

UNA GENERALIZACIÓN DEL MODELO TIMOSHENKO-VLASOV PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS NO HOMOGÉNEAS

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b} y Nicolás G. Bender^a

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada Facultad Regional Bahía Blanca
Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 445, Bahía Blanca, Argentina,
vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Dpto. de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina,
pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras clave: vigas no homogéneas, deformación por corte, alabeo torsional, elementos finitos.

Resumen. La teoría Timoshenko-Vlasov describe la dinámica de vigas que tiene en cuenta efectos de flexibilidad por corte y alabeo torsional no uniforme. Este trabajo presenta una generalización de tal modelo, que permite obtener en forma precisa la rigidez seccional de la viga (extendiendo el concepto de factores de corte) y también fórmulas mejoradas para el cálculo de tensiones de corte y normales (considerando efecto “shear-lag”) para secciones transversales no homogéneas de geometría arbitraria. Se basa en la utilización de funciones de alabeo bidimensionales extendiendo la teoría de flexión y torsión de Saint Venant, en conjunto con el principio de Hellinger-Reissner. Se presenta el desarrollo teórico, su implementación computacional y ejemplos numéricos que muestran la eficiencia del nuevo enfoque.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio dinámico de estructuras esbeltas es de importancia fundamental en la ingeniería estructural. La teoría de vigas (unidimensionales) constituye una de las maneras más eficientes de abordar el problema. Por tal motivo, a pesar de la gran cantidad de investigaciones que se han desarrollado, continúa siendo un tópico de considerable interés científico-tecnológico.

El enfoque más simple, la teoría lineal de Bernoulli-Euler para materiales homogéneos e isótropos, ha sido aplicado exitosamente en muchísimas situaciones. La deformación cortante no es tenida cuenta, por lo que pierde precisión al analizar vigas poco esbeltas, materiales muy flexibles al corte o respuestas dinámicas asociadas a frecuencias de vibración superiores a la fundamental.

Este hecho motivó el desarrollo de la teoría de Timoshenko que considera la flexibilidad de corte y la inercia rotatoria, asociadas al movimiento transversal (Timoshenko, 1922). Para vigas de sección compleja el estudio de la dinámica flexo-torsional acoplada combina dicho modelo con la teoría de torsión pura de Saint Venant.

Otro efecto que reviste gran importancia en ciertas situaciones, especialmente en el caso de vigas de pared delgada, es el alabeo no uniforme relacionado a torsión. Este efecto es considerado en la teoría desarrollada por Vlasov (1963).

El enfoque que considera los efectos mencionados, puede denominarse modelo Timoshenko-Vlasov, habiendo sido aplicado exitosamente en una gran cantidad de situaciones (Dominguez y Cortínez, 2015; Saravia et al. 2015; Cortínez y Dotti, 2013). Sin embargo, puede presentar imprecisiones debido a las aproximaciones realizadas al considerar el alabeo de la sección, lo que ha dado lugar a diversas investigaciones para mejorar tal aspecto (El Fatmi, 2007; Petrolo y Casciari, 2004; Kourtis et al., 2009, Romano et al., 2012)

En particular, fueron desarrollados interesantes modelos que generalizan la distribución de alabeo, introduciendo un mayor número de funciones incógnitas. Pagani et al. (2016) han empleado un modelo de estas características considerando una gran cantidad de funciones polinómicas para definir el alabeo. Por su parte, Prokic et al. (2002) han discretizado la sección transversal en varias funciones longitudinales por cada nodo.

En un esfuerzo por mejorar la descripción del alabeo seccional sin aumentar considerablemente el número de funciones incógnitas, Dikaros et al. (2016) han desarrollado, en forma reciente, una teoría muy eficiente que puede modelar efectos de flexibilidad por corte utilizando diez desplazamientos generalizados unidimensionales, requiriendo resolver siete problemas de contorno bidimensionales para efectuar el correspondiente análisis seccional. En general, para el uso de tales modelos de vigas con alabeo generalizado deben elaborarse métodos numéricos específicos que no están incorporados en los programas de uso común. Por ello, parece interesante el desarrollo de una mejora de la teoría de Timoshenko-Vlasov que respete su estructura general.

