w}{d\xi^2} d\xi, \quad i = 1, n_u; j = 1, n_w \\
 k_{ij}^{u\phi} &= A_{13} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi, \quad i = 1, n_u; j = 1, n_\phi \\
 k_{ij}^{ww} &= A_{22} \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_i^w}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j^w}{d\xi^2} d\xi, \quad i = 1, n_w; j = 1, n_w \\
 k_{ij}^{w\phi} &= -A_{23} \frac{4}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_i^w}{d\xi^2} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi, \quad i = 1, n_w; j = 1, n_\phi \\
 k_{ij}^{\phi\phi} &= A_{33} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi + B_1 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^u d\xi, \quad i = 1, n_\theta; j = 1, n_\theta
 \end{aligned} \tag{24}$$

El vector de desplazamientos generalizados está dado por:

$$\mathbf{c} = \left[ c_1^u, c_2^u, \dots, c_{n_u}^u, c_1^w, c_2^w, \dots, c_{n_w}^w, c_1^\phi, c_2^\phi, \dots, c_{n_\phi}^\phi \right]^T \tag{25}$$

de los cuales sólo los dos primeros para  $u$  y  $\phi$  representan desplazamientos generalizados con un significado físico concreto (desplazamientos longitudinales y giros de los nodos extremos), mientras que para  $w$  los cuatro primeros representan los desplazamientos transversales y sus correspondientes derivadas en los extremos de la viga. Los restantes son variables generalizadas utilizadas por los polinomios de GS para la aproximación interna del elemento.

El vector de fuerzas para carga transversal está dado por

$$\mathbf{f} = \frac{L}{2} \left[ \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right]_{1:n_u} \left[ q \mathbf{N} \right]_{1:n_w} \left[ \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right]_{1:n_\phi}^T \tag{26}$$

Por otra parte, para el caso de vibración libre, reemplazando ec. (18) en ec. (16), teniendo en cuenta la ec. (12) y cancelando los desplazamientos virtuales se obtiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= \underbrace{\left( \int_{-1}^1 \left( \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{A} \mathbf{D}^{(1)T} + \mathbf{N}^u B_1 \mathbf{N}^{uT} \right) \frac{L}{2} d\xi \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{c} - \\
 &\omega^2 \underbrace{\left[ \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}^{(1)} - \left( \mathbf{B}^{(4)} + \mathbf{B}^{(4)T} \right) + \mathbf{B}^{(2)} - \left( \mathbf{B}^{(5)} + \mathbf{B}^{(5)T} \right) + \left[ \mathbf{B}^{(6)} + \mathbf{B}^{(6)T} \right] + \mathbf{B}^{(3)} \right) d\xi \right]}_{\mathbf{M}} \mathbf{c}
 \end{aligned} \tag{27}$$

donde

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u I_0 \mathbf{N}^{uT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{4}{L^2} \mathbf{N}^w {}_{,\xi} I_2 \mathbf{N}^{wT} {}_{,\xi} + \mathbf{N}^w I_0 \mathbf{N}^{wT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^u I_5 \mathbf{N}^{uT} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{2}{L} \mathbf{N}^w_{,\xi} I_1 \mathbf{N}^{uT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2}{L} \mathbf{N}^u I_3 \mathbf{N}^w_{,\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^u I_4 \mathbf{N}^{uT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

El problema de valores propios es

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (29)$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa y  $\mathbf{c}$  es el vector de desplazamientos generalizados. La matriz de masa está dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{uu} & \mathbf{m}^{uw} & \mathbf{m}^{u\phi} \\ & \mathbf{m}^{ww} & \mathbf{m}^{w\phi} \\ sym & & \mathbf{m}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde

$$\begin{aligned} m_{ij}^{uu} &= I_0 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi, \quad i=1, n_u; j=1, n_u \\ m_{ij}^{uw} &= -I_1 \int_{-1}^1 N_i^u \frac{dN_j^{wT}}{d\xi} d\xi, \quad i=1, n_u; j=1, n_w \\ m_{ij}^{u\phi} &= I_4 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi, \quad i=1, n_u; j=1, n_\phi \\ m_{ij}^{ww} &= I_2 \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^w}{d\xi} \frac{dN_j^{wT}}{d\xi} d\xi + I_0 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^w N_j^{wT} d\xi, \quad i=1, n_w; j=1, n_w \\ m_{ij}^{w\phi} &= -I_3 \int_{-1}^1 \frac{dN_i^w}{d\xi} N_j^{uT} d\xi, \quad i=1, n_w; j=1, n_\phi \\ m_{ij}^{\phi\phi} &= I_5 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi, \quad i=1, n_\phi; j=1, n_\phi \end{aligned} \quad (31)$$

#### 4 CONVERGENCIA Y VALIDACION

La formulación obtenida fue implementada en un programa desarrollado a tal fin. Para validar la metodología implementada y analizar la convergencia de resultados, se muestran a continuación los estudios numéricos realizados. Como primer caso se analiza la convergencia de las cuatro primeras frecuencias de vibración libre correspondiente a una viga laminada, en voladizo. La viga tiene una longitud  $L=0.1905 \text{ m}$  y una sección transversal  $h=3.175 \times 10^{-3} \text{ m}$  y ancho  $b=12.7 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Está constituida por laminado de material compuesto de grafito-epoxi, las fibras en cada lámina se encuentran rotadas  $15^\circ$  respecto del eje  $x$ , con una densidad  $\rho=1550.1 \text{ kg/cm}^3$ . Cada lámina tiene las siguientes propiedades mecánicas:

$$E_1 = 129.11 \times 10^9 \text{ Pa}, E_2 = 9.408 \times 10^9 \text{ Pa}, \nu_{12} = 0.30$$

$$G_{12} = 5.1568 \times 10^9 \text{ Pa}, G_{13} = 4.304 \times 10^9 \text{ Pa}, G_{23} = 2.541 \times 10^9 \text{ Pa}$$

siendo 1, 2 y 3 los ejes principales de ortotropía material.

