

UNA NUEVA TEORÍA DE LÁMINAS REBAJADAS CON INCLUSIÓN DE DEFORMACIÓN POR CORTANTE

José M. Martínez Valle^a, Victor Fachinotti^b, Alejandro Albanesi^b y José M. Martínez Jiménez^a

^aDepartamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, jmvalle@uco.es

^bCentro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, vfachino@intec.unl.edu.ar, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar.

Palabras clave: Láminas, deformación por cortante, teorías de orden superior.

Resumen. A día de hoy existen una gran cantidad de teorías que estudian las estructuras laminares. Aunque las estructuras laminares (bóvedas, cúpulas...) se llevan construyendo desde hace muchos siglos, su modelización matemática no se empezó a estudiar hasta mediados del siglo pasado. Desde entonces han surgido una gran cantidad de teorías que intentan explicar el comportamiento de este tipo de estructuras. Desde unas primeras aproximaciones que suponían la forma de trabajo de estas estructuras en el llamado estado de membrana, y bajo determinadas hipótesis cinemáticas en cuanto a la distribución de desplazamientos en el espesor de la lámina en su configuración deformada, las teorías de láminas han ido evolucionando hasta la fecha incorporando los efectos de la deformación del cortante, grandes rotaciones etc. En el presente trabajo se deducen nuevas ecuaciones para láminas de pequeña curvatura (shallow shells) que incluyen efectos de cortante de 2º orden y por tanto válidas para laminas gruesas. Las ecuaciones deducidas pueden ser resueltas mediante series de Fourier, o bien tratadas por métodos numéricos sin dificultad.

1 INTRODUCCION

Las estructuras laminares son estructuras de gran belleza que se llevan construyendo desde hace muchos siglos. Los primeros constructores de este tipo de estructuras lo hacían con una buena dosis de intuición física y tomando nota de los errores cometidos por sus antecesores.

No obstante, a día de hoy, poseemos un valioso repertorio de bóvedas y cúpulas que han perdurado a lo largo de los siglos y que son un buen ejemplo de arquitectura e ingeniería.

La comprensión del comportamiento de las estructuras laminares y su modelización matemática es bastante más reciente. La primera teoría de láminas propiamente dicha la podemos encontrar en los trabajos de [Love \(1892\)](#) donde introduce la hipótesis cinemática básica de flexión de láminas delgadas: las fibras de la lámina perpendiculares a la superficie media antes de la deformación, permanecen perpendiculares después de la deformación a dicha superficie media, usualmente superficie de referencia. En este trabajo considera pequeñas las deformaciones y desplazamientos así como la influencia del esfuerzo cortante en la deformación de la lámina.

Algunas inconsistencias de esta teoría fueron puestas de manifiesto en trabajos posteriores como los trabajos de [Vlasov \(1949\)](#), [Timoshenko \(1959\)](#) y [Novozhilov \(1958\)](#) entre otros. El trabajo de Vlasov incluye la deformación por cortante en las teorías de láminas mientras que el trabajo de Timoshenko desarrolla por completo el estudio de láminas en estado de membrana y algunos casos de flexión.

Aunque podríamos citar a muchos otros autores, en este campo, un autor de referencia es [Koiter \(1967,1969\)](#). Sus trabajos incluyen teorías de grandes desplazamientos-deformaciones, estudios del complicado fenómeno del pandeo en láminas, haciendo uso en muchos de ellos de cálculo tensorial.

[Wempner \(1982\)](#) y [Pietraszkiewicz \(1984,1989\)](#) desarrollan teorías de láminas en coordenadas curvilíneas arbitrarias que incluyen la no linealidad geométrica y válidas por tanto para láminas de geometría arbitraria. Este segundo autor hace un estudio muy exhaustivo de las grandes rotaciones en teorías de láminas delgadas.

Posteriormente a estos trabajos antes nombrados, y hasta la fecha, ha aparecido una cascada de trabajos que han desarrollado intensamente teorías más avanzadas incluyendo fenómenos de deformación por esfuerzo cortante de orden superior, necesario para láminas moderadamente gruesas y gruesas, inclusión de tensiones normales a la lámina etc. Son de destacar los trabajos de [Reddy \(1985\)](#), donde desarrolla una teoría de láminas con aplicaciones para materiales laminados, y el compendio de [Kienzler \(2004\)](#) donde se repasan distintas teorías de las características antes comentadas.

La aportación de este trabajo se refiere a las denominadas láminas rebajadas o de pequeña curvatura (shallow shells). Aunque este tipo de teorías se pueden entender como una simplificación de teorías más generales, las simplificaciones adoptadas para su desarrollo generan distintas ecuaciones de cálculo. Se introduce en este trabajo una hipótesis nueva relacionada con el giro de la normal sobre su propio eje que da lugar a nuevas ecuaciones de cálculo. Además, la presente teoría incluye deformación por cortante de 2º orden por lo que es válida para láminas gruesas.

