

## ESTADOS PLANOS DE TENSIONES EN DOMINIOS RECTANGULARES RIGIDIZADOS VIA METODO DEL ELEMENTO COMPLETO (MEC)

Eduardo A. Bambill<sup>a,b</sup>, Carlos P. Filipich<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461 B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4555220–Interno 132*  
[ebambill@frbb.utn.edu.ar](mailto:ebambill@frbb.utn.edu.ar), <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

<sup>b</sup> *Departamento de Ingeniería, Area Construcciones, Universidad Nacional del Sur. Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200*

<sup>c</sup> *Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional.*

**Palabras Clave:** Chapas rigidizadas, estados planos, series trigonométricas, MEC

**Resumen:** En la industria aeronáutica, así como en la construcción de puentes, cascos de barcos, etc, está muy difundido el uso de placas rigidizadas.

En este trabajo, para hallar el tensor plano de tensiones de la placa rigidizada, se utiliza la metodología del MEC (Método del Elemento Completo), con el cual, además de lograr la estacionariedad del funcional energético del conjunto estructural, se propone hallar las deformaciones del estado plano mediante series trigonométricas dobles. Las secuencias extremantes utilizadas, son ampliadas de modo de garantizar convergencia uniforme, al menos, para las funciones esenciales.

Un aporte original adicional del trabajo, lo constituye el modelo propuesto para analizar la chapa rigidizada. En la literatura existe una gran cantidad de modelos numéricos y analíticos que intentan reproducir dicho comportamiento. Es usual, analizar placa y rigidizador por separado, y establecer luego la compatibilidad entre ellos. En este caso, se optó por modelar al rigidizador como un caso particular de la misma placa. Así se expresa de modo formalmente idéntico el funcional energético, tanto para la placa como rigidizador, quedando así expresado el estado plano de tensiones, en función de las derivadas de los corrimientos. Se debe tener la precaución de controlar el movimiento de cuerpo rígido.

Es de destacar que la estacionariedad del funcional ampliado, conduce a disponer de una solución analítica del estado tensional. Atento a la importancia en ingeniería estructural de determinar las tensiones máximas a los fines del diseño, este es también un aporte adicional de sumo interés.

Se resuelven diversos casos, con y sin rigidizadores.

## 1 INTRODUCCIÓN

La utilización de placas planas rigidizadas es de uso muy difundido dentro de las ingenierías civil, aeronáutica, mecánica etc. En principio por su característica estructural propiamente dicha, pero también porque es el paso obligado para el estudio de la estabilidad del sistema que conocemos en la bibliografía como abolladura o abollamiento. En efecto, conocer la distribución tensional plana de los denominados estados planos, es de fundamental importancia para abordar los problemas de pandeo, tanto lineal como no lineal, del dominio plano cargado en su plano. Como se recordará esta distribución define los coeficientes de la ecuación general de abolladura (S.P. Timoshenko, S., and Goodier, J., 1970; O. Belluzzi, 1957; Bleich, F., 1952; Z. P. Bazant, L. Cedolin, 1991).

Por supuesto que los estados planos de tensiones pueden resolverse con técnicas numéricas aproximadas tales como Diferencias Finitas o Elementos Finitos (FEM). De hecho, en el presente trabajo los autores encuentran la solución analítica y la comparan con los resultados obtenidos por FEM, donde no contaremos con ecuaciones analíticas para las componentes de tensión, y además, como es bien conocido, se dispone de una solución numérica para las tensiones.

En este trabajo se abordan los estados planos, utilizando el sistema diferencial que toma como incógnitas primarias a las componentes  $u=u(x,y)$  y  $v=v(x,y)$  del vector desplazamiento en coordenadas cartesianas ortogonales  $x$  e  $y$ . El método de solución es el directo, a través de imponer estacionaridad al funcional energético proponiendo la solución analítica denominada MEC (en inglés WEM) (C. P. Filipich, M. B. Rosales and P. M. Bellés, 1998; M. B. Rosales and C. P. Filipich, 2002; M. B. Rosales and C. P. Filipich, 2003). Básicamente MEC, consiste en utilizar en dominios unitarios de cualquier dimensión-en esta presentación la dimensión es 2D-las denominadas secuencias extremantes que son series trigonométricas ampliadas convenientemente, para garantizar convergencia uniforme de la función desarrollada. En el ítem próximo, se presenta someramente la metodología que puede encontrarse con más detalle en las referencias dadas.

Los ejemplos resueltos corresponden a estados planos sobre dominios rectangulares rigidizados. Los autores están trabajando actualmente en sistematizar la herramienta a dominios cuadrangulares. Para tener en cuenta los rigidizadores, que como se verá en las aplicaciones serán de tipo “costilla” o bajorrelieves o sobrerrelieves superficiales y aún huecos, se agrega – algebraicamente - a la energía de deformación de la placa rectangular original, el aporte de nuevos dominios rectangulares de espesor y forma tales de representar la ganancia o pérdida de rigidización según el caso.

Como antecedente, se cita el estudio realizado por los autores, (C.P.Filipich, E.A. Bambill, 2005), habiéndose utilizado en esa oportunidad la metodología clásica de series de potencias. En dicho análisis, el rigidizador se modeló como viga deformable constreñida al plano de la chapa. En esta trabajo, la aplicación del MEC a un modelo donde el rigidizador es un resalto de similares características que la chapa, abre la oportunidad de contemplar una variedad de situaciones mucho más rica en aplicaciones de la ingeniería estructural. La Figura 3 muestra esas aplicaciones.

## 2 ENERGÍA DE LA CHAPA

Sea un estado plano de tensión, (Figura 1), en un dominio de contorno  $\Gamma$ . Para el estado plano de tensiones, aceptamos que las tensiones con subíndice  $z$  son nulas, es decir,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Esta situación es más cercana a la realidad, cuanto menor sea relativamente  $h$  frente a las dimensiones del dominio en el plano  $xy$ .

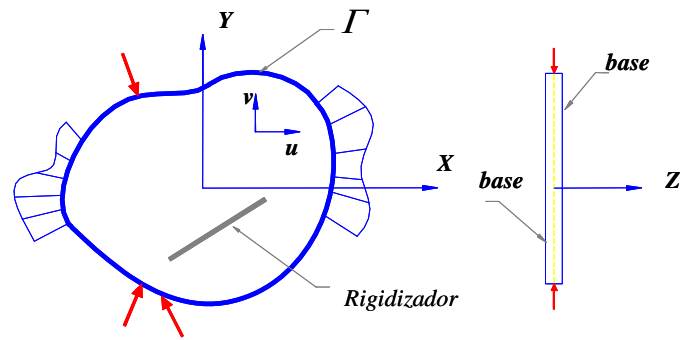


Figura 1. Estado Plano de Tensión

$$\sigma_X = \frac{E}{(1-\nu^2)}[\varepsilon_X + \nu \varepsilon_Y]; \quad \sigma_Y = \frac{E}{(1-\nu^2)}[\nu \varepsilon_X + \varepsilon_Y]; \quad \tau_{XY} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{XY} \quad (1.)$$

Definimos como energía total  $W$ , (o funcional energético), a la energía  $U^*$  de deformación almacenada en la chapa rigidizada, durante una deformación genérica, más la energía potencial y de posición  $U_e^*$  de las cargas aplicadas.

La energía de deformación del sistema constituido por la chapa y el sobreespesor, está dada por

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_X \varepsilon_X + \sigma_Y \varepsilon_Y + \tau_{XY} \gamma_{XY}) dV \quad (2.)$$

donde  $V$  es el volumen total del sistema. Para simplificar. Expresamos la energía total como

$$U^* = U_P^* + U_R^*$$

donde  $U_P^*$  es la energía de deformación de la chapa y  $U_R^*$  es la energía de deformación que aporta el sobreespesor.

Dado que las tensiones son solo función de los parámetros del plano  $XY$ , es posible expresarlas como

$$U_P^* = \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b (\sigma_X \varepsilon_X + \sigma_Y \varepsilon_Y + \tau_{XY} \gamma_{XY}) dx dy \quad (3.)$$

$$U_R^* = \frac{h_R - h}{2} \int_{X_1 Y_1}^{X_2 Y_2} (\sigma_X \varepsilon_X + \sigma_Y \varepsilon_Y + \tau_{XY} \gamma_{XY}) dx dy \quad (4.)$$

donde  $h$  es la altura de la chapa, y  $h_R$  es la altura del sobreespesor.

Bajo esta consideración, la propuesta con que se modela el sistema conduce a que los aportes energéticos tanto de la chapa como del resalto sean formalmente idénticos. La distinción entre ambos, queda determinada por los extremos de integración correspondientes los dominios respectivos en el plano.