En la Tabla 2 se resumen los resultados obtenidos para cada teoría, es decir empleando cuatro funciones diferentes para la definición del alabeo por corte transversal (ec. 2 a 5). Para estudiar la convergencia se incrementa gradualmente el número de polinomios de Gram-Schmidt en las funciones de aproximación. En todos los casos se trabaja con un único elemento finito que abarca toda la longitud de la viga, dejando fijas las funciones de soporte local, y se mejora la solución enriqueciendo el elemento. Los resultados obtenidos se comparan, a su vez, con los valores analíticos provenientes de una teoría de orden superior formulada por Jun Li et al (2014), donde se puede observar que con la primer teoría se logra una mejor aproximación mientras que con las demás la convergencia es más estable.

Modo	Teoría	Nº de Polinomios de Gram-Schmidt para cada variable cinemática						
		3	4	5	6	7	8	9
1	HBT 1	82.11	82.14	82.15	82.10	82.13	82.15	82.14
	HBT 2	82.18	82.20	82.19	82.18	82.18	82.18	82.18
	HBT 3	82.18	82.20	82.19	82.18	82.18	82.18	82.18
	HBT 4	82.18	82.18	82.18	82.18	82.17	82.16	82.16
	Jun Li et al (2014)							
2	HBT 1	512.53	512.50	512.41	512.40	512.39	512.36	512.34
	HBT 2	512.66	512.59	512.52	512.48	512.45	512.43	512.42
	HBT 3	512.64	512.56	512.49	512.45	512.43	512.41	512.39
	HBT 4	512.62	512.54	512.48	512.44	512.39	512.36	512.34
	Jun Li et al (2014)							
3	HBT 1	1459.11	1424.43	1424.32	1423.64	1423.41	1423.27	1423.16
	HBT 2	1459.43	1424.67	1424.56	1423.88	1423.67	1423.53	1423.43
	HBT 3	1459.26	1424.52	1424.40	1423.72	1423.51	1423.36	1423.26
	HBT 4	1459.15	1424.41	1424.29	1423.61	1423.38	1423.24	1423.14
	Jun Li et al (2014)							
4	HBT 1	2980.18	2921.73	2763.50	2763.43	2758.16	2757.39	2756.94
	HBT 2	2980.62	2922.74	2764.36	2764.30	2759.04	2758.28	2757.85
	HBT 3	2980.44	2922.08	2763.80	2763.74	2758.48	2757.71	2757.27
	HBT 4	2980.30	2921.60	2763.40	2763.34	2758.08	2757.29	2756.85
	Jun Li et al (2014)							

Tabla 2. Frecuencias naturales (en Hz) para viga laminada Empotrada - Libre

El segundo caso consiste en la verificación de las tres primeras frecuencias de vibración libre aplicando nueve polinomios de Gram-Schmidt para cada variable según el estudio de convergencia realizado, usando distintas condiciones de borde en una viga laminada de dos capas: simplemente apoyada (S-S), en voladizo (C-F), empotrada-simplemente apoyada (C-S) y empotrada en ambos extremos (C-C). En cada lámina las fibras están rotadas un ángulo de

45° respecto al eje longitudinal. La viga tiene una longitud  $L=0.11179\text{ m}$  y una sección transversal de altura  $h=3.38\times 10^{-3}\text{ m}$  y ancho  $b=12.7\times 10^{-3}\text{ m}$ . El material compuesto reforzado con fibra de vidrio tiene una densidad  $\rho=1968.9\text{ kg/m}^3$  y las siguientes propiedades mecánicas:

$$E_1 = 37.41\text{ GPa}, E_2 = 13.67\text{ GPa}, \nu_{12} = 0.30$$

$$G_{12} = 5.478\text{ GPa}, G_{13} = 6.03\text{ GPa}, G_{23} = 6.666\text{ GPa}$$

En la Tabla 3 se muestran los valores obtenidos para cada teoría (ecs. (2) a (5)) y los valores de referencia (Jun Li et al, 2008). Se puede apreciar excelente concordancia para todos los tipos de apoyos analizados, dentro de los cuales la segunda teoría resulta de mayor rigidez.

Cond. Borde	Modo	Teoría				
		HBT 1	HBT 2	HBT 3	HBT 4	Jun Li et al (2008)
S-S	1	338.20	338.20	338.20	338.20	338.20
	2	1347.00	1347.08	1347.03	1346.99	1347.02
	3	3009.50	3009.88	3009.63	3009.46	3009.51
C-F	1	120.56	120.57	120.57	120.57	120.58
	2	752.64	752.67	752.65	752.64	752.61
	3	2094.27	2094.49	2094.34	2094.24	2093.93
C-S	1	527.34	527.37	527.35	527.34	527.32
	2	1699.20	1699.37	1699.26	1699.19	1698.97
	3	3515.90	3516.55	3516.12	3515.83	3514.93
C-C	1	763.46	763.51	763.48	763.46	763.39
	2	2089.55	2089.85	2089.65	2089.51	2088.73
	3	4057.05	4058.06	4057.39	4056.92	4054.70

Tabla 3. Frecuencias naturales (en Hz) para viga laminada con distintas condiciones de borde