2 CINEMATICA DE LÁMINAS

Por lámina entendemos un elemento estructural en la que dos de sus dimensiones son mucho mayores que una tercera que es el espesor.

Nuestro punto de partida son la definición de corrimientos y deformaciones. En caso de sistemas curvilíneos ortogonales, tenemos que las deformaciones normales ε_{α_i} y los

deslizamientos γ_{ij} tienen la expresión,

$$\epsilon_{\alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \frac{v_n}{\sqrt{g_{nn} g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial \alpha_n} \tag{1}$$

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{jj}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \tag{2}$$

Debemos particularizar estas expresiones generales de la teoría de la elasticidad para el caso de estructuras laminares. Para puntos situados en la superficie media tenemos que,

$$g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j; \quad g_{11} = h_\alpha \cdot h_\alpha = A^2; \quad g_{22} = h_\beta \cdot h_\beta = B^2; \quad g_{33} = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

Donde h_α y h_β son los correspondientes vectores tangentes (no unitarios) a la superficie media.

La posición de un punto genérico de la lámina viene dada por, (ver Figura 1)

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \eta \vec{n} \tag{3}$$

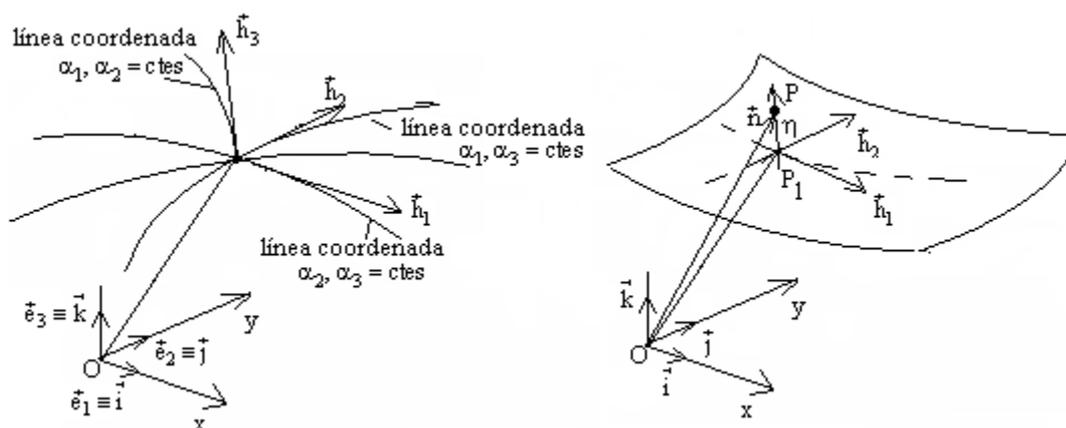


Figura 1: Sistema de Referencia intrínseco de la superficie media de la lámina. Sistema de Referencia Global

Si derivamos esta expresión,

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_1} = \vec{h}_1 + \eta \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_1} \tag{4}$$

Y como,

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{\rho_i} \vec{h}_i, \tag{5}$$

entonces,

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_1} = \vec{h}_1 \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1} \right). \tag{6}$$

donde ρ_i es el radio de curvatura. Podemos reescribir entonces los vectores tangentes y los coeficientes de la 1ª forma fundamental como,

$$\left(\vec{h}_{\alpha_i} \right)_m = \left(\vec{h}_{\alpha_i} \right)_p - \eta \cdot k_i \cdot \vec{h}_{\alpha_i} = (1 - \eta \cdot k_i) \vec{h}_{\alpha_i} \tag{7}$$

$$A_1^2 = (\vec{h}_\alpha)_m \cdot (\vec{h}_\alpha)_m = (1 - \eta \cdot k_1)^2 \cdot A^2 \quad (8)$$

$$B_1^2 = (\vec{h}_\beta)_m \cdot (\vec{h}_\beta)_m = (1 - \eta \cdot k_2)^2 \cdot B^2 \quad (9)$$

Donde hemos expresado los coeficientes de la 1ª fórmula fundamental de la superficie media en función de los una superficie arbitraria de la lámina paralela a ella y k_1 y k_2 son las curvaturas principales de la superficie.

Si introducimos estas últimas expresiones en la definición de deformaciones normales y angulares, tenemos la deformación de un punto genérico de la lámina,

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{u}{(A_1)^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 B_1} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{w}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \gamma} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_1 B_1} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - k_1 \frac{Aw}{A_1} \quad (10)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{B_1} \right) + \frac{u}{A_1 B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} + \frac{v}{(B_1)^2} \frac{\partial B_1}{\partial \beta} + \frac{w}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \gamma} = \frac{u}{A_1 B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B_1} \frac{\partial v}{\partial \beta} - k_2 \frac{Bw}{B_1} \quad (11)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A_1}{B_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{B_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B_1} \right) \quad (12)$$

$$\gamma_{\alpha\gamma} = A_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{Auk_1}{A_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (13)$$

$$\gamma_{\beta\gamma} = B_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v}{B_1} \right) + \frac{1}{B_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{Bvk_2}{B_1} + \frac{1}{B_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (14)$$

en las que hemos llamado a las componentes del vector corrimiento según los ejes α, β, γ , según tenemos por costumbre, $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w$. Si además consideramos que por ser delgada la lámina y en general de curvaturas pequeñas, el producto ηk_i es despreciable frente a la unidad, con lo que $A_1 = A, B_1 = B$, definitivamente obtenemos

