

## UN NUEVO ELEMENTO FINITO NO LINEAL PARA EL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS LAMINARES

José M. Martínez Valle<sup>a</sup>, Victor Fachinotti<sup>b</sup>, Alejandro Albanesi<sup>b</sup> y Pilar Martínez Jiménez<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, [jmvalle@uco.es](mailto:jmvalle@uco.es)

<sup>b</sup>Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, [vfachino@intec.unl.edu.ar](mailto:vfachino@intec.unl.edu.ar), [aalbanes@santafe-conicet.gov.ar](mailto:aalbanes@santafe-conicet.gov.ar).

<sup>c</sup>Departamento de Física Aplicada, EPS; Edificio Albert Einstein, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, [fa1majip@uco.es](mailto:fa1majip@uco.es)

**Palabras Clave:** Elementos finitos no lineales, coordenadas curvilíneas, láminas.

**Resumen.** Inevitablemente, las estructuras pueden estar sometidas a grandes desplazamientos y deformaciones como consecuencia de distintos tipos de acciones como viento, sismo, etc. Como sabemos, el estudio de estructuras laminares sometidas a grandes desplazamientos y deformaciones no tienen soluciones analíticas conocidas salvo para casos sencillos de geometría, condiciones de contorno, estados de carga y distintas hipótesis adicionales respecto a la deformada de este tipo de estructuras. Los métodos numéricos, como el MEF, aparecieron como solución natural a estos problemas. Pese a la gran cantidad de elementos finitos desarrollados hasta la fecha con un gran éxito, en este trabajo presentamos un nuevo elemento finito no lineal formulado en coordenadas curvilíneas arbitrarias mediante cálculo tensorial, que, a pesar de un esfuerzo de computación inicial mayor, tiene una gran versatilidad y facilidad de adaptación a cualquier tipo superficie. En el desarrollo del trabajo distintos ejemplos ponen de manifiesto la bondad del mismo.

## 1 INTRODUCCIÓN

En distintos artículos hemos puesto de manifiesto las características de las estructuras laminares, elementos estructurales de gran belleza, con un comportamiento estructural complicado dependiente de estados de carga, geometría, condiciones de contorno, etc.

Se ha comentado igualmente que las soluciones analíticas para láminas en flexión con consideración del fenómeno de cortadura y no digamos ya, si se consideran grandes desplazamientos - deformaciones, no se encuentran disponibles en el estado actual del conocimiento y hasta donde los autores de este trabajo conocen.

El Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) surgió como respuesta a problemas de ingeniería gobernados por ecuaciones diferenciales complicadas cuyas soluciones analíticas eran difíciles o no posibles de obtener y ante el espectacular avance de la ingeniería informática que permitía resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales en un plazo de tiempo razonable, [Zienkiewicz \(2000\)](#).

Los elementos finitos utilizados para estudiar estructuras laminares se pueden dividir básicamente en tres grupos: elementos de sólido degenerado, [Ahmad \(1970\)](#), elementos basados en teorías de láminas, y elementos finitos tridimensionales. Los primeros en utilizarse para láminas fueron los dos primeros mientras que los elementos finitos tridimensionales reaparecieron en la década de los 90. Todos estos elementos sufren de problemas de convergencia de la solución a la real (como todos los métodos numéricos) en determinados casos. Por ejemplo, un elemento lámina con deformación por corte y aplicado a láminas delgadas sufre del denominado bloqueo (locking) por cortante. Además existen los denominados bloqueos de membrana (esfuerzos de membrana predominantes), bloqueo traapezoidal (solo para elementos tridimensionales)) y bloqueo de curvatura.

Para intentar resolver este tipo de problemas han aparecido distintos métodos para aliviar esta sobrerigidización de los elementos. Técnicas de integración reducida, deformaciones impuestas y mejoradas, [Hauptmann \(1998\)](#) y [Alves da Sousa \(2006\)](#), o principios variacionales multicampo como el principio de Hellinger Reissner o el de Hu Washizu son y han sido muy frecuentes en el desarrollo de elementos fiables. Un buen artículo donde se repasan las distintas variedades de elementos finitos así como las distintas mejoras para evitar el fenómeno del bloqueo, es [Yang \(2004\)](#).

Los elementos finitos tridimensionales de alto orden alivian la intensidad de este tipo de problemas a cambio de un mayor esfuerzo de computación. La enorme capacidad de los ordenadores actuales hace de este tipo de elementos una opción interesante para el estudio del comportamiento de láminas.

En este trabajo, presentamos una versión modificada del elemento finito de 20 nodos desarrollándolo completamente en coordenadas curvilíneas. Las relaciones deformación-desplazamiento se construyen teniendo en cuenta las ecuaciones no lineales de la elasticidad tridimensional y expresándolas en sus componentes físicas.

Pese a un mayor esfuerzo inicial de computación debido a las complicadas relaciones deformación – desplazamiento resultantes, la versatilidad del nuevo elemento es superior a la de su homólogo cartesiano y porta una descripción precisa de la superficie media.

## 2 GEOMETRÍA DE LÁMINAS

El estudio de las estructuras laminares se caracteriza en parte por el buen conocimiento de una superficie de referencia que suele ser la superficie media.

Suponemos que para cada tipología estructural de lámina específica podemos tomar un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, es decir que la base natural asociada, que así

mismo suponemos normalizada, es ortogonal asociada a esta superficie de referencia. Por ejemplo para láminas cilíndricas las coordenadas polares.