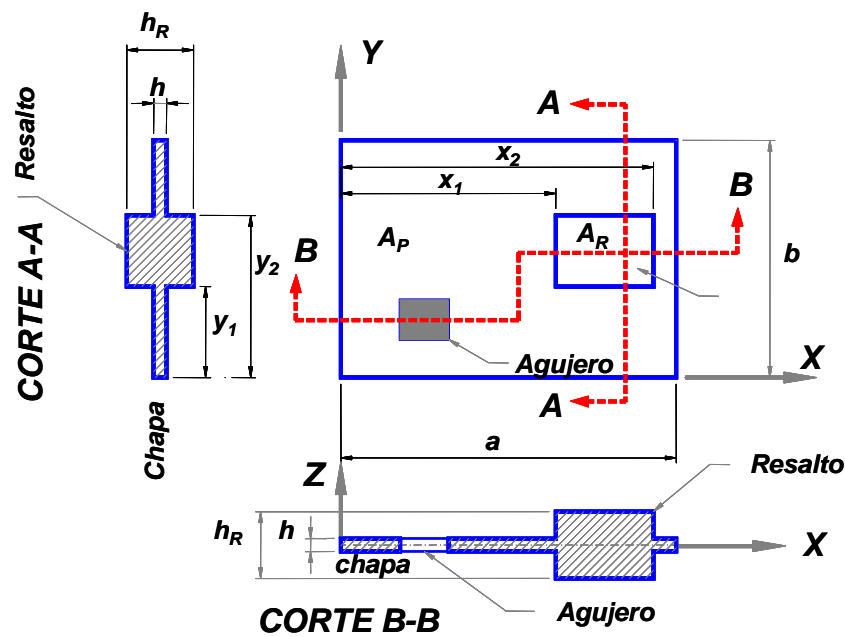


Figura 2 – Esquema de chapa rigidizada

A fin de adimensionalizar, hacemos

$$X = a x \quad \Rightarrow \quad dX = a dx \quad ; \quad Y = b y \quad \Rightarrow \quad dY = \frac{a}{r} dy \quad (5.)$$

y relacionamos  $r = \frac{a}{b}$  con lo cual  $dA = \frac{a^2}{r} dx dy$  (6.)

Por otro lado, las deformaciones

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial X} = u_X \quad ; \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial Y} = v_Y \quad ; \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} = u_Y + v_X \quad (7.)$$

con lo cual resulta

$$\varepsilon_X = \frac{u'}{a} \quad ; \quad \varepsilon_Y = \frac{r\bar{v}}{a} \quad ; \quad \gamma_{XY} = \frac{r\bar{u}}{a} + \frac{v'}{a} \quad (8.)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial x}(\bullet) = (\bullet)'$  ;  $\frac{\partial}{\partial y}(\bullet) = (\bar{\bullet})$

Luego, la expresión de la energía de deformación,

$$U_i = r K_i U_i^* \quad \text{siendo} \quad i = P; R$$

$$U_P = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \int_0^l (u'^2 + r^2 \bar{v}^2) dx dy + \frac{\beta}{2} \int_0^l \int_0^l u' \bar{v} dx dy + \frac{\Psi}{2} \int_0^l \int_0^l (r \bar{u} + v')^2 dx dy \quad (9.)$$

$$U_R = \frac{\alpha}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (u'^2 + r^2 \bar{v}^2) dx dy + \frac{\beta}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} u' \bar{v} dx dy + \frac{\Psi}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (r \bar{u} + v')^2 dx dy \quad (10.)$$

donde

$$\alpha = (1 - \nu) \quad ; \quad \beta = 2 r \nu (1 - \nu) \quad ; \quad \Psi = \frac{(1 - \nu)^2}{2} \quad (11.)$$

$$K_P = \frac{(1+\nu)(1-\nu)^2}{Eh} ; K_R = \frac{(1+\nu)(1-\nu)^2}{E(h_R - h)} \quad (12.)$$

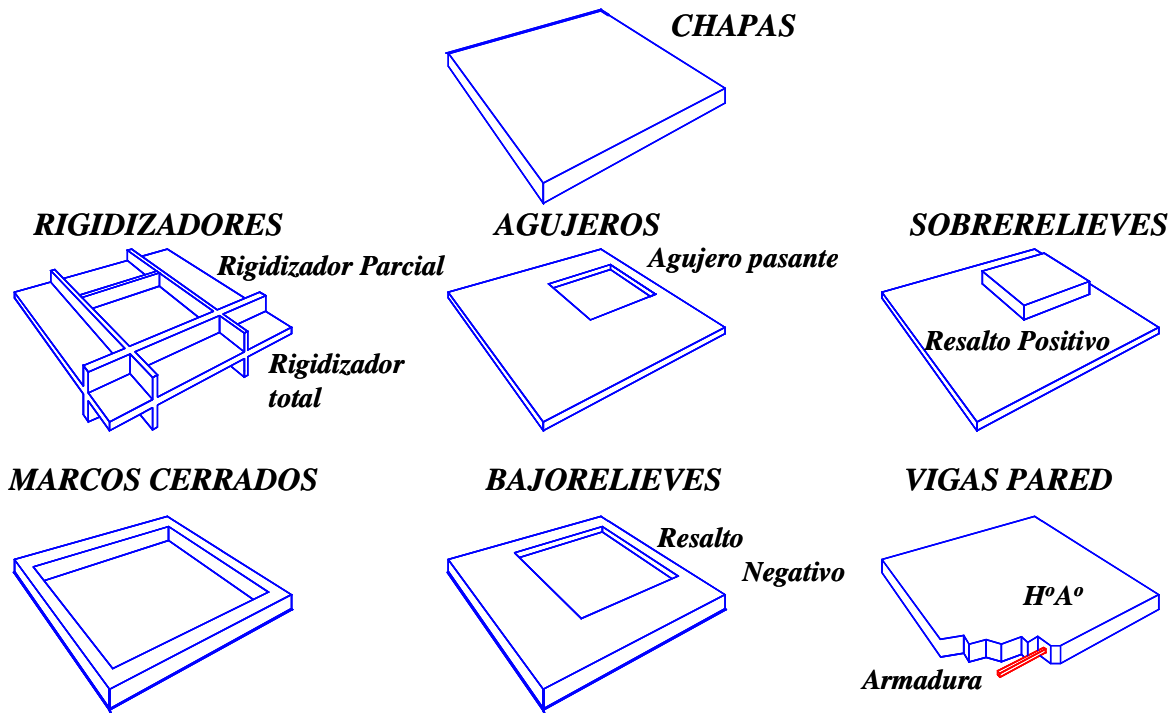


Figura 3 – Aplicaciones usuales en ingeniería

Introduciendo las expresiones (8) en (10), obtenemos  $U_P$  como  $U_R$  en función de las primeras derivadas de las componentes del vector plano de desplazamiento  $u$  y  $v$ , que pasan a ser las incógnitas básicas del problema.

En cuanto a la expresión de  $U_e^*$  de la energía posicional de las cargas, genéricamente escribimos

$$U_e^* = \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) ds \quad (13.)$$

donde la integral se extiende a la frontera del dominio, siendo  $p_x$  y  $p_y$  las componentes según  $x$  e  $y$  respectivamente de la carga aplicada sobre dicho contorno  $\Gamma$ .

Por lo expuesto, entonces

$$W = U_P^* + U_R^* + U_e^* \quad (14.)$$

Hemos adoptado la energía del sistema como una integral, cuyos parámetros indeterminados son los desplazamientos en el plano. Buscamos luego precisamente los valores de los desplazamientos que hacen mínima la energía.

Las soluciones equilibradas, como se sabe, provienen de imponer que

$$\delta W = 0 \quad (15.)$$

Obtenemos ahora el  $\delta U_i$  con  $i = P; R$

$$\delta U_i = \alpha \iint_{A_i} (u' \delta u' + r^2 \bar{v} \delta \bar{v}) dx dy + \frac{\beta}{2} \iint_{A_i} (u' \delta \bar{v} + \delta u' \bar{v}) dx dy + \frac{\psi}{2} \iint (r\bar{u} + v') (r\delta \bar{u} + \delta v') dx dy \quad (16.)$$

### 3 PROPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS

Definimos las componentes  $u$  y  $v$  del vector plano de desplazamientos como una serie trigonométrica ampliada según MEC, a fin de garantizar convergencia uniforme para los desplazamientos. Una breve descripción de la metodología de MEC, se presenta en el Anexo.

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \sin si \sin sj + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i0} \sin si + \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j} \sin sj + x \left( \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin sj + C \right) + y \left( \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sin si + D \right) + A_{00} xy + Ku \quad (17.)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \sin si \sin sj + \sum_{i=1}^{\infty} B_{i0} \sin si + \sum_{j=1}^{\infty} B_{0j} \sin sj + x \left( \sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin sj + F \right) + y \left( \sum_{i=1}^{\infty} G_i \sin si + G \right) + B_{00} xy + Kv \quad (18.)$$

A los fines de garantizar el control del movimiento de cuerpo rígido de la chapa rigidizada, adoptamos el esquema de la Figura 4. El punto A, origen de coordenadas, es un apoyo doble. El punto B, tiene impedido el desplazamiento en la dirección X.