En el tercer caso se analiza la deflexión vertical  $w$ , la tensión normal  $\sigma_{xx}$  y la tensión tangencial  $\tau_{xz}$  para una viga laminada asimétrica (0/90), simplemente apoyada, sometida a una carga uniformemente distribuida  $q(x) = q_0$  y con una esbeltez  $L/h = 4$ . Las propiedades del material son las siguientes:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25, \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2, \nu_{12} = 0.25$$

Teoría	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
HBT 1	5.5315	40.5681	3.6491
HBT 2	5.3768	40.9000	3.7329
HBT 3	5.4636	40.7809	3.6813
HBT 4	5.5901	40.3146	3.6102
Mantari and Canales (2016)	5.5818	40.2431	3.6096

Tabla 4. Deflexiones  $\bar{w}(L/2)$ , tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}(L/2; h/2)$  y tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}(0; 0)$

para viga laminada asimétrica (0/90)

En la Tabla 4 se detallan los resultados obtenidos utilizando todas las teorías acompañados de los valores de referencia (Mantari and Canales, 2016) expresados en forma adimensional. Además en la Figura 2 se representan gráficamente los diagramas de tensiones correspondientes, donde se observa una muy buena concordancia, en especial la cuarta teoría que aplica una función polinómica. Las deflexiones, coordenadas y tensiones se adimensionalizan de la siguiente manera:

$$\bar{w} = \frac{100E_2h^3w}{q_0L^4}; \bar{z} = \frac{z}{h}; \bar{\sigma}_{xx} = \frac{b\sigma_{xx}}{q_0}; \bar{\tau}_{xz} = \frac{b\tau_{xz}}{q_0} \quad (32)$$

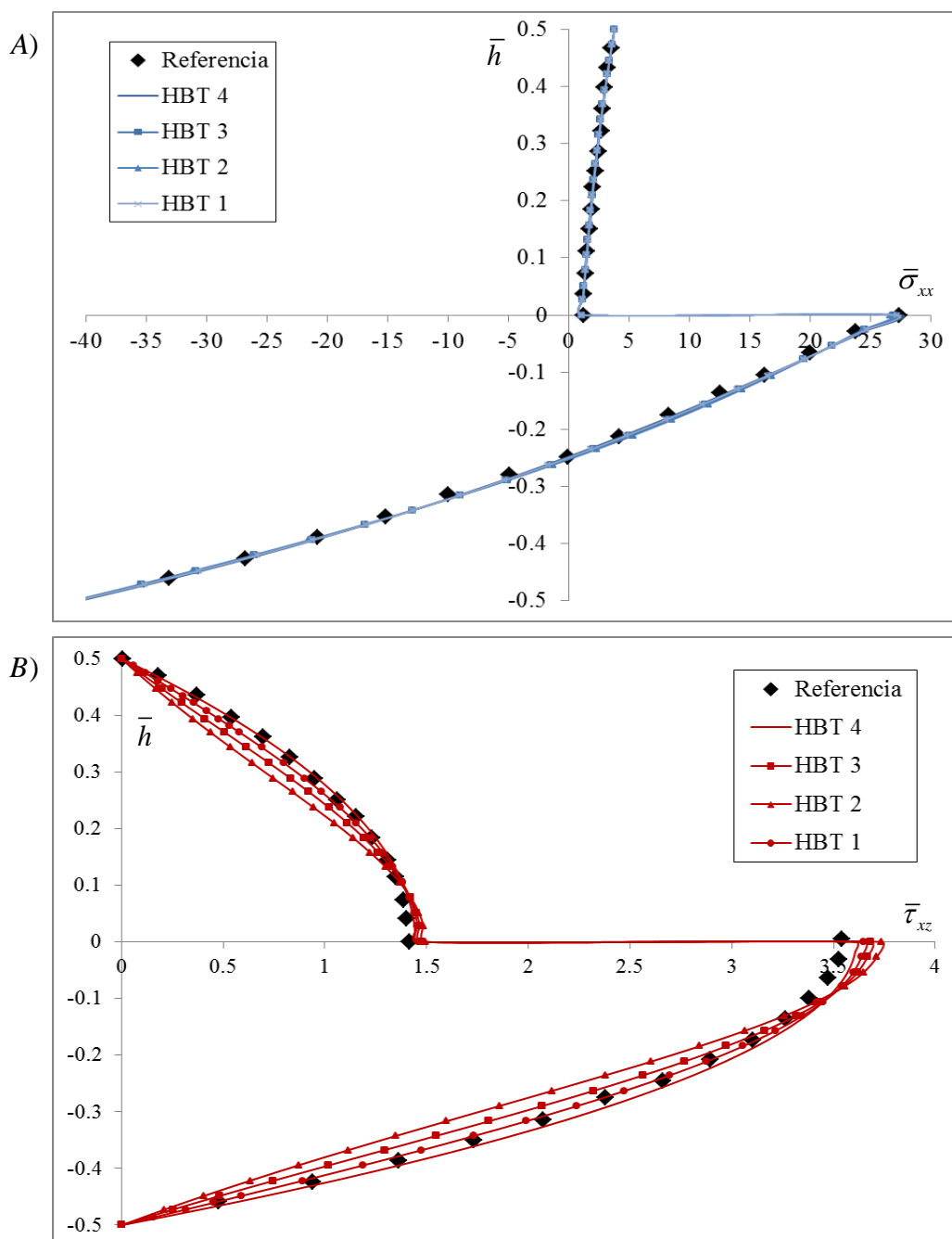


Figura 2. Diagramas de tensiones para viga laminada (0/90) A) Tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}(L/2)$ ; B) Tensiones tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}(0)$ ; ♦ Referencia: Mantari and Canales (2016)

