

## FACTOR DE CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN EL ENTORNO DE UN ORIFICIO RECTANGULAR PRESENTE EN UNA PLACA ORTÓTropa

Antonio Susca<sup>a,b</sup>, Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>, Patricio A. A. Laura<sup>a</sup> y Raúl E. Rossi<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,  
Av Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina*

<sup>b</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

*asusca@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, ima@criba.edu.ar, rerossi@criba.edu.ar*

**Palabras Clave:** Concentración de tensiones, Ortotropía, Placa, Orificio, Estado plano, Elementos finitos .

**Resumen.** En el presente trabajo se analiza la concentración de tensiones que genera un pequeño orificio rectangular de bordes redondeados en una placa ortótropa solicitada biaxialmente en su plano medio. La placa se considera de dimensiones relativamente grandes con respecto al orificio y se modeló con elementos finitos.

Las direcciones principales elásticas se suponen en distintas orientaciones para evaluar el efecto que producen sobre las tensiones. También se consideran diferentes parámetros elásticos para caracterizar el material ortótropo.

En general los estudios sobre concentración de tensiones al alcance del ingeniero tratan problemas en medios isótropos. Es relativamente escasa la información sobre concentración de tensiones en medios ortótropos y anisótropos. Sin embargo estas situaciones aparecen en la práctica. Por ejemplo los procesos de manufactura (como el laminado de chapas) o situaciones naturales como suelos rocosos son medios no isótropos, por lo que los resultados pueden tener interés en metalurgia o en ingeniería de minas entre otros (Kyung-Ho Park et al., 2006).

## 1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo trata con el problema relacionado con la determinación de tensiones de una placa debilitada por una pequeña abertura rectangular con vértices redondeados, y sometida a un régimen de estado plano de tensiones producido por fuerzas uniformemente distribuidas en el espesor, aplicadas en el contorno externo de la placa. Figura 1.

Este problema ha sido bien estudiado en placas isótropas (Laura et al, 1997); se sabe que se produce un aumento de tensiones en determinados lugares en cercanías del orificio, si se compara con las tensiones de la misma placa sin orificio.

En el caso de materiales no isótropos el problema de la concentración de tensiones en cercanías del orificio ha sido estudiado sólo para algunas geometrías del orificio (Lekhnitskii, 1968; Ukadgaonker et al., 2000; Sánchez et al., 2003; Allam et al., 2003, Maiz et al., 2004; Bambill et al., 2005; Kyung-Ho Park et al., 2006). El estudio propuesto se centra en el análisis de las tensiones en una placa ortótropa con un orificio rectangular de vértices redondeados, sometida a esfuerzos de tracción aplicados en el borde exterior según dos direcciones ortogonales, Figura 1. Se supone que el orificio es pequeño en relación a las dimensiones de la placa y que se encuentra distante de los bordes exteriores de la misma.

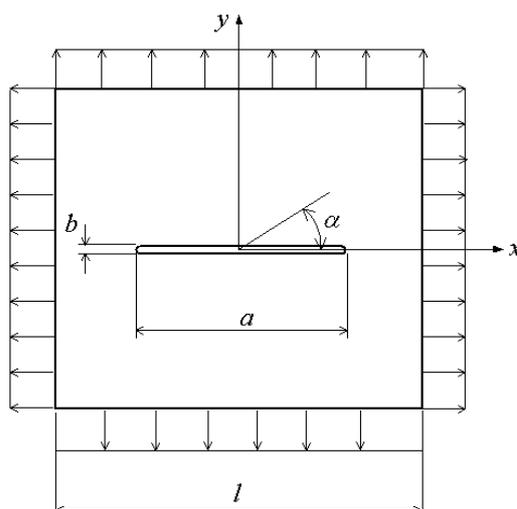


Figura 1: Esquema del problema a analizar.

Los lados de la placa, de dimensión  $l \times l$ , se adoptan paralelos a los lados del orificio; las direcciones de la carga  $p$ , uniformemente distribuida, son normales a los lados de la placa rectangular. En tanto se notan como  $a$  y  $b$  a las dimensiones del rectángulo en que se inscribe el orificio. Los ejes coordenados,  $x$  e  $y$ , se ubican centrados tal como se muestran en la Figura 1. Por último se define el ángulo  $\alpha$ , medido en sentido antihorario a partir del semieje positivo de las abscisas.

Siguiendo la clásica notación de Lekhnitskii, si el material de la placa es ortótropo con ejes principales de ortotropía coincidentes con los ejes coordenados y suponiendo la nulidad de las fuerzas de volumen, el campo de tensiones del problema descrito es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

donde  $F$  es la función tensión que cumple con:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2)$$

$E_1$  y  $E_2$  son los módulos de Young en las direcciones principales elásticas,  $1 \equiv x$  y  $2 \equiv y$ , respectivamente;  $G = G_{12}$ , es el módulo de elasticidad transversal, que caracteriza la variación angular entre las direcciones principales 1 y 2;  $\nu_1 = \nu_{12}$  es el coeficiente de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección 2 durante la tracción en dirección 1, y análogamente  $\nu_2 = \nu_{21}$  es el módulo de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección 1 durante la tracción en dirección 2.

La siguiente relación entre los módulos de Young y los coeficientes de Poisson se cumple debido a la simetría de los materiales ortótropos:

$$E_1 \cdot \nu_2 = E_2 \cdot \nu_1 \quad (3)$$

Por consiguiente, para realizar el estudio de las tensiones de una placa ortótropa sometida a un estado plano de tensiones es suficiente conocer sólo cuatro constantes elásticas del material:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G$ ,  $\nu_1$ .

Las ecuaciones paramétricas siguientes generan el contorno de una serie de geometrías particulares, como rectángulos, triángulos, elipses, y permiten modelar la forma del orificio de la placa:

$$\begin{aligned}x &= r \left( \cos(\alpha) + \varepsilon \sum_{n=1}^N (r_n \cos(n\alpha) + s_n \operatorname{sen}(n\alpha)) \right) \\ y &= r \left( c \operatorname{sen}(\alpha) + \varepsilon \sum_{n=1}^N (-r_n \operatorname{sen}(n\alpha) + s_n \cos(n\alpha)) \right)\end{aligned}\quad (4)$$

el ángulo  $\alpha$ , varía entre cero y  $2\pi$ , para completar el ciclo a lo largo del contorno,  $r$  es un valor positivo. Como caso particular, cuando  $\varepsilon = 0$  se obtiene una elipse de semiejes “ $r$ ” y “ $c$ ”. Otro caso particular utilizado por Lekhnitskii ([Lekhnitskii, 1968](#)) y otros autores, es la siguiente expresión derivada de la (4):

$$\begin{aligned}x &= r(\cos(\alpha) + \varepsilon \cos(m\alpha)) \\ y &= r(c \operatorname{sen}(\alpha) - \varepsilon \operatorname{sen}(m\alpha))\end{aligned}\quad (5)$$

donde  $c$  es un valor entre 0 y 1,  $0 < c \leq 1$ , y  $m$  es un entero. Cuando  $c = 1$  y  $m = 3$ , la figura descripta posee cuatro ejes de simetría y para determinados valores de “ $\varepsilon$ ”, la ecuación (5) describe una geometría que difiere poco de un cuadrado con vértices redondeados. Cuando  $c = 1$  y  $m = 2$ , hay tres ejes de simetría y para valores adecuadamente elegidos de “ $\varepsilon$ ” la geometría se asemeja a un triángulo equilátero de vértices redondeados. Diversos autores usan estas expresiones para resolver los problemas de concentración de tensiones en orificios

triangulares, cuadrados, etc.