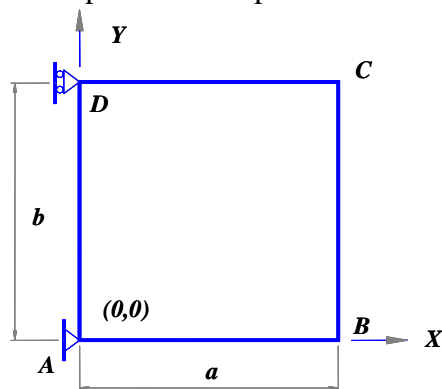


Figura 4– Control de movimiento de cuerpo rígido

La propuesta conduce a que  $Ku = Kv = D = 0$ .

De esta manera, la condición fundamental (15) se transforma en

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} + \frac{\partial W}{\partial B_{ij}} \delta B_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial A_{i0}} \delta A_{i0} + \frac{\partial W}{\partial B_{i0}} \delta B_{i0} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial A_{0j}} \delta A_{0j} + \frac{\partial W}{\partial B_{0j}} \delta B_{0j} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial C_j} \delta C_j + \frac{\partial W}{\partial F_j} \delta F_j \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial D_i} \delta D_i + \frac{\partial W}{\partial G_i} \delta G_i \right) + \frac{\partial W}{\partial C} \delta C + \frac{\partial W}{\partial F} \delta F + \frac{\partial W}{\partial G} \delta G \\ & + \frac{\partial W}{\partial A_{00}} \delta A_{00} + \frac{\partial W}{\partial B_{00}} \delta B_{00} = 0 \end{aligned} \quad (19.)$$

Aceptando que cada una de las variaciones son independientes, llegamos a un sistema infinito de ecuaciones (teóricamente), en los coeficientes de las series trigonométricas propuestas para los desplazamientos en el plano. Dichas ecuaciones, se generan anulando los factores correspondientes a dichas variaciones. A los efectos prácticos, se hace necesario truncar las series, lo cual permite resolver un sistema de ecuaciones en los coeficientes de las series. Dicho sistema es lineal, atento a que el funcional a extremar es cuadrático homogéneo.

De esta forma, conocemos por (17) y (18) las expresiones de  $u$  y  $v$  y de sus derivadas. Como dijimos, por (8), también deducimos el tensor de deformaciones, y por la Ley de Hooke, hallamos el campo plano de tensiones.

#### 4 EJEMPLOS ANALIZADOS

El actual trabajo plantea el estudio del estado plano de tensiones, bajo la metodología de Método del Elemento Completo (MEC en castellano, WEM en inglés). reconoce como una propuesta que

En la ingeniería estructural, las denominadas vigas de gran altura, también denominadas vigas pared, son elementos estructurales portantes de gran aplicación en la técnica de la construcción. El interrogante en estos casos es precisar el espesor a los fines de soportar la presión que fuera aplicada, y determinar donde se encuentran las máximas tensiones, por lo general resultan de vital interés durante el diseño de la estructura.

Los métodos de cálculo de las vigas de gran altura, requieren invariablemente la resolución del problema del estado elástico plano.

Se han comparado los resultados obtenidos con las series trigonométricas y MEF. A fin de plasmar ambos modelos, en el caso de MEF hubo que recurrir a la teoría tridimensional elástica, mientras que el modelo según el Método del Elemento Completo (WEM en inglés), simula un estado clásico plano de tensiones. Ambas metodologías arrojan valores concordantes, con la aparente excepción del efecto localizado sobre los rigidizadores. En los comentarios se explica la razón de esta aparente discrepancia.

Como primer caso de análisis, planteamos el cálculo de una viga pared rectangular (A.S. Kalmanok, 1962), para el estado de carga que se muestra en la Figura 5.

##### **Caso A: Viga Pared con tres rigidizadores totales.**

En el ejemplo analizado se han adoptado  $E=1$ ;  $a=1m$ ;  $b=1m$ . Para el espesor de la chapa  $h=0.01m$ .

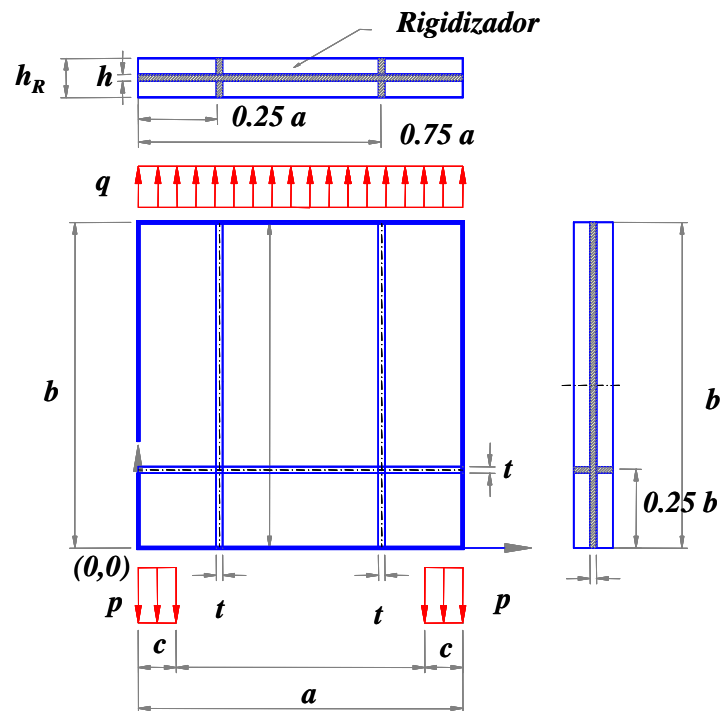


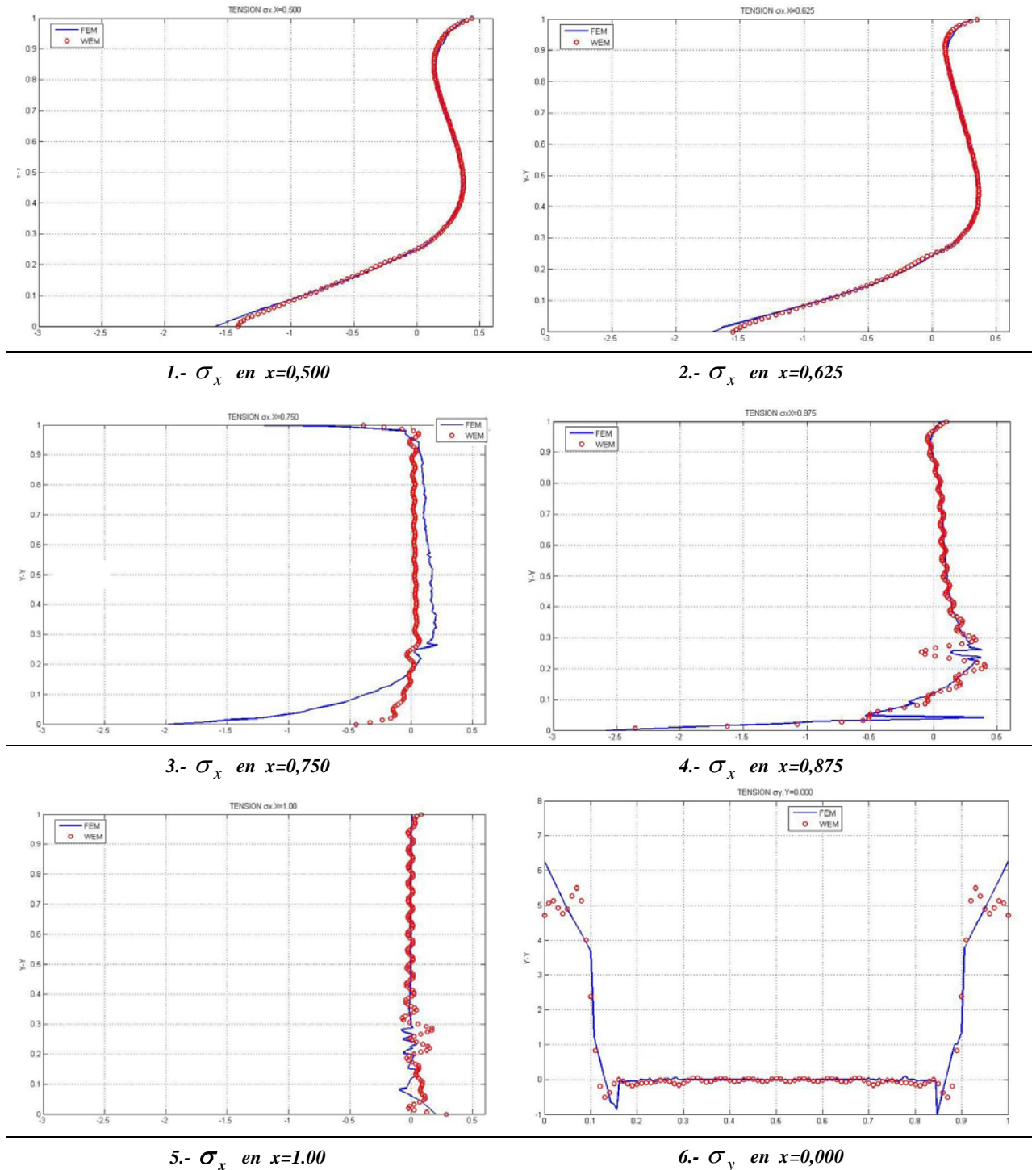
Figura 5 – Esquema de Viga Pared rigidizada