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A \cdot B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - k_1 w \quad (15)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{u}{A \cdot B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - k_2 w \quad (16)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \quad (17)$$

$$\gamma_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + uk_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (18)$$

$$\gamma_{\beta\gamma} = \frac{\partial v}{\partial \gamma} + vk_2 + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (19)$$

Las expresiones obtenidas no hacen referencia alguna a la configuración deformada de la lámina y es por ello que estas expresiones generales, se pueden simplificar asumiendo una serie de hipótesis comunes a la mayoría de las teorías de láminas que exponemos en el siguiente epígrafe, añadiendo los autores del presente trabajo hipótesis adicionales con objeto de

simplificar aún más dichas ecuaciones.

2.1 Hipótesis de la Teoría Propuesta

El estudio de estructuras de canto grueso o moderadamente grueso lleva implícito el tener en cuenta las implicaciones debidas al fenómeno de cortadura. Así pues y en concordancia con ello proponemos las siguientes hipótesis relativas a flexión de láminas en el siguiente sentido:

1) La fibra rectilínea perteneciente a la lámina y normal a la superficie antes de la deformación continúa siendo sensiblemente rectilínea después de la deformación, aunque no necesariamente normal a la superficie deformada, conservando sensiblemente la longitud inicial:

$$\varepsilon_\gamma \cong 0 \tag{20}$$

2) Se postula una distribución parabólica, a lo largo del espesor de las tensiones tangenciales, dadas por

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{5}{4} G \left(1 - \frac{4\gamma^2}{t^2} \right) \gamma_{\alpha\gamma} \tag{21}$$

$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{5}{4} G \left(1 - \frac{4\gamma^2}{t^2} \right) \gamma_{\beta\gamma} \tag{22}$$

Esta hipótesis es habitual considerarla para láminas con efecto de cortante de 2º orden. Con ella, por tanto, se pretende aproximar con suficiente precisión las soluciones obtenidas para láminas de canto grueso.

3) Las tensiones normales paralelas a la normal a la superficie son pequeñas en comparación con las otras y se puede prescindir de su cálculo:

Si denominamos por θ_α el giro de la normal alrededor del eje $P - \alpha$ y por θ_β el giro alrededor del eje $P - \beta$, los corrimientos de un punto genérico m , situado a una distancia z de la superficie media, vienen dados por

$$u = u_0 + z\theta_\beta \tag{23}$$

$$v = v_0 - z\theta_\alpha \tag{24}$$

$$w = w_0(\alpha, \beta) \tag{25}$$

En donde hemos prescindido del subíndice (m) que hace referencia al punto genérico, denominado z al eje γ y sobreentendido que (u_0, v_0, w_0) son los corrimientos del punto P situado sobre la superficie media.

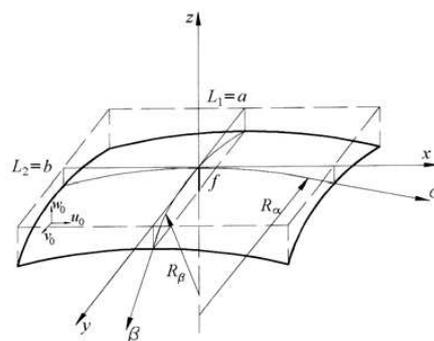


Figura 2: Sistema de Referencia, radios de curvatura y coordenadas curvilíneas en láminas rebajadas

Adicionalmente, por ser la lámina rebajada, por tanto cumplirá $\rho_{\min} \geq 20t; a \geq 5f$, (ver Figura 2).

4) La curvatura de Gauss será pequeña $[k_1, k_2 \cong 0]$ con lo que la geometría de la superficie se sustituye por la euclidiana en el plano de la proyección. Además:

$$F \cong 0; \quad f = 0; \quad ds^2 = dx^2 + dy^2; \quad A \cong 1, B \cong 1 \quad (26)$$

Y al menos aproximadamente para todo punto

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cong 1; \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cong 1 \quad (27)$$

5) La variación de la curvatura de flexión y torsión de las líneas coordenadas de la superficie media, $(X_\alpha^0, X_\beta^0, X_{\alpha\beta}^0)$, no depende de los desplazamientos en el plano tangente (u_α, u_β) .

6) En las ecuaciones de equilibrio donde aparecen los esfuerzos de membrana se menosprecian los términos en los que figuran los esfuerzos cortantes y sollicitaciones de flexión, multiplicados por las curvaturas, al ser estos últimos pequeños y multiplicar a esfuerzos no predominantes en este estado. Por otro lado al ser pequeñas las curvaturas y los corrimientos en el plano tangente (u, v) , despreciamos las variaciones de las curvaturas por dichos corrimientos, con lo que tomamos $\frac{\partial(k_n u_m)}{\partial \alpha_i} \cong k_n \frac{\partial u_m}{\partial \alpha_i}$, siendo k_n la curvatura normal.