En el último caso se estudia la deflexión vertical  $w$ , la tensión normal  $\sigma_{xx}$  y la tensión tangencial  $\tau_{xz}$  para una viga laminada simétrica (0/90/0) simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida y una esbeltez  $L/h = 5$ . Las propiedades mecánicas del material de cada lámina son las siguientes:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

En la Tabla 5 se detallan los resultados obtenidos utilizando todas las teorías acompañados de los valores de referencia (Vo and Tai Thai, 2012) expresados en la forma adimensional correspondiente. Además en la Figura 3 se representan gráficamente los diagramas de tensiones obtenidos, a lo largo de la altura de la sección transversal. En este caso las variables se adimensionalizan de la siguiente manera:

$$\bar{w} = \frac{100E_2bh^3w}{q_0L^4}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{bh^2\sigma_{xx}}{q_0L^2}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{bh\tau_{xz}}{q_0L} \quad (33)$$

Teoría	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
HBT 1	2.444	1.094	0.423
HBT 2	2.496	1.145	0.467
HBT 3	2.469	1.119	0.442
HBT 4	2.414	1.069	0.406
Vo and Tai Thai (2012)	2.414	1.067	0.4057

Tabla 5. Deflexiones  $\bar{w}(L/2)$ , tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}(L/2; h/2)$  y tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}(0; 0)$  para viga laminada simétrica (0/90/0)

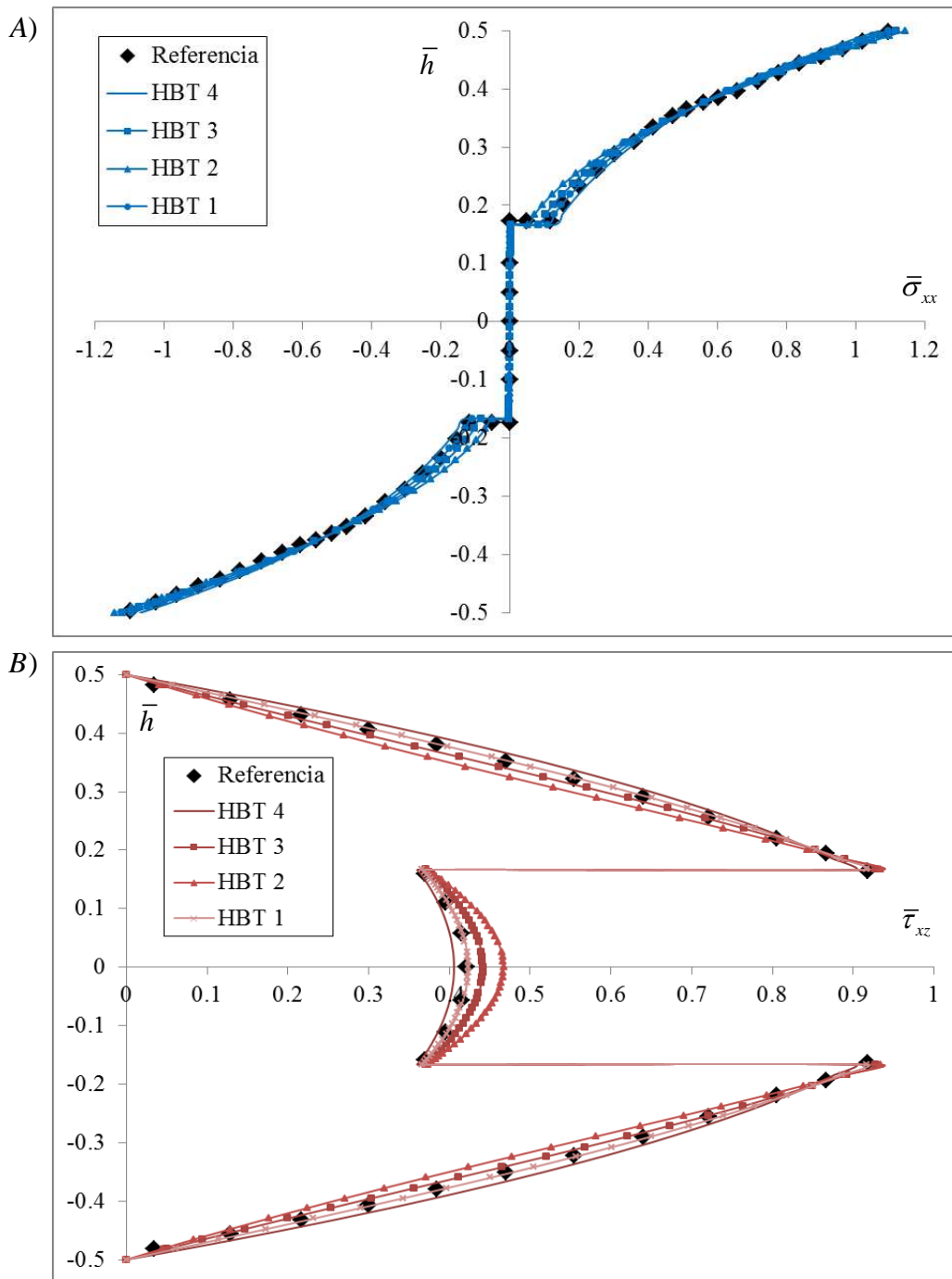


Figura 3. Diagramas de tensiones para viga laminada (0/90/0) A) Tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}$  ( $L/2$ )  
 B) Tensiones tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}$  (0); ♦ Referencia: Vo and Tai Thai (2012)