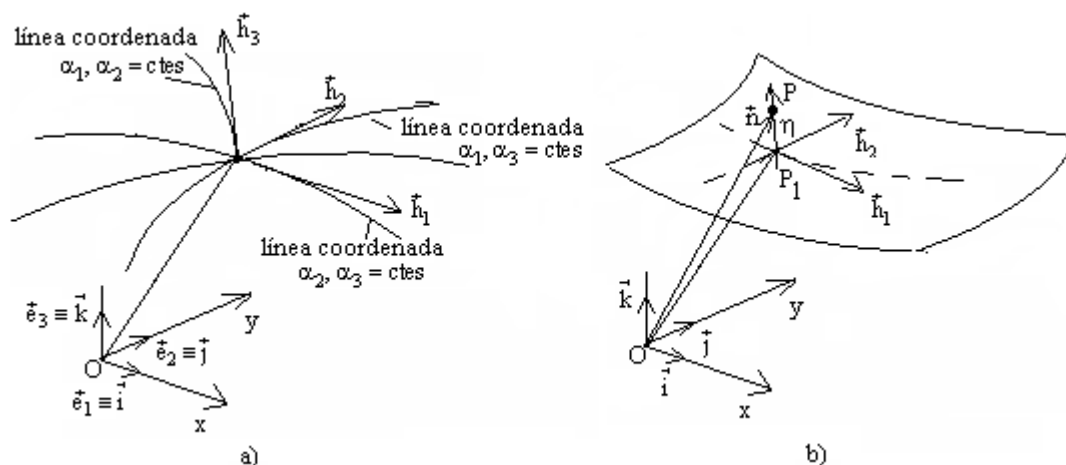


Figura 1: Sistema de referencia sobre la superficie media. Líneas coordenadas y vectores tangentes.

En otros casos como el de láminas en pendiente suave definidas sobre planta rectangular, en que las curvas que resultan de la intersección de la superficie con planos  $y=constante$  y  $x=constante$  respectivamente son cuasi ortogonales, y en los que suponemos conocida la ecuación de la superficie media de la lámina en la forma  $z = z(x, y)$ , si tomamos un punto  $P_1$  sobre ella y la coordenada  $\eta$  sobre la normal a la superficie (ver Figura 1 a) y b)), la posición de un punto P vendrá dada por

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \eta \vec{n}, \tag{1}$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal y  $\eta$  es la coordenada según este vector. Los vectores naturales en los puntos de la superficie los denominamos  $\vec{h}_i$ . En función de ellos los vectores naturales en P valen

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_1} = \vec{h}_1 + \eta \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_1}, \tag{2}$$

y como  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{\rho_i} \vec{h}_i$ , siendo  $\rho_i$  los radios de curvatura, tenemos

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_1} = \vec{h}_1 \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1}\right). \tag{3}$$

Las componentes del tensor métrico en P,  $g_{ii} = 1$  si  $i=j$  y  $g_{ij} = 0$  si  $i$  es distinto de  $j$ , en función del valor que alcanza en los puntos de la superficie, valen

$$g_{ii} = (g_{ii})_P = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_i} = \left(1 - \frac{\eta}{\rho_i}\right)^2 \cdot (\vec{h}_i \cdot \vec{h}_i) = \left(1 - \frac{\eta}{\rho_i}\right)^2 \cdot (g_{ii})_{sup}. \tag{4}$$

Y por tanto

$$\sqrt{g_{ii}} = \left(1 - \frac{\eta}{\rho_i}\right) \cdot \sqrt{(g_{ii})_{sup}}. \tag{5}$$

donde  $\rho_i$  son los radios de curvatura de la superficie de referencia de estudio. Si tomamos  $\alpha_1 \equiv x, \alpha_2 \equiv y$  y  $\alpha_3 \equiv \eta$ , con lo que los radios de curvatura  $\rho_1$  y  $\rho_2$  vendrán dados por

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{z_{,xx}}{(1+z_{,x}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{z_{,yy}}{(1+z_{,y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

Y si llamamos  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , los vectores naturales sobre la superficie en  $P_1$ , de vector de posición  $\vec{OP}_1 = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}$ , son

$$\vec{h}_1 = \vec{i} + p\vec{k}$$

$$\vec{h}_2 = \vec{j} + q\vec{k} \quad (7)$$

Las derivadas de las componentes del tensor métrico que valen

$$\frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \left( \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial \alpha_k} \cdot \vec{h}_i \right) \quad (8)$$

Que tras particularizar resultan

$$\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1}\right) \cdot \sqrt{(g_{11})_{sup}} \right) = \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1}\right) \cdot \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1}\right) \cdot \sqrt{(g_{11})_{sup}} \right) = \sqrt{(g_{11})_{sup}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\eta}{\rho_1}\right) = -\sqrt{1+p^2} \cdot \frac{1}{\rho_1}$$

Pero en general  $\frac{\eta}{\rho_1} \ll 1$  y podemos prescindir del primero frente al segundo, por lo que nos queda

$$\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_1} = \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_2} = \frac{sp}{\sqrt{1+p^2}} \quad (10)$$

Procediendo de igual manera para las derivadas de  $g_{22}$  obtenemos:

$$\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_1} = \frac{tq}{\sqrt{1+q^2}}$$

$$\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_2} = \frac{sq}{\sqrt{1+q^2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left(1 - \frac{\eta}{\rho_2}\right) \cdot \sqrt{(g_{22})_{sup}} \right) = \sqrt{(g_{22})_{sup}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\eta}{\rho_2}\right) = -\sqrt{1+q^2} \cdot \frac{1}{\rho_2}$$

Las derivadas  $g_{33}$  así mismo valen

$$\frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_1} = 0, \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_2} = 0, \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\eta} = 0 \tag{12}$$

Estas expresiones nos van a ser de gran utilidad para la formulación de la matriz de rigidez de nuestro elemento finito en coordenadas curvilíneas.

### 3 DEFORMACIONES EN COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES.

Con carácter general, las deformaciones en régimen lineal en coordenadas curvilíneas vienen dadas por, [Rekach \(1978\)](#),

$$\varepsilon_{\alpha_i} = \frac{\partial}{\partial\alpha_i} \left( \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \frac{v_n}{\sqrt{g_{nn}g_{ii}}} \frac{\partial\sqrt{g_{ii}}}{\partial\alpha_n} \tag{13}$$

Si tenemos en cuenta las ecuaciones del epígrafe anterior donde calculábamos las derivadas de las componentes del tensor métrico, podemos expresar las deformaciones en función de parámetros conocidos.