7) El giro $\omega_{\alpha\beta}$, de un elemento de lados diferenciales en su propio plano tangente, alrededor del eje z , para todo punto de la lámina es nulo $\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) \cong 0$, lo que conduce a establecer:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \rightarrow -z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} = z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \quad (28)$$

Y como ello se establece para todo z , se tiene

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} = 0 \quad (29)$$

Esta importante condición fue deducida analíticamente en trabajos anteriores, [Martínez Jiménez \(2011\)](#), para placas moderadamente gruesas estableciendo el equilibrio de la placa en su configuración deformada y es asumida para este trabajo considerando el estudio de láminas rebajadas.

Hay que tener en cuenta que la deducción de esta condición en el anterior trabajo se hizo, tal como se ha comentado, teniendo en consideración las ecuaciones de equilibrio de la placa en su configuración deformada que son a su vez muy similares a las de láminas rebajadas considerando un sistema de referencia intrínseco según las líneas principales de curvatura.

Así pues, teniendo en cuenta esta condición, las deformaciones pueden ser deducidas a partir de las fórmulas (15-19), adoptando $x \equiv \alpha, y \equiv \beta$, obteniendo las siguientes relaciones cinemáticas

- deformaciones en el plano medio

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{v^0}{A \cdot B} \frac{\partial A}{\partial y} - k_1 w^0 \cong \frac{\partial u^0}{\partial x} - k_1 w^0 \quad (30)$$

$$\varepsilon_y^0 \cong \frac{\partial v^0}{\partial x} - k_2 w^0 \quad (31)$$

$$\gamma_{xy}^0 \cong \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}; \chi_x^0 = -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}; X_y^0 = \frac{\partial \theta_x}{\partial y}; 2X_{xy}^0 = -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (32)$$

- deformaciones en un punto genérico

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - zX_x^0; \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - zX_y^0; \varepsilon_z \cong 0 \quad (33)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2zX_{xy}^0 \quad (34)$$

$$\gamma_{xz} = (w'_x + \theta_y + u_0 \cdot k_1) + z\theta_y k_1 \quad (35)$$

$$\gamma_{yz} = (w'_y - \theta_x + v_0 \cdot k_2) - z\theta_x k_2 \quad (36)$$

en donde k_1 y k_2 son las curvaturas normales, ε_x^0 , ε_y^0 y γ_{xy}^0 son las deformaciones del plano medio, γ_{xz} y γ_{yz} los deslizamientos de las secciones normales, y X_x, X_y y X_{xy} las variaciones de las curvaturas de flexión y torsión.

2.2 Ecuaciones Constitutivas y Solicitaciones

Para expresar las tensiones en función de los corrimientos de la superficie media de la lámina, hacemos uso de las Leyes de Hooke generalizadas y las hipótesis enunciadas.

$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta) = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\alpha^0 + \mu\varepsilon_\beta^0 - \gamma(X_\alpha^0 + \mu X_\beta^0)) \quad (37)$$

$$\sigma_\beta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha) = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\beta^0 + \mu\varepsilon_\alpha^0 - \gamma(X_\beta^0 + \mu X_\alpha^0)) \quad (38)$$

Donde $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ son las tensiones normales. La tensión σ_γ (perpendicular a la superficie media de la lámina) aunque pequeña puede ser obtenida mediante $\sigma_\gamma = (\sigma_\alpha + \mu\sigma_\beta)$. Las tensiones tangenciales vienen dadas por $\tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta} = G(\gamma_{\alpha\beta}^0 - w\gamma X_{\alpha\beta}^0)$ y $\tau_{\alpha\gamma}$ y $\tau_{\beta\gamma}$ nos quedan aun por conocer ya que al ser $\tau_{\alpha\gamma} = G\gamma_{\alpha\gamma}$ y $\tau_{\beta\gamma} = G\gamma_{\beta\gamma}$ aunque $\gamma_{\alpha\gamma}$ y $\gamma_{\beta\gamma}$ sean pequeños, esto no quiere decir que podamos presumir valores pequeños para las τ , puesto que al alcanzar G valores relativamente altos, su producto por las γ pueden propiciar valores apreciables para las tensiones.