## 5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el primer ejemplo se presentan las tres primeras frecuencias de vibración libre considerando dos condiciones de borde: empotrada en ambos extremos (C-C) y en voladizo (C-F), para una viga laminada asimétrica (0/90/0/90) y en cada caso se proponen tres niveles de esbeltez. La viga tiene una longitud de  $L = 0.381 \text{ m}$  y una sección transversal de altura  $h = 25.4 \times 10^{-3} \text{ m}$  y ancho  $b = 25.4 \times 10^{-3} \text{ m}$ . El material de cada lámina es un compuesto

grafito-epoxi con una densidad  $\rho = 1389.23 \text{ kg/cm}^3$  y las siguientes propiedades mecánicas:

$$E_1 = 144.80 \times 10^9 \text{ Pa}, E_2 = 9.65 \times 10^9 \text{ Pa}, \nu_{12} = 0.30$$

$$G_{12} = 4.141 \times 10^9 \text{ Pa}, G_{13} = 4.14 \times 10^9 \text{ Pa}, G_{23} = 3.45 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Los resultados obtenidos con cada teoría se muestran en la Tabla 6 donde se puede observar que a medida que se incrementa la esbeltez de los elementos los resultados de las teorías coinciden entre ellos, ya que todas las teorías tienden al caso de vigas Bernoulli (TBB), sin que se produzca bloqueo por cortante. Mientras que para elementos menos esbeltos, influye la forma en que cada teoría contiene a las aproximaciones de orden superior de los efectos del cortante, notándose especialmente en la tercera frecuencia.

Cond. Borde	$L/h$	Modo	Teoría			
			HBT 1	HBT 2	HBT 3	HBT 4
C-C	15	1	1051.41	1052.15	1051.59	1051.63
		2	2515.55	2519.86	2516.93	2515.82
		3	4311.41	4324.90	4316.43	4309.99
	30	1	295.53	295.54	295.52	295.58
		2	774.45	774.54	774.41	774.67
		3	1430.63	1431.09	1430.62	1431.17
	60	1	76.49	76.49	76.49	76.49
		2	207.89	207.88	207.88	207.91
		3	400.18	400.18	400.16	400.25
C-F	15	1	191.019	191.028	191.020	191.035
		2	1084.406	1084.845	1084.486	1084.634
		3	2688.273	2691.137	2689.066	2688.844
	30	1	48.441	48.436	48.439	48.439
		2	295.265	295.268	295.257	295.297
		3	793.435	793.480	793.393	793.617
	60	1	12.154	12.153	12.153	12.154
		2	75.617	75.620	75.620	75.625
		3	209.372	209.369	209.365	209.389

Tabla 6. Frecuencias naturales (en Hz) para vigas laminadas con distintas esbelteces y condiciones de contorno

En el segundo ejemplo se muestran también las tres primeras frecuencias de vibración libre considerando dos condiciones de borde: empotrada en ambos extremos (C-C) y en voladizo (C-F), pero se analizan varios casos de vigas laminada de cuatro capas simétricas  $(\theta/-\theta)_s$  y una esbeltez  $L/h = 15$ . El material de cada lámina tiene una densidad  $\rho = 1600 \text{ kg/cm}^3$  y las siguientes propiedades mecánicas:

$$E_1 = 150 \text{ GPa}, E_2 = 10 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25$$

$$G_{12} = 5.0 \text{ GPa}, G_{13} = G_{23} = 3.846 \text{ GPa}$$

Los resultados obtenidos con cada teoría se muestran en la Tabla 7 donde se puede analizar que, para este tipo de laminados simétricos, los valores prácticamente coinciden en todos los



casos.

Cond. Borde	$(\theta/-\theta)_s$	Modo	Teoría			
			HBT 1	HBT 2	HBT 3	HBT 4
C-C	60	1	1.67	1.67	1.67	1.67
		2	4.44	4.45	4.44	4.44
		3	8.32	8.34	8.33	8.32
	40	1	1.95	1.95	1.95	1.95
		2	5.13	5.14	5.14	5.13
		3	9.51	9.53	9.52	9.51
	20	1	2.92	2.93	2.93	2.92
		2	7.34	7.36	7.35	7.33
		3	13.03	13.09	13.05	13.01
C-F	60	1	0.270	0.270	0.270	0.270
		2	1.656	1.657	1.657	1.656
		3	4.493	4.496	4.494	4.492
	40	1	0.319	0.319	0.319	0.319
		2	1.942	1.943	1.943	1.942
		3	5.224	5.228	5.225	5.223
	20	1	0.500	0.500	0.500	0.500
		2	2.958	2.961	2.959	2.957
		3	7.653	7.670	7.659	7.650

Tabla 7. Frecuencias  $\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h\sqrt{\rho/E_1}}$  para vigas laminadas con distintas orientaciones de fibras y apoyos

En el tercer ejemplo se determina la deflexión vertical  $w$ , la tensión normal  $\sigma_{xx}$  y la tensión tangencial  $\tau_{xz}$  para una viga laminada asimétrica (0/90 y 0/30), simplemente apoyada en ambos extremos (S-S), pero con distintos tipos de cargas: uniforme, senoidal y lineal como se muestra en la Figura 4, para una esbeltez  $L/h = 10$ . Las propiedades del material son las mismas que en el caso tres de validación y los resultados obtenidos se detallan en la Tabla 8, donde se puede apreciar que la segunda teoría devuelve valores más bajos en la deflexión pero más elevados en las tensiones que las demás.