Se define el parámetro adimensional  $K$ , como factor de concentración de tensiones, a la relación entre la tensión normal  $\sigma_\alpha$  de una sección perpendicular al borde del orificio, Figura 2, y la carga distribuida constante  $p$ :

$$K_+ = \frac{\sigma_{\alpha máx}}{p} \quad (6)$$

$$K_- = \frac{\sigma_{\alpha mín}}{p} \quad (7)$$

Notando con  $K_+$  al factor de concentración de tensiones máximas y con  $K_-$  al factor que corresponde a las tensiones mínimas, que aparecen en el borde del orificio al aplicar la tensión de tracción “ $p$ ” a la placa en los bordes exteriores.

En general, se considera que las direcciones elásticas principales, 1 y 2, no son coincidentes con las direcciones de los lados de la placa,  $x$  e  $y$ . Dicha orientación se caracteriza por el ángulo  $\theta$  medido en grados sexagesimales, a partir del semieje  $x$  positivo en sentido antihorario. Figura 2.

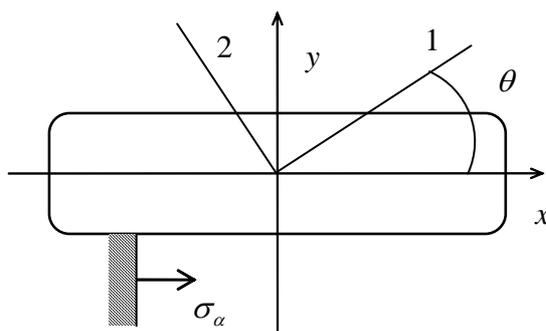


Figura 2: Tensiones normales en el entorno del orificio rectangular de vértices redondeados y direcciones principales elásticas 1 y 2.

En el trabajo también se presenta un análisis comparativo con resultados de tensiones en el borde de un orificio obtenidos por Lekhnitskii. El caso elegido para el análisis con elementos finitos es el de una placa rectangular ortótropa con un agujero central cuadrado de pequeñas dimensiones, con vértices redondeados con un cuarto de circunferencia, y con los lados del orificio paralelos a los de la placa, la cual está sometida a un estado de tracción de valor  $p$  con distribución uniforme en dos lados opuestos. Ver Figura 3.

El problema resuelto por Lekhnitskii es similar, aunque el método analítico que aplica corresponde en realidad a un orificio de contorno curvilíneo en todo el perímetro, con curvatura prácticamente nula en los puntos A y B. La curvatura aumenta muy lentamente hasta las cercanías del punto C, alcanzando el valor máximo en dicho punto. Este orificio difiere muy poco del modelado por los autores en este trabajo. Por otra parte, Lekhnitskii considera las direcciones principales elásticas paralelas a los lados de la placa, caso  $\theta = 0^\circ$  y caso  $\theta = 90^\circ$ .

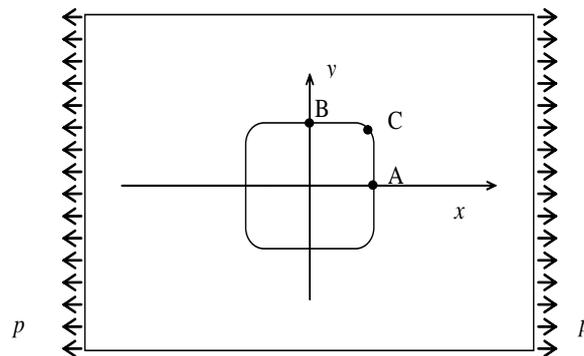


Figura 3: Placa ortótropa con un orificio cuasicuadrado sometido a tracción en una dirección.

## 2 MODELADO CON ELEMENTOS FINITOS

Para la resolución del problema planteado se utilizó el método de elementos finitos con el módulo de análisis lineal del programa profesional **ALGOR**. Este módulo permite la utilización de dos tipos de elementos conformes; cuadrangulares con cuatro nodos y triangulares de tres nodos. Dichos elementos tienen dos grados de libertad por nodo, referidos a los corrimientos en las direcciones coordenadas, y resultan adecuados para la característica bidimensional del problema en estudio.

Se diseñaron varias geometrías de mallado para intentar la solución del problema, utilizando diversas mallas en las que se fue aumentando el número de elementos finitos. En todos los modelos se intensificó la densidad de elementos alrededor de los extremos del orificio, zona de interés donde se producen los mayores gradientes de las tensiones. Estas pruebas se realizaron hasta lograr una aceptable convergencia en los valores del factor de concentración de tensiones. Finalmente, los resultados presentados fueron obtenidos con los dos modelos de mallado cuyas características se indican a continuación. Se denomina con  $r_1$  al radio de curvatura de los vértices redondeados del orificio rectangular. En la Tabla 1 se indican los parámetros de los modelos de mallado que se utilizaron. Se incluye el denominado modelo 3 que se utiliza para hacer la comparación con algunos de los resultados de Lekhnitskii. Ver Figura 3.

	Número de elementos	Número de nodos	$a/l$	$r_1/b$	$b/a$
Modelo 1	187412	183878	0,06	0,36	0,0089
Modelo 2	128928	124566	0,06	0,36	0,0089
Modelo 3	102192	100500	0,06	0,22	1

Tabla 1: parámetros de los diferentes mallados de los modelos de analizados.

A continuación, en las Figuras 4 a 8, se muestran detalles de los diferentes modelos de mallado.