Figura 4

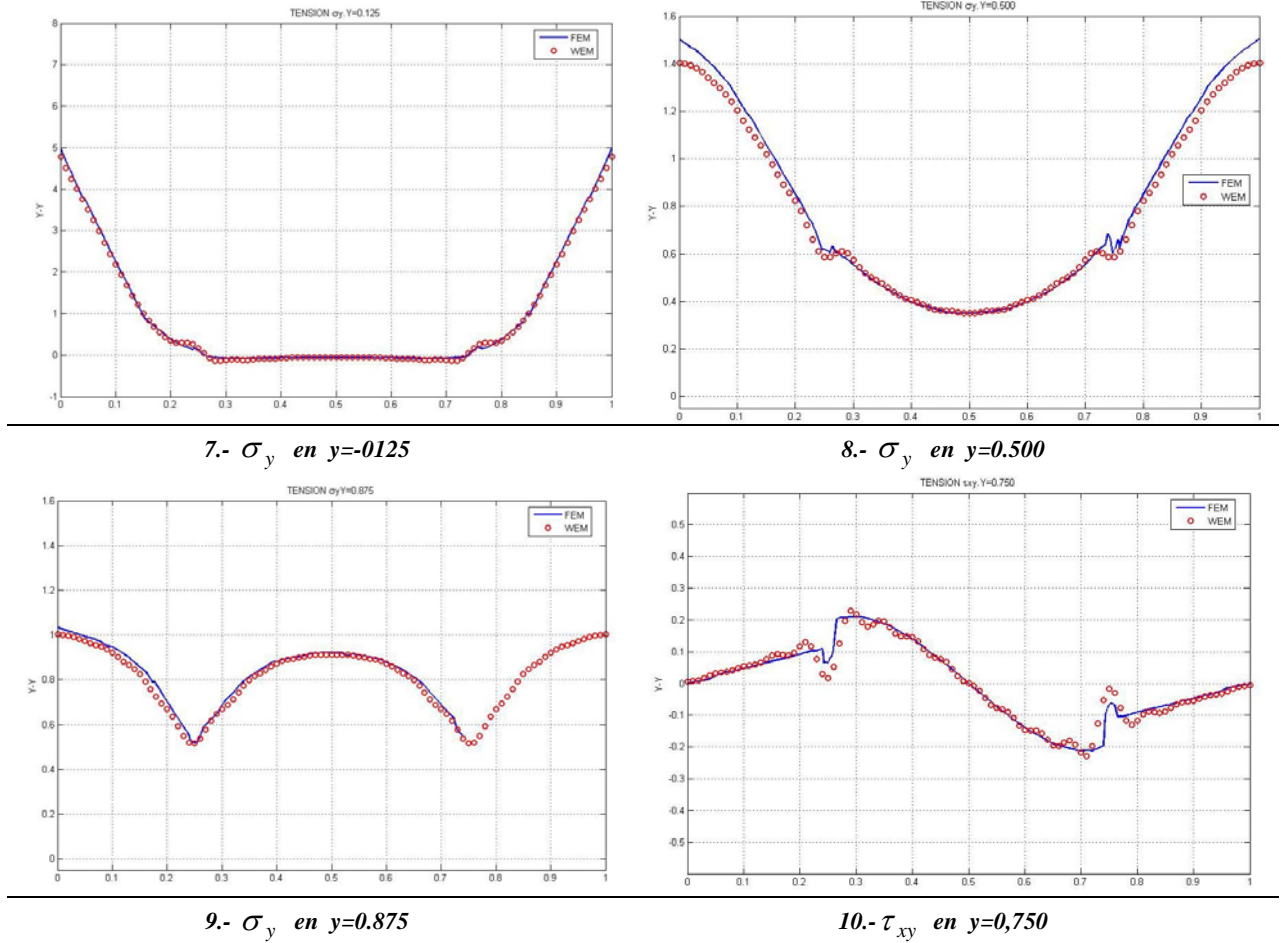
A los fines de modelar el rigidizador tipo, válido para todos los ejemplos, el mismo posee una altura  $h_R = 0,10\text{ m}$  y un espesor  $t = 0,02\text{ m}$ . La disposición de los tres rigidizadores totales, se indica en la figura.

En el análisis del esquema propuesto, se ha constatado una muy buena coincidencia entre los valores derivados de la metodología propuesta y FEM. A continuación, se indican algunos de esos resultados.

Chapa Rigidizada – Tres (3) rigidizadores  
Caso A – FEM y WEM







En el caso siguiente, se considera la chapa rigidizada, con cuatro rigidizadores, sometida a esfuerzo normal constante.

**Caso B: Chapa rigidizada, con 4 Rigidizadores Totales.**

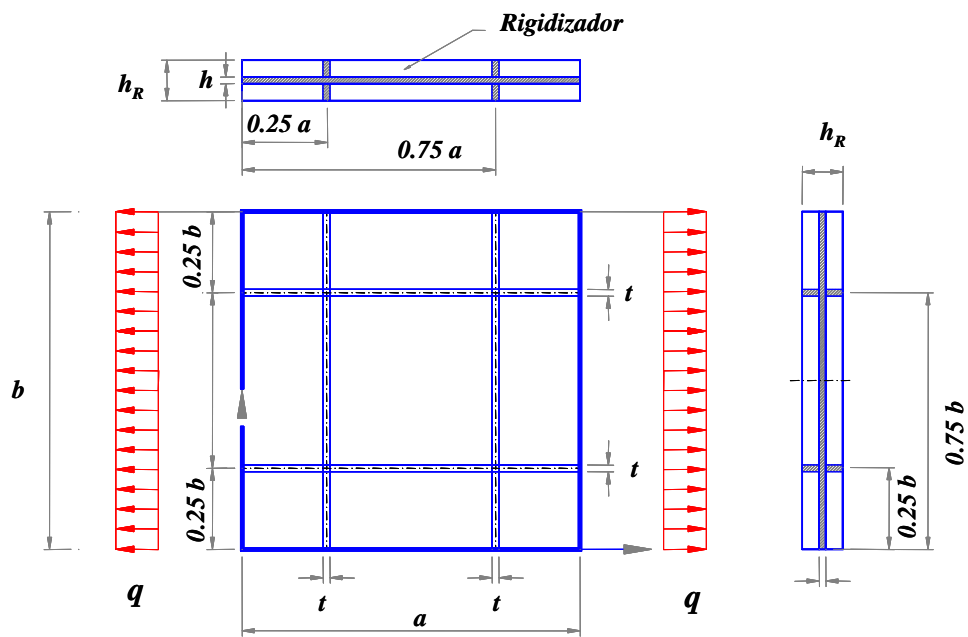
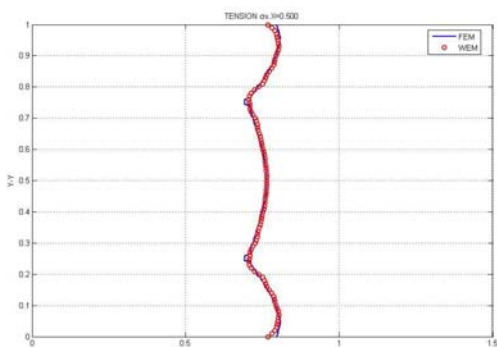


Figura 6 – Caso a chapa con (4) Rigidizadores Totales

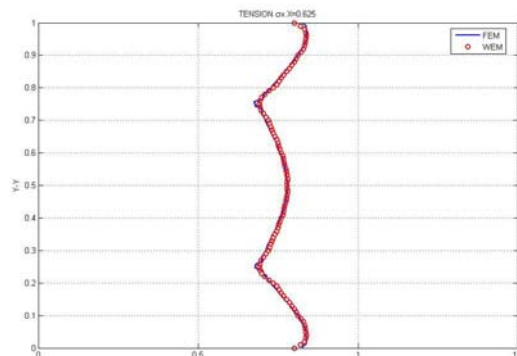
A la chapa, se le han adosado cuatro rigidizadores totales. Las dimensiones de la sección del rigidizador son  $t=0.02m$  y  $h_R=0.10 m$ .