En la siguiente figura, ver [Figura \(3\)](#), podemos ver el criterio adoptado para los distintos esfuerzos que aparecen en la lámina,

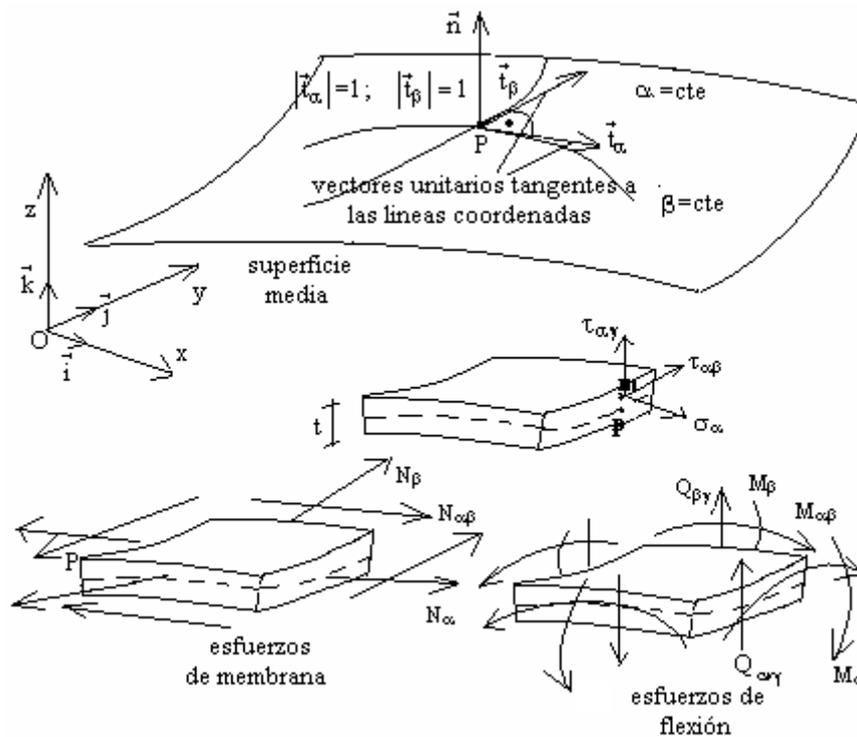


Figura 3: Sistema de Referencia, esfuerzos de membrana y de flexión

La obtención de los esfuerzos N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, M_α y M_β , axiales y momentos flectores, como es habitual, se obtiene integrando las tensiones a lo largo del espesor, (ver Figura 3)

$$N_\alpha = \int_V \sigma_\alpha d\gamma = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\mu^2} \{ \epsilon_\alpha^0 + \mu \epsilon_\beta^0 - \gamma(X_\alpha^0 + \mu X_\beta^0) \} d\gamma = \frac{Et}{1-\mu^2} (\epsilon_\alpha^0 + \mu \epsilon_\beta^0) \quad (39)$$

$$N_\beta = \int_V \sigma_\beta d\gamma = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\mu^2} \{ \epsilon_\beta^0 + \mu \epsilon_\alpha^0 - \gamma(X_\beta^0 + \mu X_\alpha^0) \} d\gamma = \frac{Et}{1-\mu^2} (\epsilon_\beta^0 + \mu \epsilon_\alpha^0) \quad (40)$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_V \tau_{\alpha\beta} d\gamma = \int_{-t/2}^{t/2} G \{ \gamma_{\alpha\beta}^0 - 2\gamma X_{\alpha\beta}^0 \} d\gamma = G t \gamma_{\alpha\beta}^0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \int_V \sigma_\alpha \gamma d\gamma = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E\gamma}{1-\mu^2} \{ \epsilon_\alpha^0 + \mu \epsilon_\beta^0 - \gamma(X_\alpha^0 + \mu X_\beta^0) \} d\gamma \\ &= \frac{-Et^3}{12(1-\mu^2)} (X_\alpha^0 + \mu X_\beta^0) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} M_\beta &= \int_V \sigma_\beta \gamma d\gamma = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E\gamma}{1-\mu^2} \{ \epsilon_\beta^0 + \mu \epsilon_\alpha^0 - \gamma(X_\beta^0 + \mu X_\alpha^0) \} d\gamma \\ &= \frac{-Et^3}{12(1-\mu^2)} (X_\beta^0 + \mu X_\alpha^0) \end{aligned} \quad (43)$$

Estas expresiones nos son de gran utilidad a la hora de calcular las sollicitaciones en

algún punto de la lámina.

2.3 Ecuaciones de equilibrio

La forma general de las ecuaciones de equilibrio en láminas, son complejas y su expresión completa, si queremos expresarlas para superficies de geometría arbitraria, tienen que desarrollarse en notación indicial. Como se ha expuesto previamente, nuestro trabajo se basa en teorías de láminas rebajadas, por lo que estas ecuaciones (adoptando $x \equiv \alpha, y \equiv \beta$) se reducen considerablemente, en la forma, [Rekach \(1978\)](#),

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y = 0 \quad (45)$$

$$k_1 N_x + k_2 N_y + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + P_z = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0 \quad (48)$$

Donde todos los esfuerzos intervinientes en estas ecuaciones se han definido previamente. Tengamos en cuenta que estas ecuaciones son muy similares a las ecuaciones de equilibrio en placas e idénticas si prescindiéramos de los términos asociados a las curvaturas.