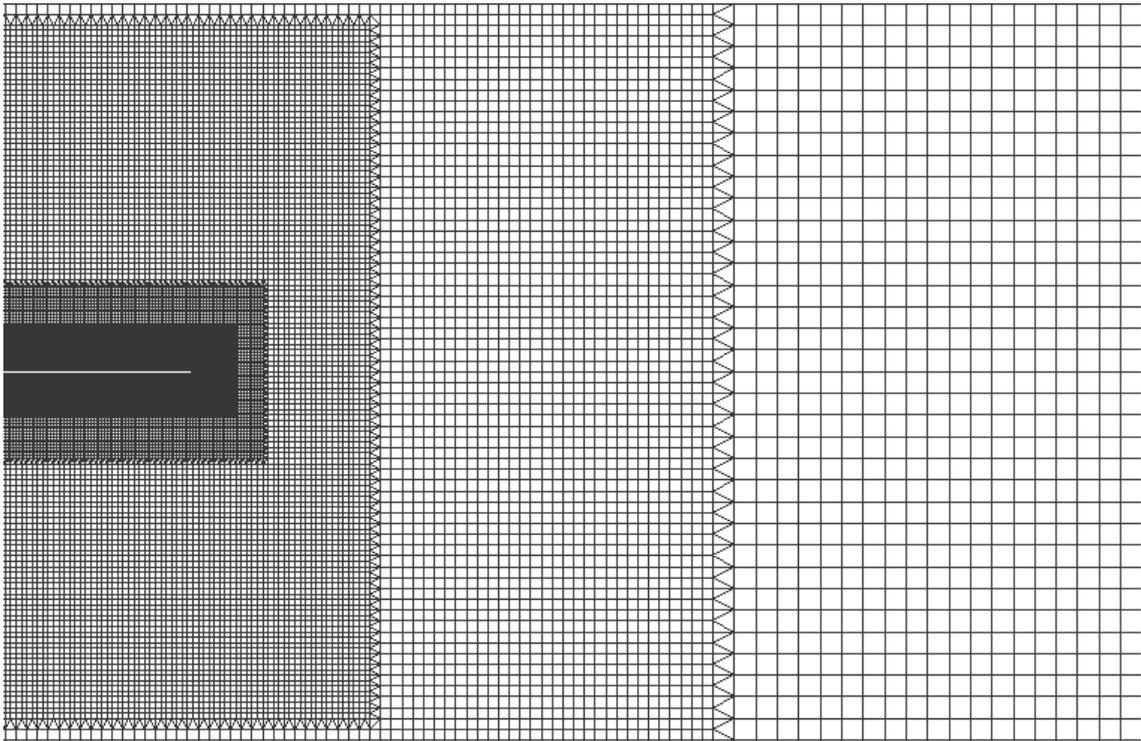


Figura 4: Detalle de un sector de la mitad del mallado del modelo 1.

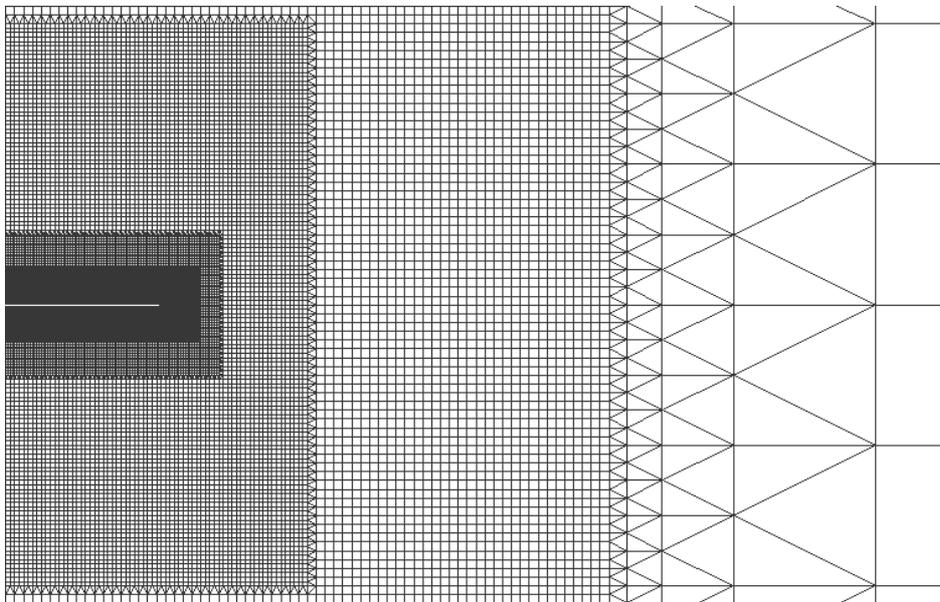


Figura 5: Detalle de un sector de la mitad del mallado del modelo 2.

En el entorno del orificio se utilizó un mismo mallado para los tres modelos y se presenta en detalle en las Figuras 6, 7 y 8.

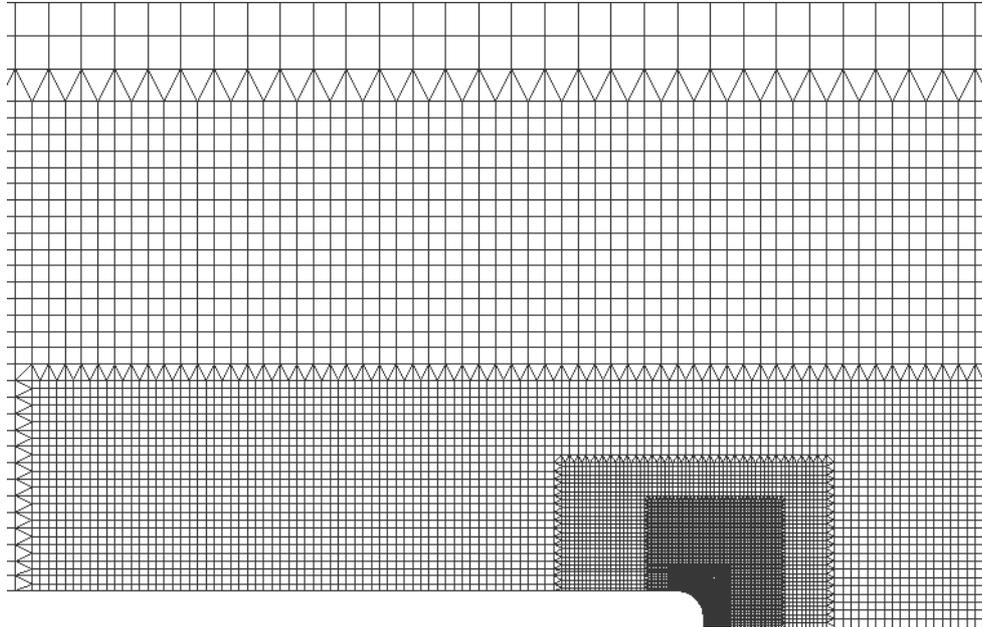


Figura 6: Detalle del mallado en las cercanías del borde del orificio. Modelos 1y 2