A continuación se muestran los gráficos correspondientes a las tensiones obtenidos con la metodología de series trigonométricas del MEC (WEM) y las obtenidas con elementos finitos.

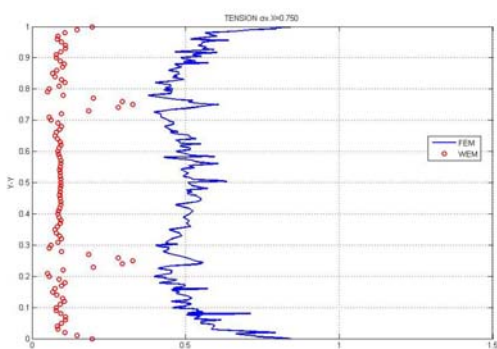
Chapa Rigidizada – Cuatro (4) rigidizadores  
Caso B – FEM y WEM



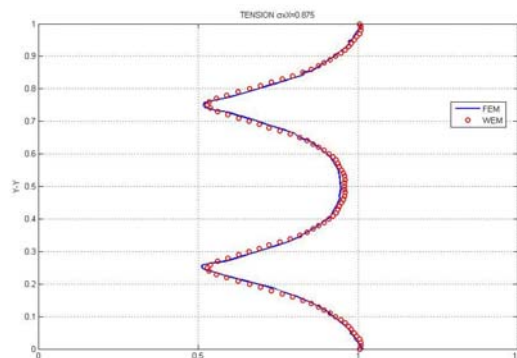
1.-  $\sigma_x$  en  $x=0,500$



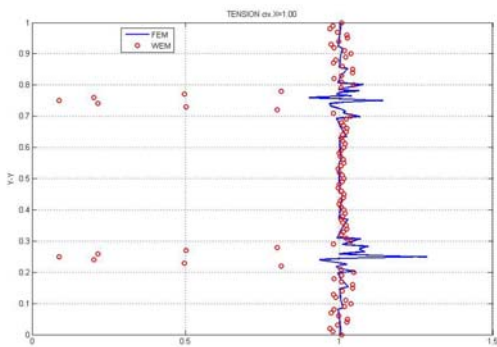
2.-  $\sigma_x$  en  $x=0,625$



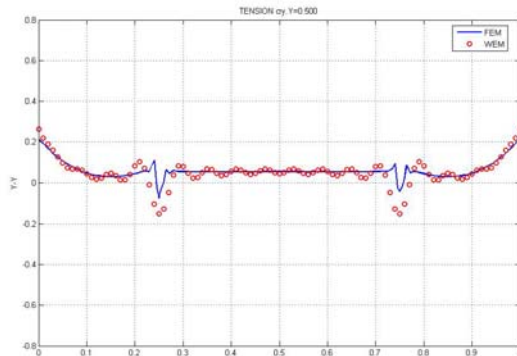
3.-  $\sigma_x$  en  $x=0,750$



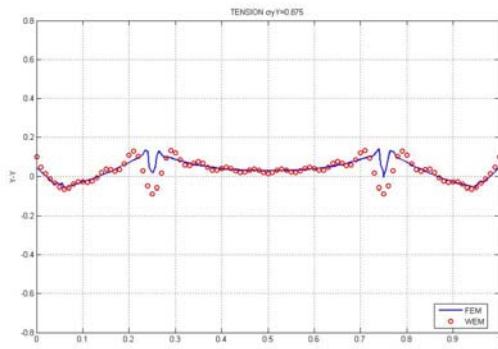
4.-  $\sigma_x$  en  $x=0,875$



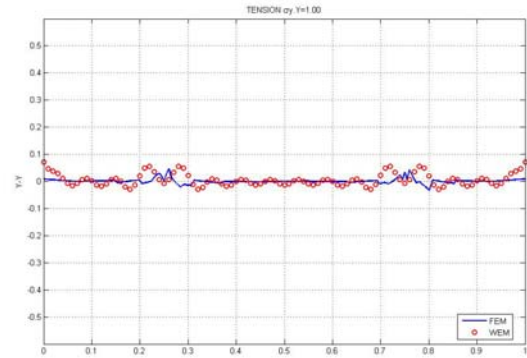
5.-  $\sigma_x$  en  $x=1,00$



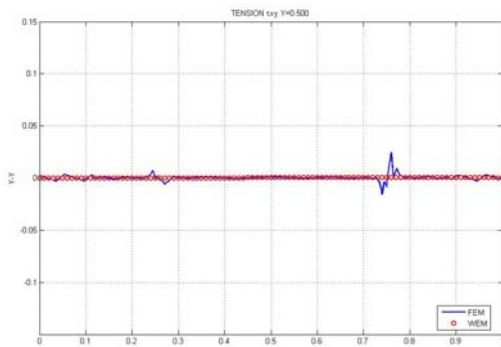
6.-  $\sigma_y$  en  $x=0,500$



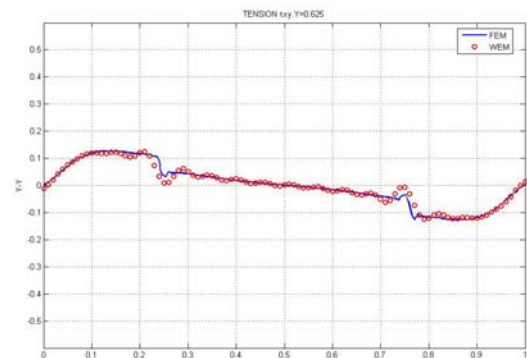
7.-  $\sigma_y$  en  $y=-0,875$



8.-  $\sigma_y$  en  $y=-1,000$



9.-  $\tau_{xy}$  en  $y=0,500$



10.-  $\tau_{xy}$  en  $y=0,625$

**Caso C: Chapa con Agujero Pasante**

Es común, el encontrar en la práctica el caso de chapas agujereadas. En este caso, hemos considerado el agujero de sección cuadrada, dispuesto en forma asimétrica en la pieza. El modelo analizado, se indica a continuación.

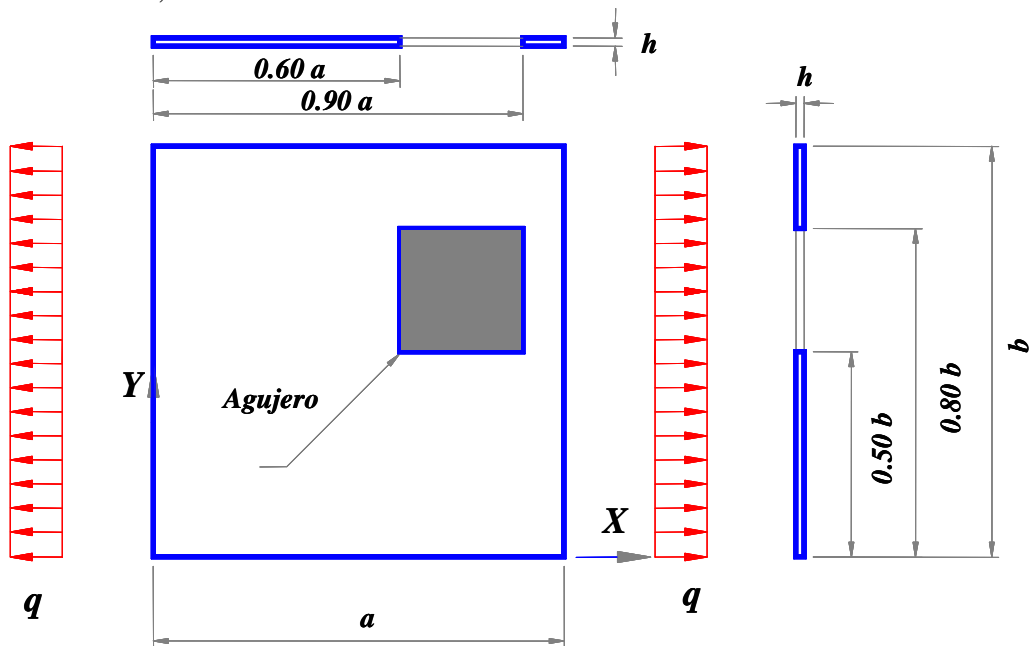
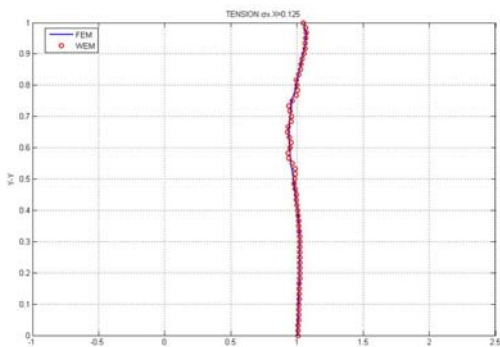
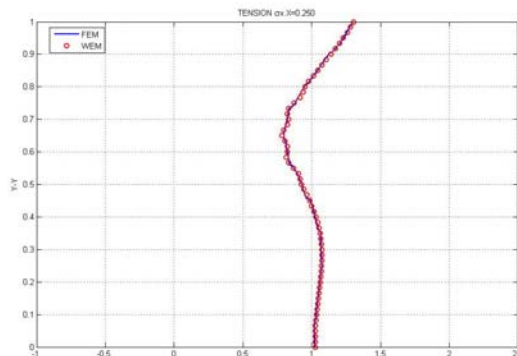


Figura 7 – Caso chapa agujereada.