Laminado	Carga	Teoría	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0/90	Uniforme	HBT 1	3.688	221.718	9.740
		HBT 2	3.665	222.049	10.094
		HBT 3	3.678	221.929	9.888
		HBT 4	3.697	221.469	9.578
	Senoidal	HBT 1	2.916	180.886	6.426
		HBT 2	2.897	181.204	6.705
		HBT 3	2.908	181.091	6.546
		HBT 4	2.922	180.641	6.297
	Lineal	HBT 1	1.844	110.859	3.364
		HBT 2	1.833	111.025	3.514
		HBT 3	1.839	110.964	3.428

		HBT 4	1.848	110.734	3.295
0/30	Uniforme	HBT 1	2.734	175.236	7.935
		HBT 2	2.721	175.651	8.305
		HBT 3	2.729	175.474	8.091
		HBT 4	2.739	174.971	7.771
	Senoidal	HBT 1	2.162	143.069	5.229
		HBT 2	2.151	143.474	5.511
		HBT 3	2.158	143.303	5.350
		HBT 4	2.166	142.807	5.103
	Lineal	HBT 1	1.844	110.859	3.364
		HBT 2	1.833	111.025	3.514
		HBT 3	1.839	110.964	3.428
		HBT 4	1.848	110.734	3.295

Tabla 8. Deflexiones  $\bar{w}(L/2)$ , tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}(L/2; h/2)$  y tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}(L; 0)$  para varios tipos de cargas en vigas laminadas asimétricas

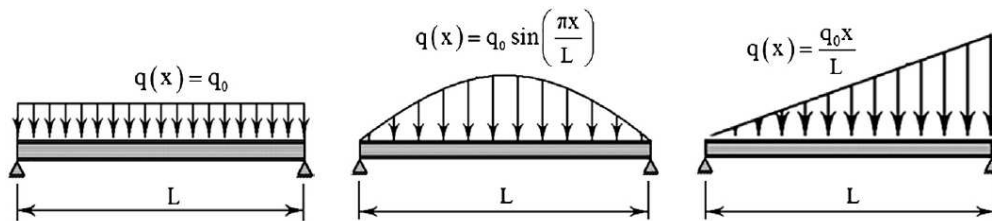


Figura 4. Tipos de cargas aplicadas en el tercer ejemplo para viga simplemente apoyada

En el último ejemplo se muestra la deflexión vertical  $w$  la tensión normal  $\sigma_{xx}$  y la tensión tangencial  $\tau_{xz}$  para las vigas laminadas simétricas (0/90/0 y (0/45/0) con carga uniformemente distribuida y distintos tipos de apoyos: empotrado – libre (C-F), empotrado – empotrado (C-C) y empotrado – simplemente apoyado (C-S), para una esbeltez  $L/h = 5$ . Las propiedades del material son las mismas que en el caso cuatro de validación y los resultados obtenidos se detallan en la Tabla 9.

Laminado	Apoyos	Teoría	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0/90/0	C-F	HBT 1	6.841	0.468	0.708
		HBT 2	6.838	0.422	0.785
		HBT 3	6.840	0.444	0.741
		HBT 4	6.830	0.494	0.674
	C-C	HBT 1	1.522	0.571	0.233
		HBT 2	1.479	0.618	0.255
		HBT 3	1.502	0.596	0.243
		HBT 4	1.537	0.546	0.223
	C-S	HBT 1	1.952	0.839	0.310
		HBT 2	1.939	0.881	0.343
		HBT 3	1.946	0.861	0.324
		HBT 4	1.953	0.817	0.296

0/45/0	C-F	HBT 1	6.141	0.519	1.042
		HBT 2	6.075	0.485	1.138
		HBT 3	6.112	0.501	1.084
		HBT 4	6.158	0.539	1.000
	C-C	HBT 1	1.325	0.520	0.345
		HBT 2	1.276	0.554	0.373
		HBT 3	1.302	0.538	0.357
		HBT 4	1.344	0.500	0.332
	C-S	HBT 1	1.707	0.777	0.462
		HBT 2	1.675	0.806	0.505
		HBT 3	1.693	0.793	0.481
		HBT 4	1.717	0.761	0.443

Tabla 9. Deflexiones  $\bar{w}(L/2)$ , tensiones normales  $\bar{\sigma}_{xx}(L/2;h/2)$  y tangenciales  $\bar{\tau}_{xz}(L/4;0)$  para varios tipos de apoyos en vigas laminadas simétricas

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la formulación, desarrollo e implementación computacional de un macro elemento finito jerárquico, aplicado al análisis estático y dinámico de vigas laminadas. El modelo incluye la deformación por corte a través de una cinemática que permite anular las tensiones tangenciales en la superficie libre y obtener una adecuada y precisa consideración de la distribución de dichas tensiones. Esto hace que el modelo sea especialmente adecuado para su aplicación al análisis de vigas laminadas, tanto gruesas como delgadas, donde la baja rigidez cortante transversal que presentan los laminados hace que el uso de la teoría clásica conduzca a errores cuando se determinan las frecuencias correspondientes a los modos superiores de vibración, así como cuando se calculan las deflexiones y, en especial, las tensiones interlaminares. Por otra parte, el uso de esta teoría de orden superior hace innecesaria la incorporación de factores de corrección por cortante. Una de las principales ventajas inherente al elemento finito jerárquico desarrollado, es la posibilidad de obtener con el uso de un sólo macro elemento una excelente aproximación en la respuesta. Además, esta formulación permite utilizar, en forma automática, la función de corte de cualquier teoría ESL. Para este trabajo se eligieron, a modo de ejemplo, cuatro teorías representativas (exponencial, trigonométrica, hiperbólica y polinómica) obteniéndose un algoritmo general unificado.

A través de los casos de convergencia y validación se compararon los resultados obtenidos utilizando todas las teorías propuestas, se estudiaron las frecuencias naturales de vibración libre, las deflexiones verticales y las distribuciones en la altura de la sección transversal de tensiones tanto normales como tangenciales, con diferentes esquemas de laminación. Se puede observar que el método propuesto produce excelentes resultados para laminados simétricos y asimétricos, con distintas rotaciones de fibras en cada lámina del compuesto, varias condiciones de borde, tipos de carga y esbelteces.