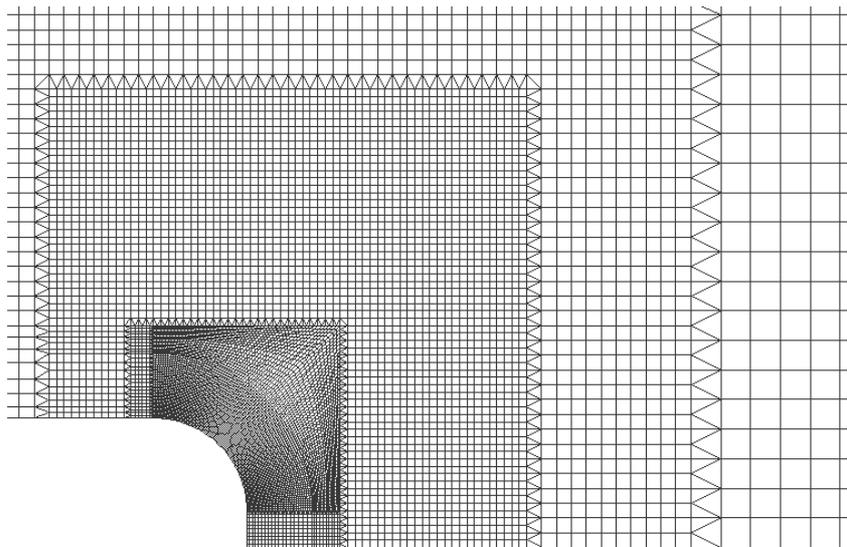


Figura 7: Detalle del mallado en las cercanías del borde del orificio (continuación). Modelos 1y 2

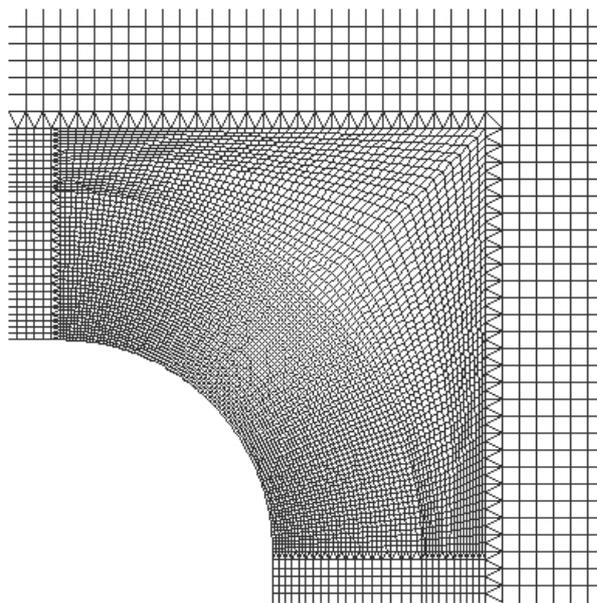


Figura 8: Detalle del mallado en el entorno de un vértice del orificio.

Los mallados de los modelos 1 y 2, difieren en los elementos más alejados del borde del orificio. El modelo 2 tiene elementos de mayor dimensión y por ende menor número de ellos para el modelo total de la placa. La razón de presentar los resultados de dos modelos ha sido la de enfatizar la concordancia de los resultados numéricos obtenidos, pese a que el tiempo total de ejecución requerido por el modelo 2 resulta un 35% del insumido por el modelo 1, lo que prueba una mayor eficiencia computacional sin desmedro en la calidad de los resultados.

Cabe mencionar que los desplazamientos de los modelos fueron restringidos con un nodo ubicado en el borde izquierdo de coordenada  $y = 0$  al que se le restringieron los corrimientos en dirección “ $x$ ” e “ $y$ ”, valor nulo, y en un nodo del borde derecho de coordenada  $y = 0$  con restricción del desplazamiento en dirección “ $y$ ”, valor nulo. Estas restricciones anulan los desplazamientos de “cuerpo rígido”, permitiendo al mismo tiempo la libre deformación de los modelos.

### 3 RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos para la placa ortótropa con un agujero cuadrado central y sometida a un esfuerzo axial de tracción en dirección “ $x$ ”. Se comparan los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos (modelo 3) y los dados por Lekhnitskii en tres puntos situados a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ , indicados con A, C y B en la Figura 3. El material ortótropo de la placa en estudio tiene las siguientes constantes elásticas:

$$E_1 = 1.2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$E_2 = 0.6 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$G = 0.07 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\nu_1 = 0.071$$

En consecuencia las relaciones elásticas para este material resultan:

$$\frac{E_1}{E_2} = 2;$$

$$\frac{G}{E_2} = 0,1167$$

Los resultados para el factor de concentración de tensiones  $K$  se muestran en las Tablas siguientes. La orientación del eje principal de ortotropía 1, coincide en un caso con el eje coordinado en la dirección  $x$ , Tabla 2, y en el otro caso con la dirección  $y$ , Tabla 3. La concentración de tensiones en el punto B, sobre el eje  $y$ , tanto para el caso de la carga en la dirección del mayor coeficiente de Young,  $E_x = E_{\max}$ , Tabla 2, como el caso de la carga en la dirección del menor coeficiente de Young  $E_x = E_{\min}$ , Tabla 3, es mayor que la que se produce en el punto A, sobre el eje  $x$ .

Punto	$\alpha$	Lekhnitskii	Modelo 3
A	0°	-0,57	-0,58
C	45°	0,83	0,71
B	90°	2,60	2,57

Tabla 2: Comparación de resultados. Dirección principal 1 coincidente con dirección  $x$ , ( $E_x = E_{\max}$ ).

Punto	$\alpha$	Lekhnitskii	Modelo 3
A	0°	-1,11	-1,11
C	45°	1,28	1,11
B	90°	2,22	2,21

Tabla 3: Comparación de resultados. Dirección principal 1 coincidente con dirección  $y$ , ( $E_x = E_{\min}$ ).

La coincidencia de los resultados de Lekhnitskii con los obtenidos con el modelo 3, es excelente para los coeficientes  $K_{0^\circ}$  y  $K_{90^\circ}$ , según puede apreciarse en las Tablas 2 y 3. La diferencia mayor se produce, en ambos casos, para  $K_{45^\circ}$  correspondiente al punto C, sobre la diagonal del cuadrado. Esta diferencia es atribuida a que el cálculo que desarrolla Lekhnitskii es aproximado, y a que la geometría del vértice curvilíneo, si bien es semejante, no es exactamente la misma en ambos modelos. Los autores consideran que el diseño de la malla de elementos finitos en dicha zona es adecuado para este análisis. Consiste de una corona circular dividida en las direcciones radial y circunferencial (ver Figura 8), generando 3600 elementos trapeciales con lados gradualmente crecientes proporcionales al radio, y con un tamaño mucho menor que los elementos ubicados en el entorno de los puntos A y B.