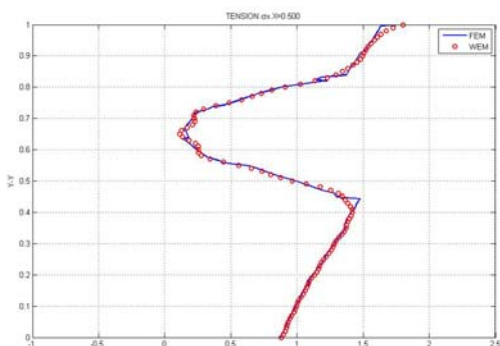
Chapa con Agujero Pasante Asimétrico  
Caso C – FEM y WEM



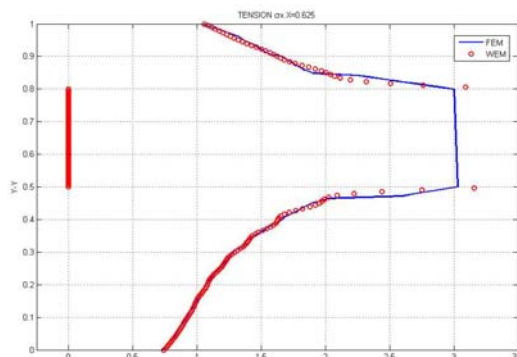
1-  $\sigma_x$  en  $x=0,125$



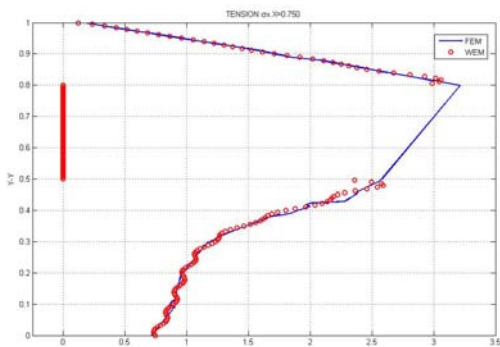
2-  $\sigma_x$  en  $x=0,250$



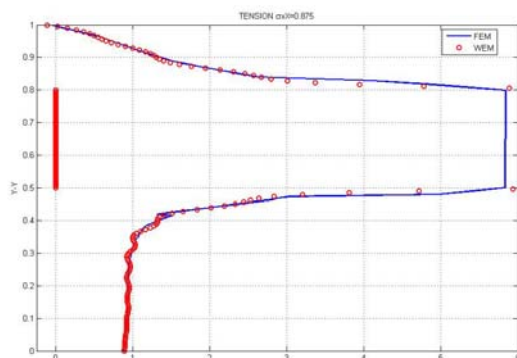
3.-  $\sigma_x$  en  $x=0,500$



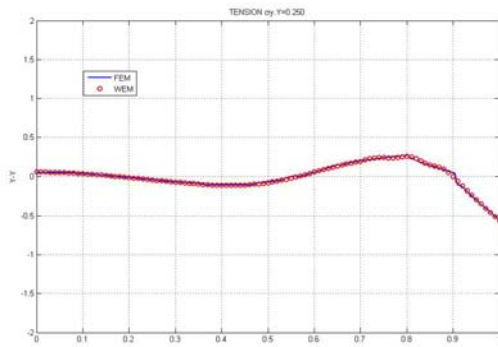
4.-  $\sigma_x$  en  $x=0,625$



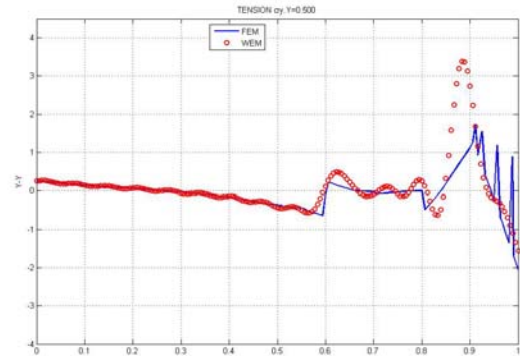
5.-  $\sigma_x$  en  $x=0,750$



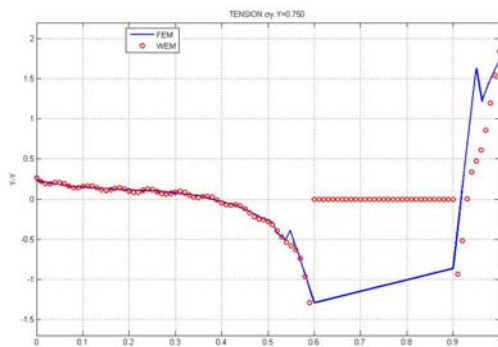
6.-  $\sigma_x$  en  $x=0,875$



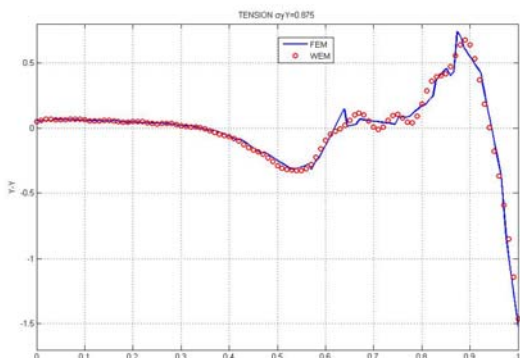
7.-  $\sigma_y$  en  $y=0,250$



8.-  $\sigma_y$  en  $y=0,500$



9.-  $\sigma_y$  en  $y=0,750$

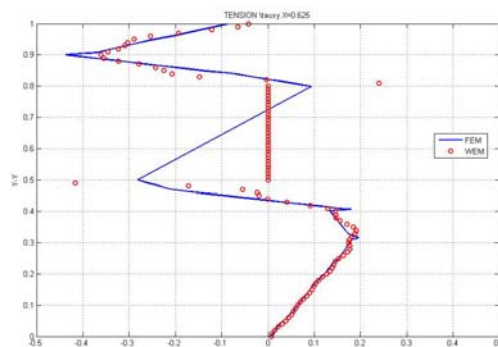


10.-  $\sigma_y$  en  $y=0,875$

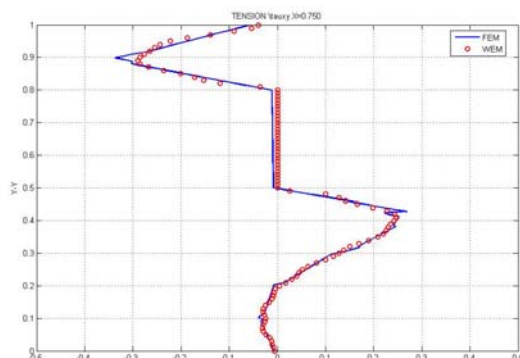
En el diagrama 1, si bien la sección analizada está alejada del agujero, comienza ya a evidenciarse la influencia del mismo, con una disminución de las tensiones  $\sigma_x$  sobre el sector donde se aloja el agujero.

En los próximos diagramas, comienza a detectarse el efecto de concentración de tensiones. Ya sobre el agujero, este efecto de manifiesta en toda su magnitud. El diagrama 6 permite observar un aumento de la tensión  $\sigma_x$  en el orden de un 600 %.

En los diagramas 9 y 10, observamos que la tensión  $\sigma_y$  tiende a reproducir el estado flexional de una viga, analizada según la teoría de resistencia de materiales. Efectivamente, el sector de chapa entre el agujero y el borde extremo vertical a la derecha, presenta la menor altura en todo el dominio. Sobre las secciones  $y=0,750$  e  $y=0.875$ , la tensión  $\sigma_y$  cambia de signo, con una ley aproximadamente lineal.



11.-  $\tau_{xy}$  en  $x=0,625$



12.-  $\tau_{xy}$  en  $x=0,750$

En los diagramas 11 y 12, correspondientes a las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  sobre las secciones  $x=0,625$  y  $x=0,750$  se observa que la chapa presenta el comportamiento propio del estado plano de tensiones, en el sector comprendido entre  $y=0$  y el agujero, en  $x=0,500$ . El tramo de chapa comprendido entre el otro borde del agujero ( $y=0,80$ ) y el borde superior de la chapa, presenta un comportamiento asimilable a la teoría de Colignon, donde el diagrama se aproxima a una parábola. Esto pone en evidencia, que cuando las secciones se angosta, efectivamente, el estado plano de tensiones se aproxima a la teoría de resistencia de materiales.