Finalmente, cabe destacar que los tiempos de pre-proceso, análisis y post-proceso se ven reducidos en gran medida mediante la utilización del elemento finito jerárquico propuesto.

## 7 REFERENCIAS

Alibeigloo and Madoliat. Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature, 2009

- Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009;89(1):94–101.
- Bardell et al. Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies — Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates, 1996a
- Bardell et al. Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies — Part II: further results for generally orthotropic plates, 1996b
- Beheshti-Aval, S.B., Lezgy-Nazargah, M., Vidal, P., Polit, O., 2011. A refined sinus finite element model for the analysis of piezoelectric laminated beams. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 22, 203e219.
- Beheshti-Aval, S.B., Shahvagher-Asl, S., Lezgy-Nazargah, M., Noori, M., 2013. A finite element model based on coupled refined high-order global-local theory for static analysis of electromechanical embedded shear-mode piezoelectric sandwich composite beams with various widths. *Thin Walled Struct.* 72, 139e163.
- Bui, Q.T., Nguyen, N.M., Zhang, C.h, 2011. An efficient meshfree method for vibration analysis of laminated composite plates. *Comput. Mech.* 48, 175e193.
- Chandrashekhara K, Krishnamurthy K, Roy S. Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. *Compos Struct* 1990;14(4):269–79.
- Cheng S, Wei X, Jiang T. Stress distribution and deformation of adhesive- bonded laminated composite beams. *J Eng Mech* 1989;115(6):1150–62.
- Chrysochoidis NA, Saravanos DA. Generalized layerwise mechanics for the static and modal response of delaminated composite beams with active piezoelectric sensors. *Int J Solids Struct* 2007;44(25-26):8751–68.
- Ghugal YM, Shimpri RP. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *J Reinforc Plast Compos* 2001;20(3):255–72.
- Hu, X.X., Sakiyama, T., Lim, C.W., Xiong, Y., Matsuda, H., Morita, C., 2004. Vibration of angle-ply laminated plates with twist by Rayleigh-Ritz procedure. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 805e823.
- Hughes et al. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, 2005
- J.L. Mantari F.G., Canales. A unified quasi-3D HSDT for the bending analysis of laminated beams, 2016
- Jiarang, F., Jianqiao, Y., 1990. An exact solution for static and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers. *Int. J. Solids Struct.* 26, 655e662.
- Jun Li et al. Comparison of various shear deformation theories for free vibration of laminated composite beams with general lay-ups, 2014
- Jun Li et al. Dynamic finite element method for generally laminated composite beams, 2008
- Kang, J.H., Shim, H.J., 2004. Exact solutions for the free vibrations of rectangular plates having in-plane moments acting on two opposite simply supported edges. *J. Sound. Vib.* 273, 933e948.
- Kant T, Marur SR, Rao GS. Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory. *Compos Struct* 1997;40(1):1–9.
- Kapania RK, Raciti S. Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part II. Vibrations and wave propagation. *AIAA J* 1989;27(7):935–46.
- Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int J Solids Struct* 2003;40(6):1525–46.

- Leissa, A.W., Kang, J.H., 2002. Exact solutions for vibration and buckling of an SS-CSS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses. *Int. J. Mech. Sci.* 44, 1925e1945.
- Lezgy-Nazargah et al. NURBS-based isogeometric analysis of laminated composite beams using refined sinus model, 2015
- Lezgy-Nazargah, M., Shariyat, M., Beheshti-Aval, S.B., 2011. A refined high-order global-local theory for finite element bending and vibration analyses of the laminated composite beams. *Acta Mech.* 217 (3e4), 219e242.
- Matsunaga H. Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories. *J Sound Vib* 2001;246(1):47–62.
- Nallim and Oller. An analytical–numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plates, 2008
- Nallim et al. Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes, 2005
- Numayr, K.S., Haddad, R.H., Haddad, M.A., 2004. Free vibration of composite plates using the finite difference method. *Thin Walled Struct.* 42, 399e414.
- Omidvar B. Shear coefficient in orthotropic thin-walled composite beams. *J Compos Constr* 1998;2(1):46–55.
- Pagano, N.J., 1969. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Compos. Mater.* 3, 398e411.
- Pagano, N.J., 1970. Exact solutions for rectangular bi-direction composites and sandwich plates. *J. Compos. Mater.* 4, 20e34.
- Pagano, N.J., Hatfield, S.J., 1972. Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. *AIAA J.* 10, 931e933.
- Plagianakos TS, Saravanos DA. High-order layerwise mechanics and finite element for the damped dynamic characteristics of sandwich composite beams. *Int J Solids Struct* 2004;41(24-25):6853–71.
- Rango et al. Formulation of enriched macro elements using trigonometric shear deformation theory for free vibration analysis of symmetric laminated composite plate assemblies, 2015
- Rango et al. Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements, 2013
- Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech, Trans ASME* 1984;51(4):745–52.
- Shimpi RP, Ghugal YM. A new layerwise trigonometric shear deformation theory for two-layered cross-ply beams. *Compos Sci Technol* 2001;61(9):1271–83.
- Tahani M. Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories. *Compos Struct* 2007;79(4):535–47.
- Thuc Vo, Huu Tai Thai. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories, 2012
- Touratier M. A refined theory of laminated shallow shells. *Int J Solids Struct* 1992;29(11):1401–15.
- Vidal P, Polit O. A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams. *Compos Struct* 2008;84(1):56–72.
- Vinson JR, Sierakowski RL. The behavior of structures composed of composite materials. Dordrecht, Netherlands: Martinus Nijhoff; 1986.