En el presente trabajo también se calculan los factores de concentración de tensiones que se generan para otras orientaciones de los ejes elásticos principales del material ortótropo. La Figura 9, presentada a continuación, muestra un gráfico con las curvas dibujadas con trazadores cúbicos, para interpolar los valores de  $K$  obtenidos en el borde del agujero cuadrado para una variedad de puntos del contorno, cuya posición se indica con el ángulo  $\alpha$

medido en radianes. Las diferentes curvas corresponden a diferentes orientaciones de los ejes principales de ortotropía, indicadas por  $\theta$ .

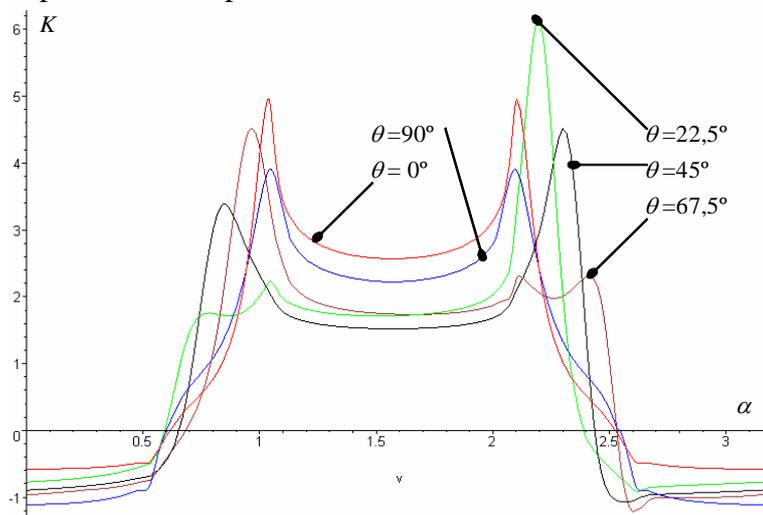


Figura 9: Valores del factor de concentración de tensiones  $K$  en puntos del contorno del orificio para distintas orientaciones de las direcciones elásticas principales.

Se comprueba un marcado incremento de  $K$  para el caso  $\theta = 22,5^\circ$ , comparado con las restantes direcciones principales de ortotropía consideradas en este análisis.

En la Tabla 4 se muestran los valores obtenidos con el modelo 1. Con  $\theta$  se indica el ángulo de orientación de los ejes principales de ortotropía, medido en sentido antihorario a partir del semieje  $x$  positivo. El ángulo  $\alpha = \beta_1$ , medido en radianes, determina la ubicación del punto sobre el contorno del orificio donde se produce el factor de concentración de tensiones  $K_+$ . Con  $K_{0^\circ}$  y  $K_{90^\circ}$  se indican los valores que corresponden a puntos del contorno del orificio coincidentes con los semiejes positivos de coordenadas. Para este análisis se adoptaron diferentes relaciones de los parámetros de ortotropía del material de la placa.

		$G/E_2 = 0,6$		$\nu_1 = 0,3$		
$E_1/E_2$	$\theta$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$K_{0^\circ}$	$K_{90^\circ}$
2	0,0	23,24	0,45	-0,40	12,97	-0,40
	22,5	25,46	-0,38	-0,69	13,44	-0,23
	45,0	27,26	-0,34	-0,61	14,51	0,07
	67,5	26,72	-0,26	-0,06	15,43	0,25
	90,0	25,73	0,21	0,30	15,70	0,30
3	0,0	23,41	0,45	-0,72	12,94	-0,71
	22,5	26,31	-0,38	-1,46	13,13	-0,32
	45,0	29,95	-0,34	-1,17	13,82	0,14
	67,5	31,49	-0,26	-0,21	15,72	0,36
	90,0	28,83	0,21	0,43	17,55	0,43
4	0,0	25,43	0,49	-0,97	12,89	-0,97
	22,5	27,99	-0,43	-2,11	12,97	-0,35
	45,0	32,84	-0,34	-1,65	13,42	0,18
	67,5	35,43	-0,26	-0,34	15,74	0,43
	90,0	31,29	0,19	0,50	19,01	0,50
5	0,0	27,65	0,49	-1,21	12,87	-1,21
	22,5	29,66	-0,44	-2,73	12,87	-0,36
	45,0	35,07	-0,34	-2,02	13,33	0,23
	67,5	38,85	-0,26	-0,45	15,65	0,47
	90,0	33,59	0,19	0,56	20,23	0,56
6	0,0	29,86	0,50	-1,42	12,85	-1,42
	22,5	31,51	-0,45	-3,32	12,81	-0,35
	45,0	37,47	-0,36	-2,35	12,93	0,26
	67,5	41,90	-0,26	-0,56	15,51	0,51
	90,0	35,54	0,19	0,60	21,29	0,60
7	0,0	32,73	0,51	-1,61	12,83	-1,61
	22,5	33,19	-0,45	-3,88	12,76	-0,34
	45,0	39,78	-0,38	-2,65	12,76	0,28
	67,5	44,68	-0,26	-0,64	15,36	0,54
	90,0	37,37	0,17	0,63	22,24	0,63

Tabla 4: resultados obtenidos con el modelo 1 para  $G/E_2 = 0,6$ .

En la siguiente Tabla se muestran los valores obtenidos con el modelo 2. Las diferencias en los valores de  $K$  calculados por ambos modelos resultan del orden del 4% o menores. En los valores angulares, que indican la ubicación de los puntos sobre el contorno, las diferencias también son pequeñas.

		$G/E_2 = 0,6$		$\nu_1 = 0,3$		
$E_1/E_2$	$\theta$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$K_{0^\circ}$	$K_{90^\circ}$
2	0,0	23,46	0,40	-0,40	12,97	-0,40
	22,5	26,41	-0,33	-0,69	13,43	-0,23
	45,0	27,86	-0,33	-0,60	14,51	0,07
	67,5	27,38	-0,27	-0,06	15,42	0,25
	90,0	25,99	0,23	0,30	15,69	0,30
3	0,0	24,18	0,47	-0,71	12,93	-0,71
	22,5	27,26	-0,39	-1,43	13,14	-0,32
	45,0	31,43	-0,33	-1,17	13,83	0,13
	67,5	32,38	-0,27	-0,21	15,71	0,36
	90,0	28,96	0,20	0,43	17,54	0,43
4	0,0	25,53	0,47	-0,97	12,90	-0,97
	22,5	29,02	-0,43	-2,11	12,97	-0,35
	45,0	33,96	-0,33	-1,65	13,42	0,19
	67,5	36,56	-0,27	-0,33	15,72	0,43
	90,0	31,70	0,20	0,51	18,98	0,51
5	0,0	27,55	0,50	-1,20	12,87	-1,20
	22,5	30,84	-0,44	-2,74	12,87	-0,35
	45,0	35,37	-0,36	-2,03	13,11	0,23
	67,5	40,22	-0,27	-0,45	15,63	0,48
	90,0	33,90	0,20	0,56	20,20	0,56
6	0,0	30,35	0,51	-1,41	12,85	-1,41
	22,5	32,92	-0,45	-3,30	12,81	-0,35
	45,0	37,75	-0,36	-2,35	12,92	-0,26
	67,5	43,86	-0,27	-0,54	15,54	0,51
	90,0	36,00	0,19	0,60	21,25	0,60
7	0,0	33,04	0,51	-1,61	12,83	-1,61
	22,5	34,52	-0,45	-0,39	12,75	-0,34
	45,0	40,01	-0,39	-2,63	12,75	0,29
	67,5	46,52	-0,27	-0,64	15,34	0,54
	90,0	37,88	0,19	0,63	22,19	0,63

Tabla 5: resultados obtenidos con el modelo 2 para  $G/E_2 = 0,6$ .