Para posteriores cálculos nos interesa expresar esta última ecuación en forma matricial, para lo cual primero sustituimos el tensor métrico del espacio laminar  $g_{ij}$  por el de la superficie media  $a_{ij}$  que es lo que el que solemos trabajar usualmente.

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_2} + \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{11}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_3} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_1} + \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_3} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_3}{\partial\alpha_3} + \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_2} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{u_2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_1} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_2}{\partial\alpha_3} - \frac{u_2}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_3} + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_3}{\partial\alpha_2} - \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_2} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_3} - \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_3} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1} - \frac{u_3}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_1} \end{Bmatrix} = \tag{14}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_1} \\ \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_1} \\ -\frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_2} \\ 0 \\ \frac{\partial\sqrt{a_{33}}}{\partial\alpha_2} \\ -\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_1} \\ -\frac{1}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_3} \\ \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial\alpha_3} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial\alpha_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\alpha_1}^1 \\ u_{,\alpha_2}^1 \\ u_{,\alpha_3}^1 \\ u_{,\alpha_1}^2 \\ u_{,\alpha_2}^2 \\ u_{,\alpha_3}^2 \\ u_{,\alpha_1}^3 \\ u_{,\alpha_2}^3 \\ u_{,\alpha_3}^3 \end{Bmatrix}$$

que en forma compacta escribimos como

$$\{\varepsilon^0\} = L_1 \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} u_{,\alpha 1}^1 \\ u_{,\alpha 2}^1 \\ u_{,\alpha 3}^1 \\ u_{,\alpha 1}^2 \\ u_{,\alpha 2}^2 \\ u_{,\alpha 3}^2 \\ u_{,\alpha 1}^3 \\ u_{,\alpha 2}^3 \\ u_{,\alpha 3}^3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

en donde hemos llamado  $L_1$  a la primera matriz en la que figuran los términos que multiplican a los corrimientos y  $L_2$  a la segunda matriz en la que figuran los términos del tensor métrico que multiplican a las derivadas de los desplazamientos.

### 3.1 Deformaciones en régimen no lineal.

El cálculo no lineal es significativamente más complejo que el cálculo lineal. La expresión general para las deformaciones longitudinales en coordenadas curvilíneas ortogonales en la base natural, vienen dadas por:

$$g_{km} \varepsilon_{\vartheta} d_{\alpha_k} d_{\alpha_m} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_m} g_{km} + u_n \Gamma_{nm}^l g_{kl} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_k} g_{nm} + u_n \Gamma_{nk}^l g_{lm} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_k} \frac{\partial u_l}{\partial \alpha_m} g_{nl} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_k} u_l \Gamma_{lm}^i g_{ni} + u_n \frac{\partial u_l}{\partial \alpha_m} \Gamma_{nk}^i g_{il} + u_n u_l \Gamma_{nk}^i \Gamma_{lm}^j g_{ij} \right\} d\alpha_k d\alpha_m \tag{16}$$

La derivación de esta expresión es un poco larga y tediosa, para más detalles se puede consultar en [Martínez Valle \(2014\)](#). Como se puede observar, la expresión anterior está escrita en notación indicial (tensorial). Un buen texto al respecto donde se pueden consultar operaciones básicas con tensores y el álgebra de este tipo de estructuras, es el libro de [Itskov \(2009\)](#).

En esta última expresión,  $\Gamma_{nm}^l$  son los símbolos de Christoffel de 2ª especie. Nuestro objetivo es, a partir de esta expresión general, obtener la expresión de las deformaciones longitudinales y angulares, a ser posible, en la base normalizada (componentes físicas). Haciendo  $k=m=s$  podemos despejar las deformaciones longitudinales  $\varepsilon_s$ , que también denominamos como  $\varepsilon_{\alpha i}$ , variando  $s$  de 1 a 3.

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_s} + u_n \Gamma_{ns}^r \frac{g_{sr}}{g_{ss}} + u_n \Gamma_{ns}^r \frac{g_{rs}}{g_{ss}} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} \frac{g_{nn}}{g_{ss}} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} u_r \Gamma_{rs}^i \frac{g_{ni}}{g_{ss}} + u_n \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_s} \Gamma_{ns}^i \frac{g_{ir}}{g_{ss}} + u_n u_r \Gamma_{ns}^i \Gamma_{rs}^j \frac{g_{ij}}{g_{ss}} \right\} \tag{17}$$

que en función de las deformaciones en régimen lineal expresamos como

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^0 + \bar{\varepsilon}_s \tag{18}$$

con

$$\varepsilon_s^0 = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_s} + u_n \Gamma_{ns}^r \frac{g_{sr}}{g_{ss}} + u_n \Gamma_{ns}^r \frac{g_{rs}}{g_{ss}} \right\} = \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_s} + u_n \Gamma_{ns}^s = \frac{\partial u_s}{\partial \alpha_s} + u_n \frac{1}{\sqrt{g_{ss}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ss}}}{\partial \alpha_n} \tag{19}$$

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} \frac{g_{nn}}{g_{ss}} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_s} u_r \Gamma_{rs}^i \frac{g_{ni}}{g_{ss}} + u_n \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_s} \Gamma_{ns}^i \frac{g_{ir}}{g_{ss}} + u_n u_r \Gamma_{ns}^i \Gamma_{rs}^j \frac{g_{ij}}{g_{ss}} \right\} \tag{20}$$

En la base natural normalizada toman la forma

$$\varepsilon_s^0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_s}{\sqrt{g_{ss}}} \right) + \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \Gamma_{ns}^s = \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_s}{\sqrt{g_{ss}}} \right) + \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}g_{ss}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ss}}}{\partial \alpha_n} \quad (21)$$

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \frac{g_{nn}}{g_{ss}} + \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \left( \frac{u_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right) \Gamma_{rs}^i \frac{g_{ni}}{g_{ss}} + \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( \frac{u_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right) \Gamma_{ns}^i \frac{g_{ir}}{g_{ss}} + \left( \frac{u_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right) \left( \frac{u_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right) \Gamma_{ns}^i \Gamma_{rs}^j \frac{g_{ij}}{g_{ss}} \right\} \quad (22)$$

Si para evaluar los términos en que figuran los productos de corrimientos, o de sus variaciones, así como los productos de un corrimiento por la variación de otro corrimiento, que en todo caso son pequeños, prescindimos de las aportaciones debidas a las variaciones de las componentes del tensor métrico, obtenemos

$$\{\bar{\varepsilon}_s\} = \varepsilon_s^0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g_{ss}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_s} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_s} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_s} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_s} \right) \quad (23)$$

prescindiendo de los términos donde figuran los símbolos de Christoffel de 2º orden.