Este artículo presenta una generalización de este modelo al caso de vigas de sección transversal no homogénea. Cabe aclarar que como sección no homogénea se interpreta aquella en la cual los módulos de elasticidad pueden variar en el plano. Este modelo permite obtener ecuaciones constitutivas precisas entre resultantes de tensión y deformaciones generalizadas (extendiendo el concepto de factores de corte) y también fórmulas mejoradas para el cálculo de tensiones de corte y normales (considerando efecto “shear-lag”). Se basa en la utilización de funciones de alabeo bidimensionales generalizando la teoría de flexión y torsión de Saint Venant para secciones no homogéneas en conjunto con el principio de Hellinger-Reissner y constituye una extensión de la teoría desarrollada por Cortínez y Piovan (2002, 2006) para vigas de pared delgadas, al caso de una sección transversal arbitraria. Un enfoque similar al

presentado aquí fue recientemente desarrollado por [Genoese et al. \(2013\)](#) aunque contemplando vigas homogéneas.

El presente modelo puede ser aplicado ventajosamente en problemas dinámicos asociados al diseño óptimo de estructuras ([Reguera y Cortínez, 2016](#)). Ésta ha sido la principal motivación de esta investigación.

En la sección 2 se presenta la formulación teórica, en la sección 3 la solución numérica, estudios numéricos se muestran en la sección 4 y finalmente, las conclusiones se expresan en la sección 5.

2 MODELO ESTRUCTURAL

Se considera la dinámica del sistema estructural mostrado en la [Figura 1](#). Se trata de una viga de sección transversal no homogénea de forma arbitraria (pudiendo comprender secciones de pared gruesa o delgada). Para el desarrollo teórico se adopta un sistema doble de referencia: x corresponde al eje longitudinal, y, z son ejes transversales con origen en el centroide elástico de la sección, \tilde{y}, \tilde{z} son ejes transversales con origen en el centro de corte elástico cuyas coordenadas respecto al primer sistema vienen dadas por y_s y z_s (las expresiones para su determinación se muestran más adelante). En este trabajo centroide elástico y centro de corte elástico corresponden a la generalización de los conceptos de centroide y centro de corte para secciones de varios materiales.

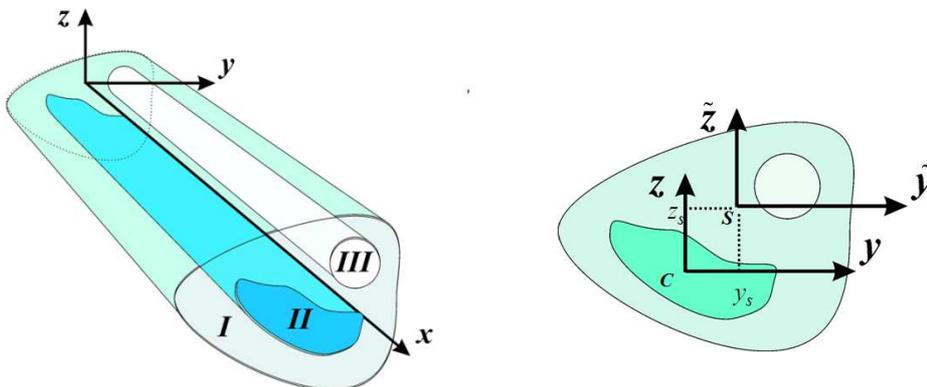


Figura 1. Elemento estructural analizado.

2.1 Formulación variacional

La dinámica del sistema estructural analizado puede formularse mediante el principio de Hellinger-Reissner, en el cual las tensiones y los desplazamientos son variacionalmente independientes. Dicha formulación puede ser expresada de la siguiente manera ([Cortínez y Rossi, 1998](#)):

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V (f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV - \int_S p_i \delta u_i dS = 0 \quad (1)$$

$$\int_V \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0 \quad (2)$$

con

$$W_c(\sigma_{ij}) = -\frac{\mu}{2E}(\sigma_{ii})^2 + \frac{1}{4G}\sigma_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3)$$

donde σ_{ij} y ε_{ij} denotan los tensores de tensiones y deformaciones respectivamente, f_i es el vector de fuerzas volumétricas, ρ la densidad del material, u_i el vector de desplazamientos, p_i el vector de tensión aplicada en la superficie del cuerpo, W_c la energía complementaria por unidad de volumen, E , μ y G módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y módulo de elasticidad transversal respectivamente. En este artículo se utilizará la siguiente notación para las derivadas: $\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial t}$, $K' = \frac{\partial K}{\partial x}$ donde K es una variable genérica. En las expresiones anteriores x_1 , x_2 y x_3 corresponden a x , y , z , respectivamente. La misma correspondencia se da en la definición de los subíndices de las tensiones, deformaciones y vectores de fuerzas. Los desplazamientos según las coordenadas x , y , z serán denotados u , v y w respectivamente.