En la siguiente Tabla se muestran los valores obtenidos con el modelo 2 para una relación de módulos un poco menor,  $G/E_2 = 0,5$ .

		$G/E_2 = 0,5$		$\nu_1 = 0,3$		
$E_1/E_2$	$\theta$	$K_+$	$\beta_1$	$K_-$	$K_{0^\circ}$	$K_{90^\circ}$
2	0,0	22,97	0,33	-0,40	13,54	-0,40
	22,5	24,93	-0,33	-0,68	13,54	-0,21
	45,0	28,47	-0,33	-0,57	13,90	0,06
	67,5	29,11	-0,27	-0,06	15,24	0,24
	90,0	26,69	0,23	0,30	16,41	0,30
3	0,0	22,96	0,47	-0,71	13,52	-0,71
	22,5	26,85	-0,43	-1,43	13,25	-0,29
	45,0	31,86	-0,33	-1,10	13,25	0,12
	67,5	34,56	-0,27	-0,23	15,37	0,34
	90,0	30,25	0,20	0,43	18,39	0,43
4	0,0	24,60	0,50	-0,97	13,51	-0,97
	22,5	29,12	-0,45	-2,05	13,10	-0,32
	45,0	34,19	-0,33	-1,55	12,85	0,17
	67,5	39,11	-0,27	-0,35	15,27	0,41
	90,0	33,06	0,20	0,51	19,95	0,51
5	0,0	27,61	0,51	-1,20	13,49	-1,20
	22,5	31,46	-0,45	-2,65	13,01	-0,32
	45,0	37,30	-0,39	-1,91	12,58	0,20
	67,5	43,10	-0,27	-0,47	15,09	0,46
	90,0	35,61	0,19	0,56	21,25	0,56
6	0,0	30,52	0,51	-1,41	13,48	-1,41
	22,5	33,42	-0,45	-3,22	12,95	-0,31
	45,0	40,31	-0,39	-2,20	12,37	0,23
	67,5	46,68	-0,27	-0,58	14,89	0,49
	90,0	37,84	0,19	0,60	22,39	0,60
7	0,0	33,10	0,51	-1,60	13,47	-1,60
	22,5	35,41	-0,47	-3,75	12,91	-0,30
	45,0	43,07	-0,39	-2,49	12,21	0,25
	67,5	49,96	-0,27	-0,66	14,69	0,52
	90,0	39,85	-0,18	0,63	23,41	0,63

Tabla 6: resultados obtenidos con el modelo 2 para  $G/E_2 = 0,5$ .

A continuación se presentan una serie de gráficos (Figuras 10 a 15) que muestran la variación del factor de concentración de tensiones para los diferentes materiales ortótropos genéricos, a medida que se consideran distintas orientaciones de los ejes elásticos principales.

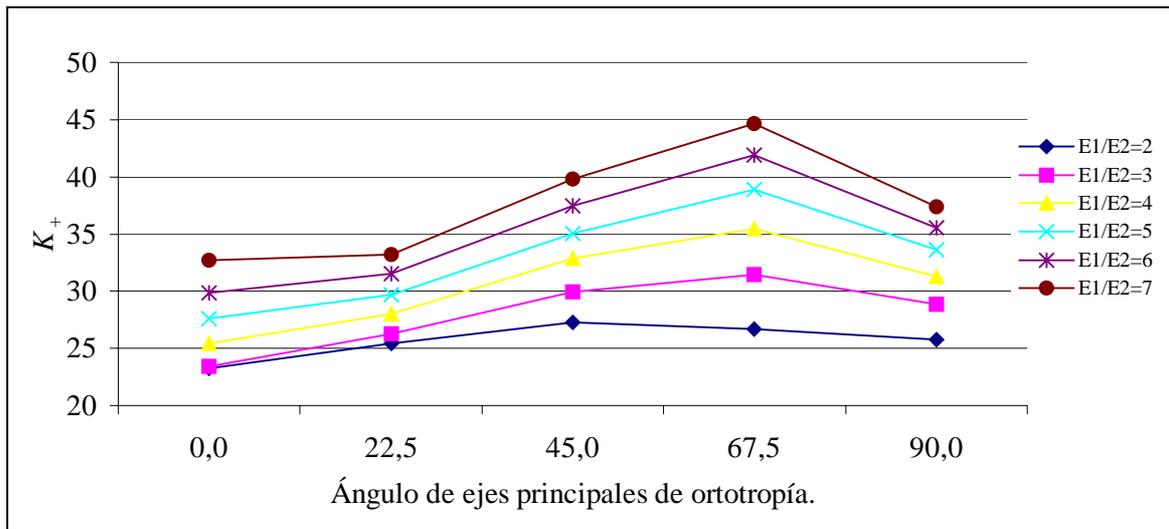


Figura 10: Factor de concentración de tensiones en función del ángulo de ortotropía.  $G/E_2 = 0,6$ .