**Caso D: Pórtico cerrado, con carga simétrica como estado plano**

Como caso particular del estado plano de la chapa rigidizada, presentamos el caso del pórtico cerrado estructural, indicado en la Figura 8. Se adoptó un espesor de  $0,05 m$ .

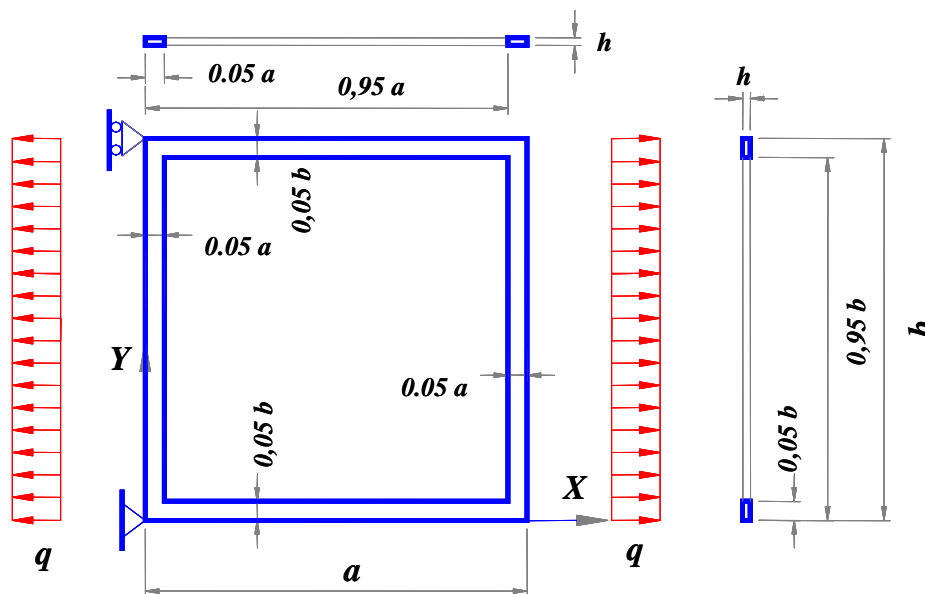
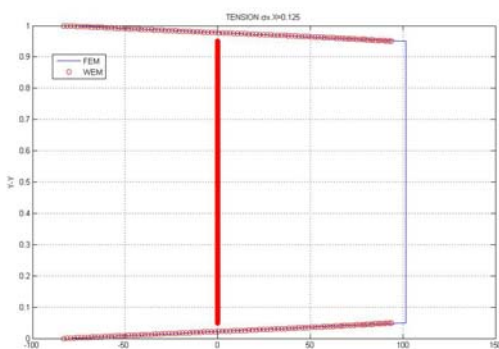


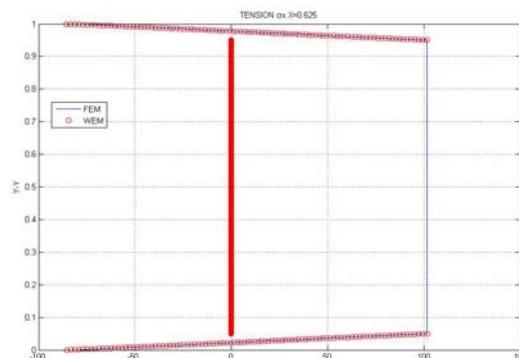
Figura 8 – Caso a Viga Pared con Rigidizador Total Horizontal

Las tensiones del estado plano, reproducen totalmente el estado de tensiones a verificar en un pórtico de las dimensiones indicadas, según la teoría de Resistencia de Materiales.

Portico Cerrado Simplemente Apoyado  
Caso c – FEM y WEM

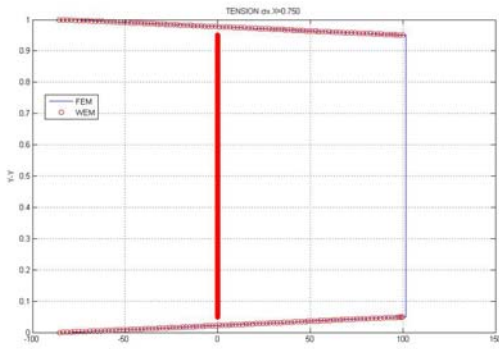


1.-  $\sigma_x$  en  $x=0,500$

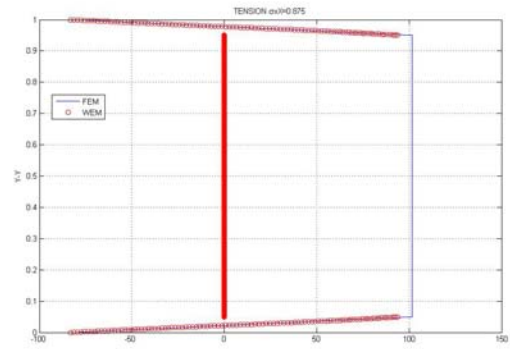


2.-  $\sigma_x$  en  $x=0625$



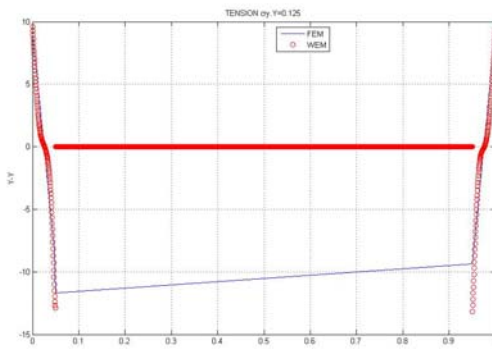


3.-  $\sigma_x$  en  $x=0,750$

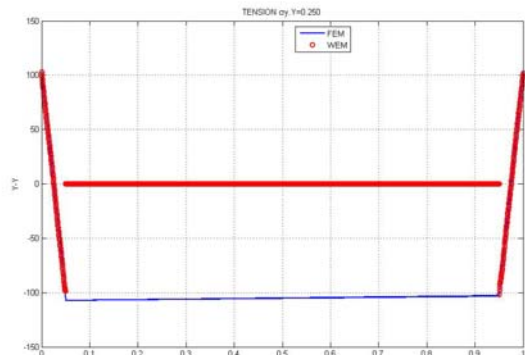


4.-  $\sigma_x$  en  $x=0,875$

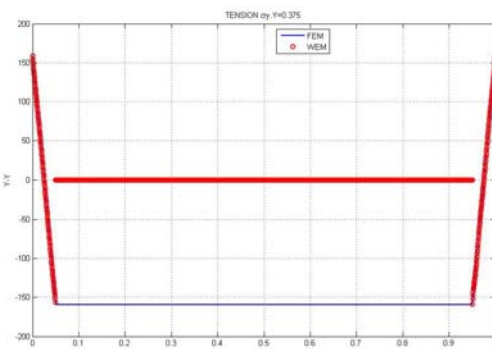
Sobre los tramos horizontales del pórtico, la tensión  $\sigma_x$  adquiere una ley de variación lineal. Efectivamente, el estado plano de tensiones, reproduce en las secciones de los tramos horizontales del pórtico, el estado de sollicitación flexo-nominal, que corresponde al análisis del pórtico según Resistencia de Materiales.



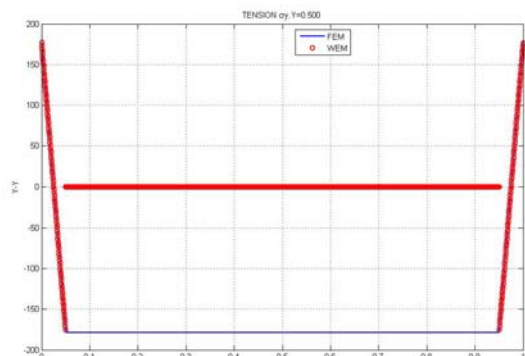
5.-  $\sigma_y$  en  $y=0,125$



6.-  $\sigma_y$  en  $x=0,250$

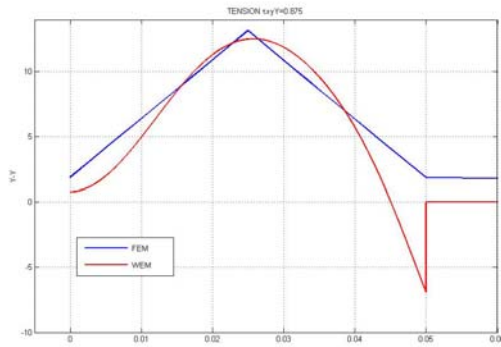
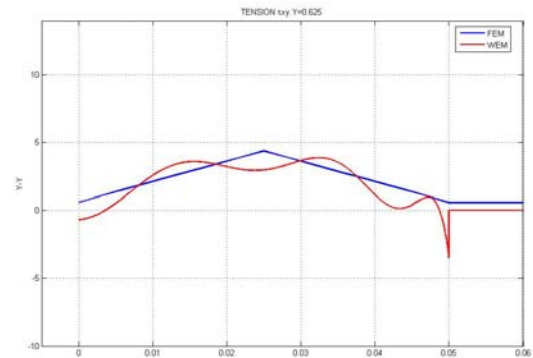


7.-  $\sigma_y$  en  $y=0,375$



8.-  $\sigma_y$  en  $y=-0,500$

Los tramos del pórtico vertical, a su vez se corresponden con las tensiones del estado flexional, con valores máximos en el centro del tramo, disminuyendo según la ley parabólica hacia los extremos de las barras. Efectivamente, el tramo de chapa considerada, se comporta como una viga.