Los deslizamientos, en la base natural normalizada (componentes físicas), vienen dados por

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ &\quad + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{g_{33}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \\ \gamma_{13} &= \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \sqrt{g_{11}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ &\quad + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \\ \gamma_{13} &= \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \sqrt{g_{11}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ &\quad + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \\ \gamma_{23} &= \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{22}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ &\quad + \sqrt{g_{22}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \end{aligned} \quad (24)$$

Como es natural estas expresiones nos son necesarias para derivar las expresiones de la matriz de rigidez tangente que nos aparece posteriormente.

De manera análoga a como hemos hecho con las deformaciones en régimen lineal, podemos agrupar matricialmente las deformaciones en régimen no lineal,

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{u^1_{,\alpha 1}}{g_{11}} & \frac{u^2_{,\alpha 1}}{g_{11}} & \frac{u^3_{,\alpha 1}}{g_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u^1_{,\alpha 2}}{g_{22}} & \frac{u^2_{,\alpha 2}}{g_{22}} & \frac{u^3_{,\alpha 2}}{g_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^1_{,\alpha 1} & u^2_{,\alpha 2} & u^3_{,\alpha 3} \\ \frac{u^1_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u^2_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u^3_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u^1_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u^2_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u^3_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u^1_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u^2_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u^3_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u^1_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u^2_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u^3_{,\alpha 2}}{\sqrt{g_{22}}} \\ \frac{u^1_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u^2_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u^3_{,\alpha 3}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{u^1_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u^2_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u^3_{,\alpha 1}}{\sqrt{g_{11}}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u^1_{,\alpha 1} \\ u^2_{,\alpha 1} \\ u^3_{,\alpha 1} \\ u^1_{,\alpha 2} \\ u^2_{,\alpha 2} \\ u^3_{,\alpha 2} \\ u^1_{,\alpha 3} \\ u^2_{,\alpha 3} \\ u^3_{,\alpha 3} \end{Bmatrix} \tag{25}
 \end{aligned}$$

La primera de estas matrices es la matriz lineal de deformaciones  $\{\varepsilon_0\}$  y la segunda es conocida como matriz no lineal de deformaciones  $\{\varepsilon_L\}$ . Si renombramos en la siguiente forma,



$$A = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \frac{u_{,\alpha 1}^1}{g_{11}} & \frac{u_{,\alpha 1}^2}{g_{11}} & \frac{u_{,\alpha 1}^3}{g_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{,\alpha 2}^1}{g_{22}} & \frac{u_{,\alpha 2}^2}{g_{22}} & \frac{u_{,\alpha 2}^3}{g_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{,\alpha 1}^1 & u_{,\alpha 2}^2 & u_{,\alpha 3}^3 \\ \frac{u_{,\alpha 2}^1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 2}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 2}^3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 1}^1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 1}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 1}^3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{,\alpha 3}^1}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 3}^2}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 3}^3}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 2}^1}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 2}^2}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{u_{,\alpha 2}^3}{\sqrt{g_{22}}} \\ \frac{u_{,\alpha 3}^1}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u_{,\alpha 3}^2}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u_{,\alpha 3}^3}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{u_{,\alpha 1}^1}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u_{,\alpha 1}^2}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{u_{,\alpha 1}^3}{\sqrt{g_{11}}} \end{array} \right\} \quad (26)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} u_{,\alpha 1}^1 \\ u_{,\alpha 1}^2 \\ u_{,\alpha 1}^3 \\ u_{,\alpha 2}^1 \\ u_{,\alpha 2}^2 \\ u_{,\alpha 2}^3 \\ u_{,\alpha 3}^1 \\ u_{,\alpha 3}^2 \\ u_{,\alpha 3}^3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Entonces podemos escribir,

$$\varepsilon = B_0\{d\} + \frac{1}{2}A\theta \quad (28)$$

donde de nuevo señalamos que el último sumando se corresponde con las deformaciones no lineales, mientras que  $B_0$  se corresponde con las relaciones deformación- desplazamiento en régimen lineal.  $\{d\}$  se corresponde con las componentes del vector corrimiento.

Por último podemos señalar, que aunque las ecuaciones de esta sección están expresadas en función de las componentes del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , tensor métrico del espacio laminar, se pueden sustituir por  $a_{\alpha\beta}$  cuando nos referimos a la superficie media de la lámina, que es lo habitual en teoría de cascaras.

#### 4 EL ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL DE 20 NODOS EN COORDENADAS CURVILINEAS.

El elemento finito serendípito de 20 nodos es bien conocido, Zienkiewicz (2000), así como sus funciones de forma, ver Figura 2.

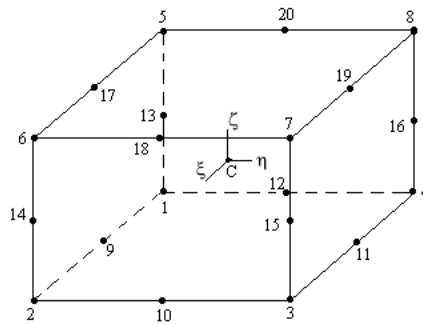


Figura 2: Elemento finito serendípito de 20 nodos.

$$N_j = \frac{1}{8} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) (1 + \zeta_j \zeta) (\xi_j \xi + \eta_j \eta + \zeta_j \zeta - 2) \quad (29)$$

para los nodos de los vértices del hexaedro,  $j=1, \dots, 8$

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_j \eta) (1 + \zeta_j \zeta) \quad (30)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=10, 12, 14, 16$ .