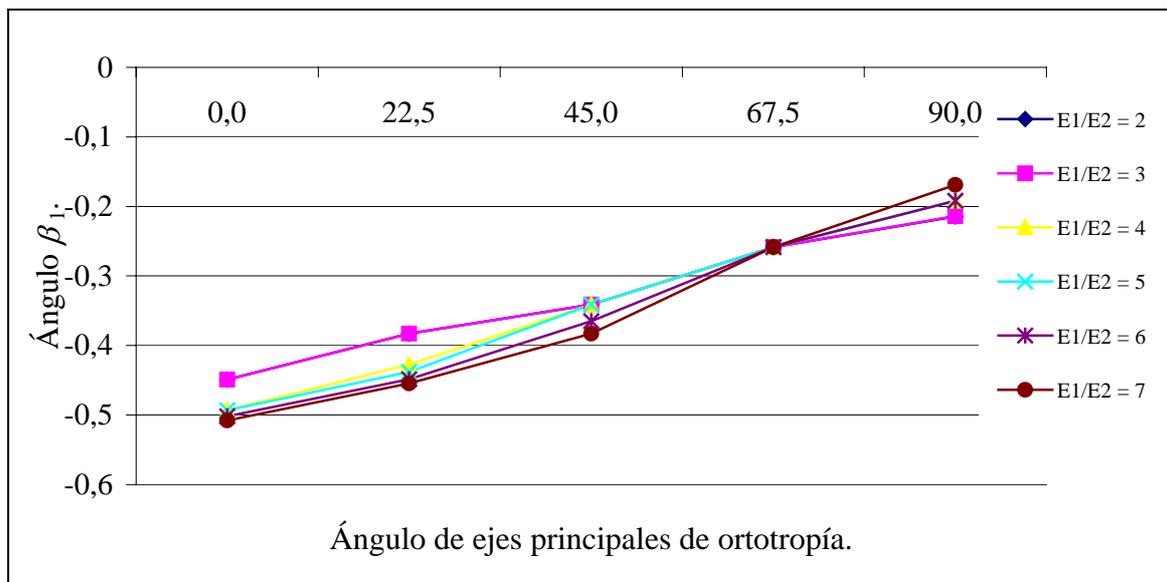


Figura 11:  $\beta_1$  en función del ángulo de ortotropía  $G/E_2 = 0,6$ .

Se observa que de las distintas orientaciones analizadas de los ejes elásticos principales de ortotropía, la que produce los mayores factores de concentración de tensiones  $K_+$ , es aquella en la que la dirección principal 1 y el eje  $x$  forman un ángulo de  $67,5^\circ$ . Este hecho se manifiesta para todas las relaciones  $E_1/E_2$  entre 2 y 7, tanto para  $G/E_2 = 0,6$  como para  $0,5$ . En tanto que el valor extremo de  $K_-$ , se produce para la orientación  $\theta = 22,5^\circ$ .

Se puede observar también que la ubicación de los puntos del contorno donde se producen los valores extremos de concentración de tensiones  $K_+$ , en general es cercana al punto del contorno que coincide con el eje de abscisas.

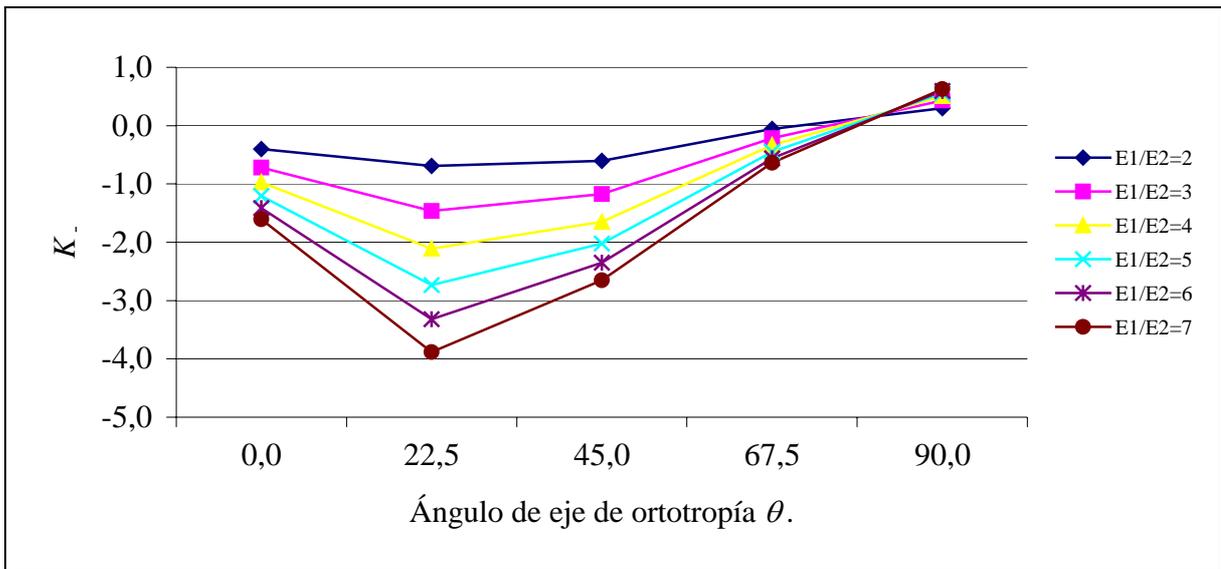


Figura 12: Factor de concentración de tensiones  $K_-$  en función del ángulo de ortotropía.  $G/E_2 = 0,6$ .

Estos son los gráficos de los datos obtenidos para  $G/E_2 = 0,5$ :