No se ha tenido en cuenta la ecuación de equilibrio de momentos alrededor del eje Z. Esta ecuación es la que proporcionaba la hipótesis adicional de la anulación del giro alrededor de la normal de la placa, si establecíamos el equilibrio en la configuración deformada, [Martínez Jiménez \(2011\)](#), y la que asumimos como cierta en el presente trabajo por razonamiento físico y dada la simetría de las ecuaciones anteriores.

3 ECUACIONES DEDUCIDAS

Si tenemos en cuenta las hipótesis antes enunciadas y las introducimos en las ecuaciones de equilibrio, tras un proceso de cálculo bastante extenso, se obtienen las ecuaciones buscadas,

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} - (k_1 + \mu k_2) \frac{\partial w^0}{\partial x} = -\frac{1-\mu^2}{Et} P_x \quad (49)$$

$$\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - (\mu k_1 + k_2) \frac{\partial w^0}{\partial y} = -\frac{1-\mu^2}{Et} P_y \quad (50)$$

$$w''_{xx} + w''_{yy} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{12}{5(1-\mu)} \left(k_1 + \mu k_2 + \frac{5(1-\mu)k_1}{12} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x} + \quad (51)$$

$$+ \frac{12}{5(1-\mu)} \left(\mu k_1 + k_2 + \frac{5(1-\mu)k_2}{12} \right) \frac{\partial v^0}{\partial y} - \frac{12}{5(1-\mu)} (k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2) w^0 = -\frac{12(1+\mu)}{5Et} P_z$$

$$\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} - \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_y - \vartheta_x + v^0 k_2) = 0 \quad (52)$$

$$\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2} - \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2} - \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_x + \vartheta_y + u^0 k_1) = 0 \quad (53)$$

Este sistema de ecuaciones constituye un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuya resolución en series armónicas de las variables involucradas, $u^0, v^0, w^0, \vartheta_x, \vartheta_y$, nos proporcionan soluciones al problema ya que tenemos 5 ecuaciones.

Las ecuaciones (52) y (53) pueden ser simplificadas si en la ecuación (51) sumamos y restamos la cantidad $\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2}$ y la reescribimos en la siguiente forma,

$$\Delta \vartheta_x - \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_y - \vartheta_x + v^0 k_2) = 0 \quad (54)$$

que en virtud de la **hipótesis de giro alrededor de la normal nulo** se reduce a,

$$\Delta \vartheta_x + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_y - \vartheta_x + v^0 k_2) = 0 \quad (55)$$

Operando en forma similar sobre la ecuación (53) obtenemos

$$\Delta \vartheta_y + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_x - \vartheta_y + u^0 k_1) = 0 \quad (56)$$

En definitiva las ecuaciones de cálculo en corrimientos las reescribimos como,

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} - (k_1 + \mu k_2) \frac{\partial w^0}{\partial x} = -\frac{1-\mu^2}{Et} P_x \quad (57)$$

$$\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - (\mu k_1 + k_2) \frac{\partial w^0}{\partial y} = -\frac{1-\mu^2}{Et} P_y \quad (58)$$

$$\Delta w + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{12}{5(1-\mu)} \left(k_1 + \mu k_2 + \frac{5(1-\mu)k_1}{12} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{12}{5(1-\mu)} \left(\mu k_1 + k_2 + \frac{5(1-\mu)k_2}{12} \right) \frac{\partial v^0}{\partial y} - \frac{12}{5(1-\mu)} (k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2) w^0 = -\frac{12(1+\mu)}{5Et} P_z \quad (59)$$

$$\Delta \vartheta_x + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_y - \vartheta_x + v^0 k_2) = 0 \quad (60)$$

$$\Delta \vartheta_y + \frac{5(1-\mu)}{t^2} (w'_x - \vartheta_y + u^0 k_1) = 0 \quad (61)$$

que son con las que vamos a operar numérica o analíticamente.

4 RESULTADOS

4.1 Aplicación de la teoría propuesta al estudio del paraboloide hiperbólico

Consideramos, por ser una superficie de doble curvatura de gran interés el estudio de soluciones para una lámina con forma de paraboloide hiperbólico. La lámina con forma de paraboloide hiperbólico, es una superficie bien estudiada por los autores de este trabajo en publicaciones anteriores, tanto en régimen estático como dinámico. A continuación,

presentamos la solución analítica, en series de Fourier para un caso general y particularizaremos para datos concretos al final de este apartado.