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi_j \xi) (1 + \zeta_j \zeta), \quad (31)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=9, 11, 13, 15$ .

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta), \quad (32)$$

para los nodos de la mitad de los lados,  $j=17, 18, 19, 20$ .

Estas funciones de forma las utilizaremos posteriormente en nuestros cálculos para la interpolación de corrimientos y sus derivadas.

#### 4.1 Equilibrio del elemento finito

Existen distintas formas de llegar a la formulación de la matriz de rigidez del elemento finito. Nuestro punto de partida es el Principio de los Trabajos Virtuales (P.T.V.), que se puede formular de la siguiente forma:

Sea una variación en los corrimientos de los nodos, compatibles con los enlaces, y por lo tanto de los nodos de los elementos, que se designa por  $\delta d_{elemento}$ , ésta provocará una variación en las tensiones y en las deformaciones. El trabajo de las fuerzas exteriores viene dado por

$$T_{F.ext} = \sum_{1 \text{ a } 20 \text{ (n}^{\circ} \text{ de nodos)}} \delta d^i \cdot p_i, \quad (33)$$

Donde  $p_i$  y  $d^i$  son las cargas y corrimientos nodales. Si los corrimientos y las cargas de los nodos del elemento, en el sistema de coordenadas curvilíneas local  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  se ordenan, como es usual, en matrices se tiene,

$$\delta \{d_{elemento}\} = \delta \begin{Bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^{20} \end{Bmatrix} \{P_{elemento}\} = \begin{Bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^{20} \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

con

$$\begin{aligned} (d^{nodo\ i})^T &= (u_1^i \ u_2^i \ u_3^i) \\ (p^{nodo\ i})^T &= (p_1^i \ p_2^i \ p_3^i). \end{aligned} \quad (35)$$

Se obtiene

$$T_{F.ext} = \delta\{d_{elemento}\}^T \cdot p_{elemento}. \quad (36)$$

El trabajo virtual de deformación en función de tensiones y deformaciones se expresa por

$$T_{def} = \iiint_{volumen} \delta\varepsilon^T \sigma dv. \quad (37)$$

Esta ecuación la podemos reescribir en la forma,

$$T_{def} = \iiint_{volumen} \delta\varepsilon^T \sigma dv = \delta\{d_{elemento}\}^T \iiint_{volumen} B^T \sigma dv, \quad (38)$$

en donde se ha tenido en cuenta que  $\delta d_{elemento}$  es independiente de la integración. Igualando los trabajos dados por las expresiones (36) y (38),

$$\delta\{d_{elemento}\}^T \cdot p_{elemento} = \delta\{d_{elemento}\}^T \iiint_{volumen} B^T \sigma dv, \quad (39)$$

y como quiera que la igualdad debe verificarse *para cualquier movimiento virtual*, queda

$$p_{elemento} = \iiint_{volumen} B^T \sigma dv, \quad (40)$$

ecuación matricial que da lugar a 60 ecuaciones de equilibrio (al tener 20 nodos el elemento finito) que relacionan las fuerzas aplicadas en los nodos del elemento con los corrimientos nodales y con sus derivadas, pero en las que los términos de los segundos miembros son funciones de productos de estas magnitudes y por tanto NO lineales y no tratables directamente para la resolución del problema.

El valor de la variación de las deformaciones es,

$$\delta\varepsilon = \delta\left\{B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}A\vartheta\right\} = B_0\delta\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}\delta A\vartheta + \frac{1}{2}A\delta\vartheta, \quad (41)$$

si prescindimos de las aportaciones debidas a las variaciones de las componentes del tensor métrico, podemos reescribir,

$$\delta\varepsilon = \delta\left\{B_0\{d_{elemento}\} + \frac{1}{2}A\vartheta\right\} = B_0\delta\{d_{elemento}\} + \delta A\vartheta, \quad (42)$$

donde la expresión de la matriz A es bien conocida y la hemos deducido anteriormente.

A partir de aquí hemos de tener en cuenta algunas consideraciones. Por una parte, tenemos tres sistemas de coordenadas: el curvilíneo del elemento finito, el curvilíneo intrínseco a la superficie de referencia de la lámina y el cartesiano.

La matriz Jacobiana de cambio de las coordenadas cartesianas  $x_i$  a las coordenadas curvilíneas  $\xi_i$  es

$$\{J\} = \sum_{i=1}^{20} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi}x_i & N_{i,\xi}y_i & N_{i,\xi}z_i \\ N_{i,\eta}x_i & N_{i,\eta}y_i & N_{i,\eta}z_i \\ N_{i,\zeta}x_i & N_{i,\zeta}y_i & N_{i,\zeta}z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{20,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{20,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{20,\zeta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{Bmatrix}, \quad (43)$$

La matriz Jacobiana de cambio de las coordenadas cartesianas  $x_i$  a las coordenadas curvilíneas  $\alpha_i$ es

$$J_{x\alpha} = \begin{Bmatrix} x_{,\alpha_1} & y_{,\alpha_1} & z_{,\alpha_1} \\ x_{,\alpha_2} & y_{,\alpha_2} & z_{,\alpha_2} \\ x_{,\alpha_e} & y_{,\alpha_e} & z_{,\alpha_e} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

La relación entre derivadas de una cierta función  $\phi$  en los sistemas de coordenadas  $x$ - $\xi$  y  $x$ - $\alpha$  vienen dadas por

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \\ \phi_{,\zeta} \end{Bmatrix} = J_{x\xi} \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \phi_{,\alpha_1} \\ \phi_{,\alpha_2} \\ \phi_{,\alpha_3} \end{Bmatrix} = J_{x\alpha} \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Y si llamamos  $Y = |Y_{ij}| = J_{x\xi}^{-1}$  y  $\Psi = |\Psi_{ij}| = J_{x\alpha}^{-1}$ , las relaciones inversas nos dan