9.-  $\tau_{xy}$  en  $y=0,875$ 10.-  $\tau_{xy}$  en  $x=0.750$ 

Los diagramas indicados según los gráficos 9 y 10, reproducen los valores de las tensiones tangenciales según Colignon, en el espesor de  $0.05a$ . El diagrama 10 pone en evidencia que para mejorar la gráfica debiera adoptarse una mayor cantidad para los términos de las series.

## 5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Como se observa en nuestra propuesta, la aplicación del MEC permite modelar una gran variedad de casos de utilización práctica en ingeniería. Modificando la proyección en planta sobre la chapa y la altura del resalto, se obtienen como casos particulares, rigidizadores longitudinales, parciales y totales, horizontales y verticales; sobrerrelieves y bajorrelieves. Un caso particular del bajorrelieve, es el agujero pasante para la chapa. La alteración de las propiedades de rigidez en el material de la chapa, en una geometría embebida en la masa de la misma, permite modelar el caso típico de vigas pared, de hormigón armado con acero. Incluso, se puede obtener el clásico análisis de estructuras aporticadas según Resistencia de Materiales.

La versatilidad del modelo, se logra a partir del funcional energético del resalto, formalmente idéntico al de la chapa.

En general, se observa una alta concordancia entre los valores obtenidos con MEC y FEM. Sin embargo, los diagramas 3 del caso A y del caso B, muestran una discrepancia entre los valores hallados con MEC y FEM. Es importante señalar que las secciones donde se produce este disenso, corresponden a secciones donde se despliega el rigidizador.

La aparente discrepancia entre ambas metodologías, responde a la diferencia de los modelos empleados para reproducir el comportamiento de la chapa rigidizada. MEC reproduce invariablemente un estado plano de tensiones, mientras que con FEM el modelo es tridimensional elástico. Los valores de las tensiones calculadas en los puntos singulares, correspondientes al plano medio en el modelo tridimensional, están siempre por encima de los hallados con el modelo 2D. Efectivamente, el modelo 2D está constreñido a promediar la tensión en toda la altura del rigidizador, mientras que el modelo 3D es más flexible a la hora de reflejar la variación en la distribución de las tensiones a lo largo de la altura del rigidizador. MEF podría reproducir los diagramas de tensiones hallados por series trigonométricas, aplicando el teorema del valor medio: calculada la resultante y distribuida uniformemente sobre el área del rigidizador, daría lugar, a la distribución continua mencionada.

Queda entonces en claro, que la aparente discrepancia se presenta exclusivamente como efecto localizado en cada uno de los diagramas presentados.



Otra diferencia entre ambas metodologías, surge de la comparación de las gráficas de tensiones obtenidas en cada caso. Efectivamente, las series trigonométricas dan valores de tensiones con distribución suave, aún sobre los rigidizadores. En cambio MEF, con un código que toma como incógnitas primarias los desplazamientos, introduce una distribución irregular debido a la derivación del campo de desplazamientos, y que, todavía, evaluada sobre el plano medio, no contempla el efecto completo de las tensiones en el rigidizador.

Como ya hubiera sido advertido en la introducción, la gran ventaja que presenta esta metodología, es la disponer de la expresión analítica de las componentes de tensión. Recordemos que las mismas, pasan a ser los coeficientes variables de la ecuación que gobierna el problema de inestabilidad de un estado plano.

Sin haber mediado un cuidadoso esmero para optimizar el algoritmo, no se aprecian diferencias en el tiempo computacional a la hora de calcular el estado de tensiones según ambos métodos. La ventaja del MEC radica, en que una vez que han sido hallados los coeficientes de las series, éstas reproducen el estado tensional en cualquier punto o sección del dominio, en forma casi inmediata. FEM habrá de requerir de una nueva corrida para determinar tensiones en puntos que no hubieran sido previstos en el análisis.

Una ventaja adicional de la metodología, que los autores estiman fundamental, es que MEC garantiza a priori convergencia uniforme, con lo cual, los valores hallados tienden a la solución exacta. Si bien la precisión es arbitraria, pues depende de la cantidad de términos adoptados para las series trigonométricas, puesto que es posible también elegir a conveniencia su número, los resultados son siempre satisfactorios. Se señala que en todos los casos analizados, se operó con series de no más de 30 (treinta) términos.

Las expresiones propuestas con MEC son ciertamente elementales, aunque extensas. Sin embargo, una vez establecidas éstas en un algoritmo, el mismo resulta sumamente versátil a la hora de modelar el comportamiento estructural de los esquemas establecidos en la Figura 3 de este trabajo.

En todos los casos, los términos utilizados para cada serie fueron treinta.

## 6 REFERENCIAS

- Z. P. Bazant, L. Cedolin. *Stability of Structures*. N York. The Oxford Engineering Science Series. 1991.
- O. Belluzzi, *Ciencia de la Construcción*. Aguilar. 1957.
- F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- C. P. Filipich, M. B. Rosales and P. M. Bellés. *Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids*. Journal of Sound and Vibration, Volume 212, Issue 4, 14 May 1998.
- C.P.Filipich, E.A. Bambill. *Estados planos de tensiones en dominios rectangulares con rigidizadores parciales utilizando series de potencias*. Mecánica Computacional, Vol. XXIV. (ENIEF 2005). Buenos Aires.
- A.S. Kalmanok. *Cálculo de vigas pared*. Editora Interciencia. 1962.
- M. B. Rosales and C. P. Filipich, *Time integration of non-linear dynamic equations by means of a direct variational method*. Journal of Sound and Vibration, Volume 254, Issue 4, 18 July 2002.
- M. B. Rosales and C. P. Filipich. *Vibration of orthotropic plates: discussion on the completeness of the solutions used in direct methods*. Journal of Sound and Vibration, Volume 261, Issue 4, 3 April 2003.
- S.P. Timoshenko, S., and Goodier, J., *Theory of Elasticity*, 3rd ed. McGraw-Hill, NY, 1970.

## ANEXO

## SUCINTO DESARROLLO DEL MEC

Sea  $f=f(x)$  una función continua en  $x \in [0,1]$ . Existen dos desarrollos de convergencia uniforme sobre los cuales se basa el MEC: (CU  $\Rightarrow$  Convergencia Uniforme)

$$f(x)=f1(x)= \sum Ai \operatorname{sen}(i \pi x)+Ao.x +a \quad \text{CU(1)}$$

$$f(x)=f2(x)= \sum Bi \operatorname{cos}(i \pi x)+Bo \quad \text{CU(2)}$$

donde

$$a=f(0), Ao=f(1)-f(0), Ai=2 \int_0^1 (f(x) - Ao.x - a).\operatorname{sen}(i \pi x).dx$$

$$y \quad Bo= \int_0^1 f(x).dx \quad Bi= 2 \int_0^1 f(x).\operatorname{cos}(i.\pi.x).dx$$

La principal ventaja de este desarrollo es que  $df1(x)/dx$  es una serie de cosenos y conserva la CU. En tanto que  $df2(x)/dx$  es sólo de convergencia en la media (L2).

Si tuviéramos una función continua en un espacio de dimensión 2D : $f=f(x,y)$   $\{0 \leq x, y \leq 1\}$  el MEC de forma natural da lugar por ejemplo a las siguientes series ampliadas

$$f(x,y)=f1(x,y)= \sum Ai(y) \operatorname{sen}(i \pi x)+Ao(y).x +a(y) \quad \text{CU(3)}$$

$$f(x,y)=f2(x,y)= \sum Bi(y) \operatorname{cos}(i \pi x)+Bo(y) \quad \text{CU(4)}$$

De acá en adelante existen infinitas posibilidades porque será posible desarrollar cada  $Ai(y)$  y cada  $Bi(y)$  en las formas (1) o (2). En el presente desarrollo se adoptan para las funciones incógnitas básicas  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  las siguientes series ampliadas de senos (que como se observa lejos están de ser evidentes) con la enorme ventaja de que –como dijimos– sus primeras derivadas, que intervienen en el método directo, son de CU. Además, estos campos de derivadas primeras permiten entonces a través de la Ley de Hooke hallar el tensor de tensiones con CU ,que es como ya expresamos la finalidad última del trabajo.