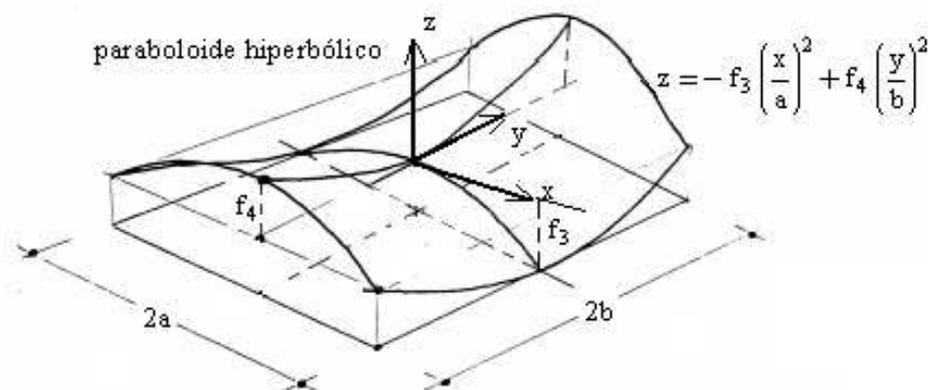


Figura 3: Lámina con forma de paraboloides hiperbólico. Sistema de Referencia y Ecuación característica

En este caso se cumple $k_{12} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. Refiriéndonos a la figura 3, (ver Figura 3) las componentes de carga pueden escribirse usando series en la forma

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (62)$$

Para láminas con bordes apoyados, obtenemos la solución adoptando para cada una de las variables $u^0, v^0, w^0, \vartheta_x, \vartheta_y$,

$$u = \sum \alpha^{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (63)$$

$$v = \sum \beta^{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2b} \quad (64)$$

$$w = \sum \gamma^{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (65)$$

$$\theta_x = \sum \delta^{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2b} \quad (66)$$

$$\theta_y = \sum \xi^{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (67)$$

Sustituyendo las fuerzas y los desplazamientos en las ecuaciones de cálculo (57-61) (ecuaciones de equilibrio escritas en función de los desplazamientos), resultan las siguientes expresiones:

$$\left(\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right) \alpha^{mn} + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \beta^{mn} - (k_1 + \mu k_2) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \gamma^{mn} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \alpha^{mn} + \left(\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right) \beta^{mn} - (\mu k_1 + k_2) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \gamma^{mn} = 0 \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{12}{5(1-\mu)} \left(k_1 + \mu k_2 + \frac{5(1-\mu)k_1}{12} \right) \right] \left[\left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{12}{t^2} (k_1 + \mu k_2) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \right] \alpha^{mn} \\
& - \left[\frac{12}{5(1-\mu)} \left(\mu k_1 + k_2 + \frac{5(1-\mu)k_2}{12} \right) \right] \left[\left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{12}{t^2} (\mu k_1 + k_2) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \right] \beta^{mn} \\
& + \gamma^{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 \right. \\
& \quad \left. + (k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2) \right] \left[\frac{12}{t^2} + \frac{12}{5(1-\mu)} \left(\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right) \right] \\
& = \frac{a_{mn}}{D} \left[1 + \frac{t^2}{5(1-\mu)} \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \right]
\end{aligned} \tag{70}$$

Que constituyen tres ecuaciones algebraicas para cada modo, que pueden expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{mn} \\ \beta^{mn} \\ \gamma^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_{mn}}{D} \left[1 + \frac{t^2}{5(1-\mu)} \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \right] \end{bmatrix} \tag{71}$$

donde la matriz de coeficientes tiene por elementos,

$$A_{11} = \left(\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right) \tag{72}$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \tag{73}$$

$$A_{13} = -(k_1 + \mu k_2) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \tag{74}$$

$$A_{22} = \left(\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right) \tag{75}$$

$$A_{23} = -(\mu k_1 + k_2) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} = & - \left[\frac{12}{5(1-\mu)} \left(k_1 + \mu k_2 + \frac{5(1-\mu)k_1}{12} \right) \right] \left[\left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \right. \\
& \left. + \frac{12}{t^2} (k_1 + \mu k_2) \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \right]
\end{aligned} \tag{77}$$

$$A_{32} = - \left[\frac{12}{5(1-\mu)} \left(\mu k_1 + k_2 + \frac{5(1-\mu)k_2}{12} \right) \right] \left[\left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{n\pi}{2b} \right) + \frac{12}{t^2} (\mu k_1 + k_2) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \right] \quad (78)$$

$$A_{33} = \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^4 + (k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2) \right] \left[\frac{12}{t^2} + \frac{12}{5(1-\mu)} \left(\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \right) \right] \quad (79)$$

Para un caso de carga arbitraria, será necesario descomponer la carga en componentes de cosenos y resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para cada componente a_{mn} . Los desplazamientos totales se obtendrán de superponer las contribuciones de cada componente armónica de cada α^{mn} , usando las ecuaciones b).

Conocidos los coeficientes α^{mn} de los corrimientos u , v y w determinamos, mediante las dos ecuaciones restantes d) y e), los coeficientes δ^{mn} y ξ^{mn} de los giros, de la forma,

$$\delta^{mn} = \frac{5(1-\mu)}{t^2 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \frac{5(1-\mu)}{t^2} \right]} \left(-\gamma^{mn} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) + k_2 \beta^{mn} \right) \quad (80)$$

$$\xi^{mn} = \frac{5(1-\mu)}{t^2 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \frac{5(1-\mu)}{t^2} \right]} \left(\gamma^{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right) - k_1 \alpha^{mn} \right) \quad (81)$$

Para encontrar las deformaciones y esfuerzos es necesario derivar las ecuaciones de desplazamientos. En particular para los momentos flectores y momento torsor hacemos uso de las fórmulas siguientes,

$$M_x = D \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right) \quad (82)$$

$$M_y = D \left(-\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \quad (83)$$

$$M_{xy} = \frac{Gt^3}{12} \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right) \quad (84)$$

La solución presentada está limitada por las condiciones de contorno que es posible modelar (bordes articulados), pero la solución permite obtener tanto esfuerzos de membrana como de flexión. Para casos con otras condiciones de contorno más complejas es más conveniente emplear el método de los elementos finitos.