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = Y \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \\ \phi_{,\zeta} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = \Psi \begin{Bmatrix} \phi_{,\alpha_1} \\ \phi_{,\alpha_2} \\ \phi_{,\alpha_3} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Llamando  $\Pi$  al producto de matrices  $J_{x\alpha} \cdot Y$ , podemos escribir

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,\alpha_1} \\ \phi_{,\alpha_2} \\ \phi_{,\alpha_3} \end{Bmatrix} = \Pi \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \\ \phi_{,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Llegados a este punto, si retornamos a la ecuación de variación de las deformaciones podemos reescribir las variaciones de los desplazamientos como,

$$\begin{pmatrix} u_{,\alpha_1}^1 \\ u_{,\alpha_1}^2 \\ u_{,\alpha_1}^3 \\ u_{,\alpha_2}^1 \\ u_{,\alpha_2}^2 \\ u_{,\alpha_2}^3 \\ u_{,\alpha_3}^1 \\ u_{,\alpha_3}^2 \\ u_{,\alpha_3}^3 \end{pmatrix} \delta\theta = \delta \begin{pmatrix} u_{,\alpha_1}^1 \\ u_{,\alpha_1}^2 \\ u_{,\alpha_1}^3 \\ u_{,\alpha_2}^1 \\ u_{,\alpha_2}^2 \\ u_{,\alpha_2}^3 \\ u_{,\alpha_3}^1 \\ u_{,\alpha_3}^2 \\ u_{,\alpha_3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} u_{,\xi}^1 \\ u_{,\eta}^1 \\ u_{,\zeta}^1 \\ u_{,\xi}^2 \\ u_{,\eta}^2 \\ u_{,\zeta}^2 \\ u_{,\xi}^3 \\ u_{,\eta}^3 \\ u_{,\zeta}^3 \end{pmatrix} = \Pi \delta \begin{pmatrix} u_{,\xi}^1 \\ u_{,\eta}^1 \\ u_{,\zeta}^1 \\ u_{,\xi}^2 \\ u_{,\eta}^2 \\ u_{,\zeta}^2 \\ u_{,\xi}^3 \\ u_{,\eta}^3 \\ u_{,\zeta}^3 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Donde hemos designado a la matriz de componentes  $\Pi_{ij}$  sencillamente como  $\Pi$  Por otra parte sabemos que,

$$\delta \begin{pmatrix} u_{,\xi}^1 \\ u_{,\eta}^1 \\ u_{,\zeta}^1 \\ u_{,\xi}^2 \\ u_{,\eta}^2 \\ u_{,\zeta}^2 \\ u_{,\xi}^3 \\ u_{,\eta}^3 \\ u_{,\zeta}^3 \end{pmatrix} = \delta \delta \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} u_{,1}^1 \\ u_{,2}^1 \\ u_{,3}^1 \\ u_{,1}^2 \\ u_{,2}^2 \\ u_{,3}^2 \\ \vdots \\ u_{,1}^{20} \\ u_{,2}^{20} \\ u_{,3}^{20} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Esta última matriz donde figuran las derivadas de las funciones de forma y que relaciona las derivadas de los corrimientos en la base natural y en la base cartesiana la denominamos  $N_{,\xi_i}$  y es una matriz de 9\*60, por lo que podemos reescribir finalmente los términos del vector diferencial de deformación en la siguiente forma,

$$\delta \theta = G \delta \{d_{elemento}\} \quad (50)$$

siendo

$$G = \Pi_{9*9} \cdot N_{,\xi_i(9*60)} \quad (51)$$

Si se tiene en cuenta el valor de la matriz B en régimen lineal  $B_0$  y se llama  $B_{nl}$  a  $\delta A \theta$  se puede escribir

$$\delta \varepsilon = B_0 \cdot \delta \{d_{elemento}\} + B_{nl} \cdot \delta \{d_{elemento}\} = (B_0 + B_{nl}) \cdot \delta \{d_{elemento}\}, \quad (52)$$

con lo que la fórmula (40) se escribe como

$$p_{elemento} = \iiint_{volumen} B^T \cdot \sigma \cdot dv = \iiint_{volumen} (B^T_0 + (B_{nl})^T) \cdot \sigma \cdot dv. \quad (53)$$

En la que obviamente si  $B_{nl}$  es la matriz nula,  $B_{nl} = \Omega$ , la ecuación (53) se reduce a la ecuación lineal habitual. Tomando como es usual la variación por el incremento y partiendo de la ecuación (53) se obtiene

$$\delta p_{elemento} = \delta \left[ \iiint_V (B_0 + B_L)^T \sigma dv \right]. \quad (54)$$

Teniendo en cuenta que  $B^T_0$  es una matriz de elementos constantes se puede escribir

$$\delta p_{elemento} = \iiint_V \delta (B_{nl})^T \sigma dv + \iiint_V (B_0 + B_L)^T \delta \sigma dv. \quad (55)$$

Ahora bien  $\delta \sigma$  vale

$$\delta \sigma = E \cdot \delta \varepsilon = E (B_0 + B_{nl}) \{ \delta d_{elemento} \}, \quad (56)$$

Donde en este caso,  $E$  es la conocida matriz de las constantes elásticas. Si sustituimos en (54) proporciona la igualdad

$$\delta p_{elemento} = \iiint_{volumen} \delta (B_{nl})^T \sigma dv + \iiint_{volumen} ((B_0 + B_{nl})^T \cdot E \cdot (B_0 + B_{nl}) \{ \delta d_{elemento} \}) dv. \quad (57)$$

Esta ecuación es la que debemos resolver mediante métodos iterativos como el método de

Newton Raphson.

#### 4.2 Matriz de Rigidez tangente

Para poder acometer el proceso de cálculo enunciado anteriormente debemos calcular  $\delta p_{elemento}$  tomando como variables independientes los corrimientos de los nudos de la estructura.