## Apéndice A

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{c}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{c}_{12}^{(k)} & \bar{c}_{13}^{(k)} & \bar{c}_{16}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_{22}^{(k)} & \bar{c}_{23}^{(k)} & \bar{c}_{26}^{(k)} & 0 \\ \bar{c}_{23}^{(k)} & \bar{c}_{33}^{(k)} & \bar{c}_{36}^{(k)} & 0 \\ \bar{c}_{26}^{(k)} & \bar{c}_{36}^{(k)} & \bar{c}_{66}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{c}_{12}^{(k)} & 0 \\ \bar{c}_{13}^{(k)} & 0 \\ \bar{c}_{16}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{c}_{45}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Con

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^{(k)} &= c_{11}^{(k)} \cos^4 \beta_k - 4c_{16}^{(k)} \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + 2(c_{12}^{(k)} + 2c_{66}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad - 4c_{26}^{(k)} \cos \beta_k \sin^3 \beta_k + c_{22}^{(k)} \sin^4 \beta_k \\ \bar{c}_{12}^{(k)} &= c_{12}^{(k)} \cos^4 \beta_k + 2(c_{16}^{(k)} - c_{26}^{(k)}) \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + (c_{11}^{(k)} + c_{22}^{(k)} - 4c_{66}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad + 2(c_{26}^{(k)} - c_{16}^{(k)}) \cos \beta_k \sin^3 \beta_k + c_{12}^{(k)} \sin^4 \beta_k \\ \bar{c}_{13}^{(k)} &= c_{13}^{(k)} \cos^2 \beta_k - 2c_{36}^{(k)} \cos \beta_k \sin \beta_k + c_{23}^{(k)} \sin^2 \beta_k \\ \bar{c}_{16}^{(k)} &= c_{16}^{(k)} \cos^4 \beta_k + (c_{11}^{(k)} - c_{12}^{(k)} - 2c_{66}^{(k)}) \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + 3(c_{26}^{(k)} - c_{16}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad + (c_{12}^{(k)} - c_{22}^{(k)} + 2c_{66}^{(k)}) \cos \beta_k \sin^3 \beta_k - c_{26}^{(k)} \sin^4 \beta_k \\ \bar{c}_{22}^{(k)} &= c_{22}^{(k)} \cos^4 \beta_k + 4c_{26}^{(k)} \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + 2(c_{12}^{(k)} + 2c_{66}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad + 4c_{16}^{(k)} \cos \beta_k \sin^3 \beta_k + c_{11}^{(k)} \sin^4 \beta_k \\ \bar{c}_{23}^{(k)} &= c_{23}^{(k)} \cos^2 \beta_k + 2c_{36}^{(k)} \cos \beta_k \sin \beta_k + c_{13}^{(k)} \sin^2 \beta_k \\ \bar{c}_{26}^{(k)} &= c_{26}^{(k)} \cos^4 \beta_k + (c_{12}^{(k)} - c_{22}^{(k)} + 2c_{66}^{(k)}) \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + 3(c_{16}^{(k)} - c_{26}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad + (c_{11}^{(k)} - c_{12}^{(k)} - 2c_{66}^{(k)}) \cos \beta_k \sin^3 \beta_k - c_{16}^{(k)} \sin^4 \beta_k \\ \bar{c}_{33}^{(k)} &= c_{33}^{(k)} \\ \bar{c}_{36}^{(k)} &= (c_{13}^{(k)} - c_{23}^{(k)}) \cos \beta_k \sin \beta_k + c_{36}^{(k)} (\cos^2 \beta_k - \sin^2 \beta_k) \\ \bar{c}_{66}^{(k)} &= 2(c_{16}^{(k)} - Q_{26}^{(k)}) \cos^3 \beta_k \sin \beta_k + (c_{11}^{(k)} + c_{22}^{(k)} - 2c_{12}^{(k)} - 2c_{66}^{(k)}) \cos^2 \beta_k \sin^2 \beta_k \\ &\quad + 2(c_{26}^{(k)} - Q_{16}^{(k)}) \cos \beta_k \sin^3 \beta_k + c_{66}^{(k)} (\cos^4 \beta_k + \sin^4 \beta_k) \\ \bar{c}_{44}^{(k)} &= c_{44}^{(k)} \cos^2 \beta_k + c_{55}^{(k)} \sin^2 \beta_k + 2c_{45}^{(k)} \cos \beta_k \sin \beta_k \\ \bar{c}_{45}^{(k)} &= c_{45}^{(k)} (\cos^2 \beta_k - \sin^2 \beta_k) + (c_{55}^{(k)} - c_{44}^{(k)}) \cos \beta_k \sin \beta_k \\ \bar{c}_{55}^{(k)} &= c_{55}^{(k)} \cos^2 \beta_k + c_{44}^{(k)} \sin^2 \beta_k - 2c_{45}^{(k)} \cos \beta_k \sin \beta_k \end{aligned}$$

Las componentes  $c_{ij}^{(k)}$  para un material ortótropo en término de las constantes de ingeniería están dadas por:

$$c_{11}^{(k)} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad c_{22}^{(k)} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}^{(k)} &= \frac{v_{21} + v_{31}v_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{v_{12} + v_{32}v_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, & c_{23}^{(k)} &= \frac{v_{32} + v_{12}v_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{v_{23} + v_{21}v_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\
c_{13}^{(k)} &= \frac{v_{31} + v_{21}v_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{v_{13} + v_{12}v_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, & c_{33}^{(k)} &= \frac{1 - v_{12}v_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
c_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, & c_{55}^{(k)} &= G_{31}^{(k)}, & c_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}
\end{aligned}$$