Numéricamente, consideremos una lámina con forma de paraboloides hiperbólico de planta cuadrada de 1*1 m de lado, espesor constante de 0.01 m, radios de curvatura iguales y de signo contrario de valor $R=2$ m, $E=10.92 \cdot 10^6$ N/m², coeficiente de Poisson 0.30, densidad (ρ) 100 kg/m³, sometida a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m² y articulada en sus cuatro bordes. (ver [Figura 4](#))

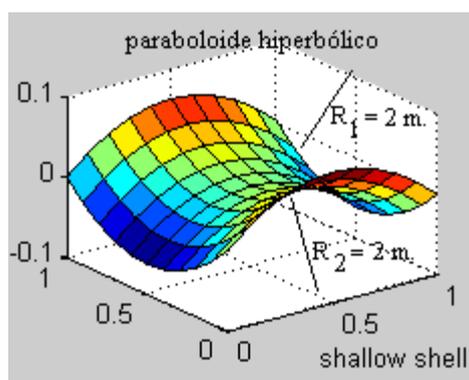


Figure 4: Paraboloide hiperbólico en pendiente suave.

El corrimiento obtenido en la sección central usando las ecuaciones de cálculo antes deducidas es de 0,0755m. Para comprobar el resultado anterior hemos utilizado el elemento finito tridimensional de 20 nodos con una discretización adecuada que nos asegurara la convergencia. El resultado obtenido es de 0,0724m, el cual es un resultado bastante razonable a juicio de los autores.

El momento flector en el centro de la lámina varía respecto del obtenido por el MEF en solo un 5% por lo que entendemos que entra dentro de un resultado razonable.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan unas nuevas ecuaciones de cálculo para el estudio de láminas rebajadas con inclusión de efectos de cortante de 2° orden, es decir, suponemos una distribución parabólica de las tensiones tangenciales en el espesor.

Para la deducción de estas nuevas ecuaciones hemos hecho uso de una importante hipótesis que consiste en que la anulación durante del proceso de deformación de la rotación de los elementos materiales de la lámina alrededor de la normal a la superficie media.

Esta hipótesis fue deducida en otros trabajos de manera analítica para placas con efectos de deformación por cortante estableciendo el equilibrio de la placa en su posición deformada, y la adoptamos como hipótesis física en este trabajo, dada la similitud conceptual en las ecuaciones de equilibrio para láminas rebajadas.

Las ecuaciones de cálculo obtenidas nos son útiles para el cálculo de láminas por desarrollos en serie de Fourier y proporcionan resultados precisos si los comparamos con métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (MEF). La validación de la teoría en régimen dinámico se establecerá en trabajos posteriores.

REFERENCIAS

- Kienzler, R., Altenbach, H., and Ott, I., *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*, Springer, 2004.
- Koiter, W.T., *Foundation and Basic Equations of Shell Theory, Proceedings of IUTAM, Second Symposium Theory of Thin Shells*, ed. Niordson, F.L. Springer, 93-05, 1967.
- Koiter, W.T., *Theory of Thin Shells*, ed. Niordson, F.L. Springer-Verlag, New York. 93–105, 1969.
- Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 1st edition (Cambridge University Press, Cambridge) 4th edition, Dover Publishing, New York, (1892),1944.
- Martínez Jiménez, J.M., Martínez Valle J.M., Martínez Valle A., Martínez Jiménez P., *Harmonization of the Classical Technical Theories for Thin and Moderately Thick Plates. Mecánica Computacional*, Volume XXX. 2: 99-115, 2011.

- Novozhilov, V.V., *Thin Elastic Shells*, Translated from 2nd Russian edition by Lowe, P.G. London, 1958.
- Pietraszkiewicz, W., Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19 (2): 115–140, 1984.
- Pietraszkiewicz, W., Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells. *Advan. Mech.*, 12 (1): 52-130, 1989.
- Reddy, J.N. and Liu, C.F., A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. J. Engng Sci.*, 23(3): 440–447, 1985.
- Rekach, V.G., *Problemas de la Teoría de la Elasticidad*, Mir, URSS, 1978.
- Timoshenko, S., and Woinowsky, and Krieger, S., *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 1959.
- Vlasov, V.Z., *General Theory of Shells and Its Application to Engineering*, GITTL, Moskva-Leningrad. English Translation, NASA Technical Translation TTF-99 (1949), 1964.
- Wempner, G.A., *Mechanics of Solids, with Applications to thin Bodies*, Springer, 1982.