Tomando como es usual la variación por el incremento y partiendo de la fórmula (57), obtenemos

$$\delta p_{elemento} = \delta \left[ \iiint_V (B_0 + B_L)^T \sigma dv \right]. \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que  $B_0^T$  es una matriz de elementos constantes tenemos

$$\delta p_{elemento} = \iiint_V \delta (B_{nl})^T \sigma dv + \iiint_V (B_0 + B_L)^T \delta \sigma dv. \quad (59)$$

Ahora bien  $\delta \sigma$  vale

$$\delta \sigma = E \delta \varepsilon \quad (60)$$

que sustituida en (56) nos proporciona

$$E \delta \varepsilon = E \cdot (B_0 + A \cdot G) \{ \delta d_{elemento} \} \quad (61)$$

Para dar forma a la primera integral sustituimos  $B_0^T$  por su valor y tomamos  $\sigma = EB_0 \{ \delta d_{elemento} \}$ ,

$$\iiint_V \delta (B_{nl})^T \sigma dv = \iiint_V \delta (G^T A^T) \sigma dv = \iiint_V \delta (N_{,\xi_i}^T \Pi^T \cdot A^T) \sigma dv \quad (62)$$

Ahora bien  $N_{,\xi_i}^T$  y  $\Pi^T$  dado que son matrices de elementos constantes  $\delta (N_{,\xi_i}^T \Pi^T \cdot A^T) = N_{,\xi_i}^T \Pi^T \delta A^T$ . Por tanto, podemos obtener expresiones más compactas para la expresión  $\delta A^T \sigma$ , interviniente en el factor que contiene las componentes no lineales de la deformación,

$$\delta A^T \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\delta u_{,\alpha 1}^1}{g_{11}} & 0 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^1}{\sqrt{g_{11}}} \\ \frac{\delta u_{,\alpha 1}^2}{g_{11}} & 0 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^2}{\sqrt{g_{11}}} \\ \frac{\delta u_{,\alpha 1}^3}{g_{11}} & 0 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^3}{\sqrt{g_{11}}} \\ 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^1}{g_{22}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^1}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^2}{g_{22}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^2}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^3}{g_{22}} & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 3}^3}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta u_{,\alpha 1}^1 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^1}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^1}{\sqrt{g_{11}}} \\ 0 & 0 & \delta u_{,\alpha 2}^2 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^2}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^2}{\sqrt{g_{11}}} \\ 0 & 0 & \delta u_{,\alpha 3}^3 & 0 & \frac{\delta u_{,\alpha 2}^3}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{\delta u_{,\alpha 1}^3}{\sqrt{g_{11}}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}$$

(63)

$$\begin{aligned}
 & \delta A^T \sigma \\
 = & \left\{ \begin{array}{cccccccccc}
 \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 \\
 \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\
 \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0
 \end{array} \right\} \delta \begin{pmatrix} u_{1,\alpha_1} \\ u_{1,\alpha_2} \\ u_{1,\alpha_3} \\ u_{2,\alpha_1} \\ u_{2,\alpha_2} \\ u_{2,\alpha_3} \\ u_{3,\alpha_1} \\ u_{3,\alpha_2} \\ u_{3,\alpha_3} \end{pmatrix} \\
 = & \left\{ \begin{array}{cccccccccc}
 \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{g_{11}} & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & 0 \\
 \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} & \frac{\sigma_2}{g_{22}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\
 \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{13}}{\sqrt{g_{11}}} & \frac{\tau_{23}}{\sqrt{g_{22}}} & \sigma_3 & 0
 \end{array} \right\} \hat{\Pi} \cdot N_{,\xi_i} \delta \{d_{el}\}
 \end{aligned}$$

Si llamamos  $(\bar{\sigma})_{9 \times 9}$  a la primera de estas matrices, podemos escribir

$$\iiint_{\text{volumen}} \delta B^T_L \sigma dv = \iiint_{\text{volumen}} N_{,\xi_i}^T \bar{\pi}^T \delta A^T \sigma dv = \left[ \iiint_{\text{volumen}} N_{,\xi_i}^T \bar{\pi}^T \bar{\sigma} \hat{\Pi} N_{,\xi_i} dv \right]_{60 \times 60} \delta \{d_{elem}\} \quad (64)$$

La matriz  $\left[ \iiint_{\text{volumen}} N_{,\xi_i}^T \bar{\pi}^T \bar{\sigma} \hat{\Pi} N_{,\xi_i} dv \right]_{60 \times 60}$  recibe el nombre de *matriz de rigidez geométrica*,  $k_N$  y es proporcional a los valores de las tensiones.

$$k_N = \left[ \iiint_{\text{volumen}} N_{,\xi_i}^T \bar{\pi}^T \bar{\sigma} \hat{\Pi} N_{,\xi_i} dv \right]_{60 \times 60} \quad (65)$$



La segunda integral de (57) vale

$$\iiint_{\text{volumen}} (B^T_0 + G^T A^T) E (B_0 + AG) \{\delta d_{\text{elemento}}\} dv = \left[ \iiint_{\text{volumen}} B^T_0 E B_0 dv \right] \{\delta d_{\text{elemento}}\} + \left[ \iiint_{\text{volumen}} (B^T_0 E AG + G^T A^T E B_0 + G^T A^T E AG) dv \right] \{\delta d_{\text{elemento}}\} \quad (66)$$

El primer sumando es la conocida matriz de rigidez de elemento del cálculo lineal  $k_{\text{elem}}^0$ . El segundo sumando se representa por  $(k_g)_{\text{elemento}}$  y es denominada *matriz de rigidez de elemento de grandes corrimientos*.

$$k_g = \left[ \iiint_{\text{volumen}} (B^T_0 E AG + G^T A^T E B_0 + G^T A^T E AG) dv \right] \quad (67)$$

Por tanto podemos escribir para (57),

$$\delta p_{\text{elemento}} = (k^0 + k_g + k_N) \delta d_{\text{elemento}} = \bar{k}_T \delta d_{\text{elemento}} \quad (68)$$

Siendo  $\bar{k}_T$  la matriz de rigidez tangente de elemento y cuyo valor es

$$\bar{k}_{T \text{ elemento}} = k + k_g + k_N \quad (69)$$

Una vez obtenida la matriz de rigidez tangente el proceso de cálculo para la obtención de cargas y desplazamientos en régimen no lineal es bien conocido. El texto de [Zienkiewicz \(2000\)](#), una vez más puede ser consultado si surge alguna duda al respecto.