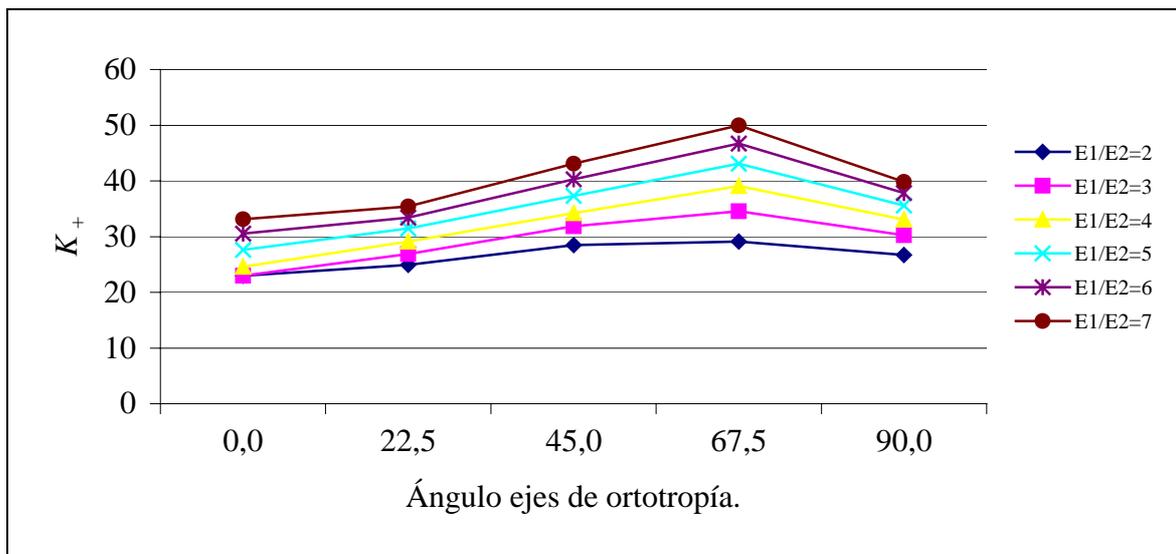
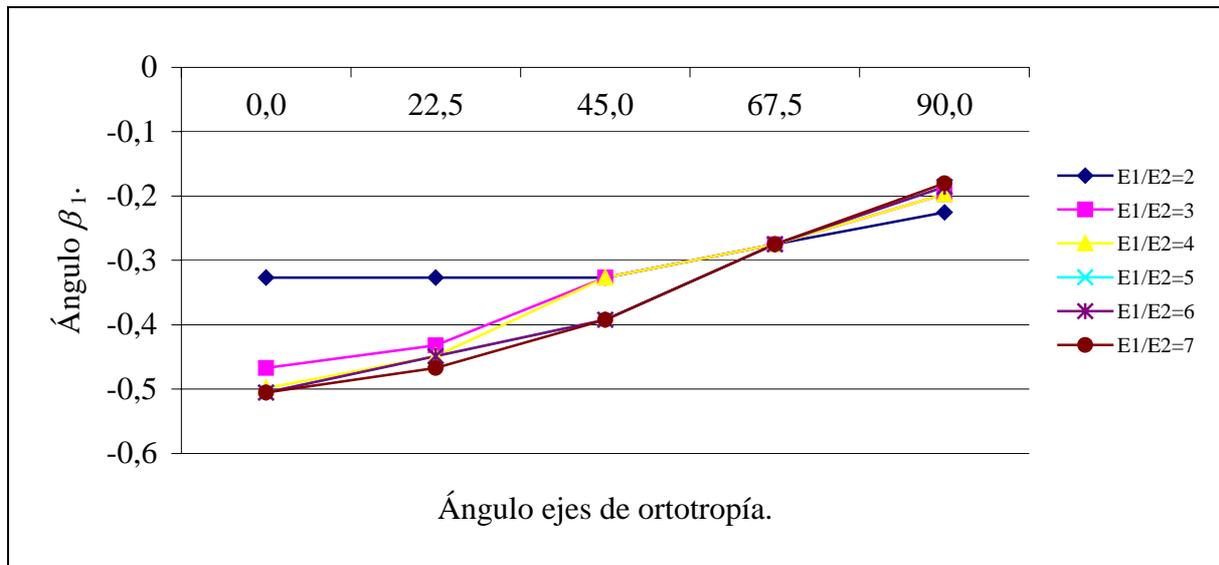
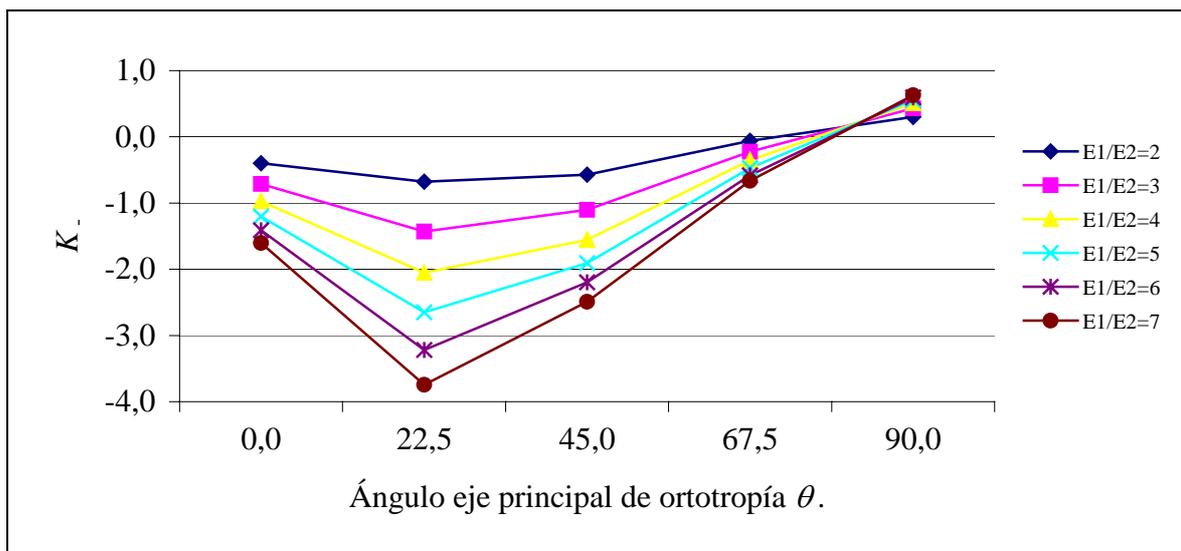


Figura 13: Factor de concentración de tensiones  $K_+$  en función del ángulo de ortotropía,  $G/E_2 = 0,5$ .

Figura 14: ángulo  $\beta_1$  en función del ángulo de ortotropía,  $G/E_2 = 0,5$ .Figura 15:  $K_$  en función del ángulo de ortotropía,  $G/E_2 = 0,5$ .

#### 4 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

#### REFERENCIAS

- ALGOR12, *Professional Mech/VE*, Algor Inc., Pittsburg, PA. EE. UU., 2001.  
 M. N. M. Allam y A. M. Zenkour. Stress concentration factor of a structurally anisotropic composite plate weakened by an oval opening. *Composite Structures*, 61:199-211, 2003.  
 D. V. Bambill, S. Maiz, R. E. Rossi y P. A. A. Laura. Numerical experiments on the determination of stress concentration factors in an orthotropic, finite plate with a circular hole subjected to uniform, in-plane loading in one direction. *Sometido a publicación*.

- D. V. Bambill, A. Susca, P. A. A. Laura y S. Maiz. Concentración de tensiones en placa ortótropa sometida a esfuerzo biaxial. *Mecánica Computacional*, Volumen XXIV. AMCA, 2675-2694, 2005.
- Kyung-Ho Park y Yong-Jin Kim. Analytical solution for a circular opening in an elastic-brittle-plastic rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 43:616-622, 2006.
- P. A. A. Laura y V. Sonzogni. Kirsch problem and the lower natural frequencies of a clamped square-plate. *Ocean engineering*, 24:985-988, 1997.
- S. G. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Publishers, New York, 1968.
- S. Maiz, R. E. Rossi, P. A. A. Laura y D. V. Bambill. Efectos de la ortotropía sobre el factor de concentración de tensiones: extensión del problema de Kirsch. *Mecánica Computacional*, Volumen XXIII. AMCA, 673-692, 2004.
- M. Sánchez y N. Troyani. Factor teórico de concentración de esfuerzos en piezas cortas de materiales anisótropos. *Mecánica Computacional*, Volumen XXII. AMCA, 2135-2144, 2003.
- V. G. Ukadgaonker y D. K. N. Rao. A general solution for stress around holes in symmetric laminated under in plane loading. *Composite Structures*, 49:339-354, 2000.