## 5 RESULTADOS OBTENIDOS

### 5.1 Pandeo de láminas

Un ejemplo interesante para comprobar la fiabilidad de un elemento finito en régimen no lineal es el estudio del pandeo de una estructura laminar. En resumen se trata de resolver el problema de autovalores  $|K + \lambda K_g| = 0$ .

De este sistema, los autovalores se corresponden con las cargas críticas de la estructura (cargas de pandeo) mientras que los autovectores son los denominados modos de pandeo.

Como ejemplos de estudio del pandeo de láminas hemos escogido el casquete esférico, la superficie cilíndrica y el paraboloide hiperbólico ([ver Figura 4](#)).

Los resultados numéricos obtenidos los comparamos con los trabajos de [Matsunaga \(1999\)](#). Este autor utiliza un elemento tipo lámina (de sólido degenerado) pero utilizando hipótesis de lámina rebajada (pequeña curvatura). En todos los ejemplos numéricos hemos tomado coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , superficies de planta cuadrada y módulo de Young  $\hat{E} = 7 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$ .

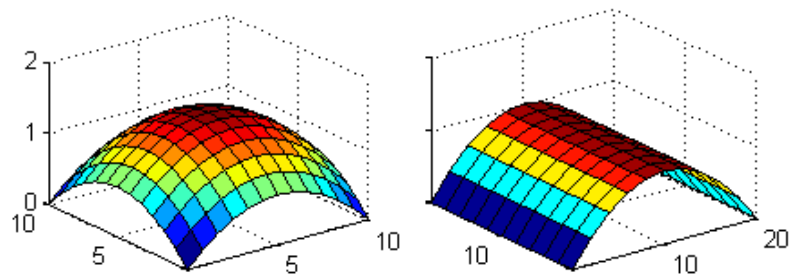


Figura 4: Representación del paraboloido elíptico y la lámina cilíndrica. Discretización de la superficie media por elementos finitos.

En este caso, para la comparación de resultados, tomaremos el parámetro adimensional  $\lambda$  en la forma:

$$\lambda = \frac{N_0 a^2}{D}, \quad (70)$$

donde ,

$$D = \frac{\hat{E} h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (71)$$

que es la constante de rigidez de la placa. En estas fórmulas,  $N_0$  representa la carga de compresión bajo la cual la estructura pande,  $a$  es la dimensión del lado de la planta cuadrada donde se proyecta la lámina y  $h$  es el canto de la lámina. Los resultados obtenidos para el primer modo de pandeo son los que se reflejan en la siguiente tabla, ver [Tabla 1](#).

a/h	a/R <sub>x</sub>	a/R <sub>y</sub>	Presente	Matsunaga (E.F.Tipo Lámina)
10	0.2	0.2	41.06	41.08
	0	0.2	37.49	37.89
	-0.2	0.2	35.89	36.61
20	0.2	0.2	54,13	56.16
	0	0.2	41.92	43.06
	-0.2	0.2	36.35	38.50

Tabla 1: Carga crítica de pandeo en función del parámetro adimensional  $\lambda$ . Estudio de superficies cilíndrica, esférica y paraboloido hiperbólico.

En esta tabla,  $R_x$  y  $R_y$  son los radios de curvatura de la lámina según las direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$ , Los resultados obtenidos, tal como se puede observar, son algo menores que los de [Matsunaga \(1999\)](#), pero se pueden entender al haber utilizado el autor un elemento de lámina rebajada.

En la obtención de estos resultados hemos dispuesto 2 elementos en el espesor aunque el tiempo de cálculo respecto a elemento de Matsunaga es mayor. La discretización a lo largo de la superficie ha sido la suficiente para asegurar la convergencia, que se ha logrado con mallas de 40 - 50 de elementos finitos.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un nuevo elemento finito geoméricamente no lineal formulado en coordenadas curvilíneas. El elemento finito en cuestión es una versión

modificada del elemento finito serendípito clásico de 20 nodos pero formulado en un sistema de referencia curvilíneo, tangente a la superficie media de la lámina.

Pese al mayor esfuerzo inicial de computación debido a las complicadas relaciones deformación- desplazamiento, necesarias para evaluar la matriz de rigidez, el nuevo elemento aporta una descripción precisa de la geometría de la lámina y por tanto es adaptable a cualquier geometría.

Al igual que su homólogo cartesiano, al tener 20 nodos el elemento, los problemas de bloqueo de la matriz de rigidez para espesores delgados (bloqueo por cortante) no son tan gravosos como los elementos de bajo orden.

Extensiones del trabajo a fenómenos elastoplásticos, plásticos o estudios de grandes deformaciones se harán en próximas entregas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ahmad, S., Irons, B., and Zienkiewicz, O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 419-451, 1970.
- Alves de Sousa, R., Cardoso, R., Valente, R., Yoon, J., Gracio, J., and Jorge, R., A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness—part II: nonlinear applications. *Int J Numer Methods Eng*, 67:160–188, 2006.
- Hauptmann, R., and Schweizerhof, K., A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–70, 1998.
- Itskov M., *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. Springer, 2009.
- Martínez Valle J.M., *Formulación del elemento finito serendípito de 20 nodos para la modelización y simulación dinámica de placas y láminas*. Tesis Doctoral. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba (España), 2014.
- Matsunaga, H., Vibration and stability of thick simply supported shallow shells subjected to in-plane stresses. *Journal of Sound and vibration*, 225:41- 60, 1999.
- Rekach, V. G., *Manual of the theory of Elasticity*. Mir Moscú, 1978.
- Schwarze, M., and Reese, S., A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept-Geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(10):1322-55, 2009.
- Yang, H., Saigal, S., Masud, A., and Kapania, R., A survey of recent shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:101–127, 2004.
- Zienkiewicz, O. C., and Taylor, L.R., *El Método de los Elementos Finitos. Mecánica de Sólidos*. McGraw-Hill, 2000.