2.2 Ecuaciones de movimiento

De manera general el campo de desplazamientos de la estructura analizada puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x,t) - v'(x,t)y - w'(x,t)z + \phi'(x,t)\omega(y,z) + \varphi_1(x,y,z,t) \\ v &= v_s(x,t) - \tilde{z}\phi(x,t) + \varphi_2(x,y,z,t) \\ w &= w_s(x,t) + \tilde{y}\phi(x,t) + \varphi_3(x,y,z,t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \tilde{y} = y - y_s \\ \tilde{z} = z - z_s \end{cases} \quad (5)$$

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se adoptan iguales a cero, la expresión anterior corresponde a la extensión de la teoría de Vlasov para secciones no homogéneas, en la cual u_0 es el desplazamiento axial del centro elástico C , v_s y w_s son los desplazamientos transversales del centro de corte elástico S , y ϕ es la rotación torsional. Por otra parte, ω es la función de alabeo torsional de Saint Venant para vigas no homogéneas que puede obtenerse resolviendo la siguiente ecuación en el dominio de la sección transversal.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(g\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y}\right)\right) = 0 \\ \left.g\frac{\partial \omega}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(\tilde{z}n_x - \tilde{y}n_y) \end{cases} \quad (6)$$

donde $g = G(y,z)/G_0$, siendo G_0 un valor de referencia para el módulo de elasticidad

transversal.

Se puede demostrar que la función de alabeo torsional así definida verifica las siguientes integrales:

$$\int_A E\omega dA = \int_A E\omega y dA = \int_A E\omega z dA = 0 \quad (7)$$

La aproximación de Vlasov $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ reproduce razonablemente bien la cinemática en el caso de vigas muy esbeltas. Sin embargo cuando la esbeltez decrece no puede describir adecuadamente la flexibilidad del elemento, constituyendo un modelo de mayor rigidez que la estructura real, lo cual es especialmente notable en casos dinámicos. Esto es así puesto que las deformaciones de corte que se obtienen son nulas (en la línea media de una sección de pared delgada), hecho claramente inconsistente excepto para casos de esfuerzo axial puro, flexión pura, torsión pura o combinaciones de éstos. Para subsanar los inconvenientes aludidos se puede considerar una corrección al desplazamiento axial con una función de alabeo φ proporcional a y , z y ω , dando lugar al siguiente campo de desplazamientos (Cortínez y Rossi, 1998):

$$\begin{aligned} u &\cong u_0(x,t) - \theta_z(x,t)y - \theta_y(x,t)z + \theta(x,t)\omega(y,z) \\ v &\cong v_s(x,t) - \tilde{z}\phi(x,t) \\ w &\cong w_s(x,t) + \tilde{y}\phi(x,t) \end{aligned} \quad (8)$$

En estas expresiones, θ_y , θ_z y θ son independientes de v' , w' y ϕ' . Las correspondientes componentes de deformación vienen dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u'_0 - \theta'_z y - \theta'_y z + \theta' \omega \\ \gamma_{xy} &= (v'_s - \theta'_z) + \phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial y} (\phi' - \theta) \\ \gamma_{xz} &= (w'_s - \theta'_y) + \phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial z} (\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

Como es posible observar, tal representación produce deformaciones de corte (debidas a esfuerzos de corte y a momentos flexo-torsionales) mejorando así la descripción cinemática, sobre todo para casos relacionados con vigas menos esbeltas. Asimismo, la utilización de tal cinemática puede representar las inercias rotatoria y de alabeo torsional.

En ocasiones, se considera una simplificación de las deformaciones anteriores despreciando el último término de u en la expresión (8) y los últimos términos de las deformaciones en (9). Tal aproximación se menciona habitualmente con el nombre de Teoría de Timoshenko. En ésta la torsión se analiza mediante la Teoría de Saint Venant de torsión pura. Esta última suele dar resultados precisos para vigas homogéneas de sección maciza. Sin embargo, para el caso de secciones de pared delgada no homogéneas pueden perder precisión puesto que los efectos de deformación, de alabeo y de corte por alabeo se hacen muy notorios.

La cinemática descrita por las expresiones (8) que considera efecto de flexibilidad por

corte relacionada tanto a la flexión como al alabeo torsional, se denomina en este trabajo aproximación de Vlasov-Timoshenko.

Para obtener las ecuaciones de movimiento, las expresiones (9) se introducen en la ecuación del Principio de Trabajos Virtuales (1), la que después de integrar en la sección queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(N \delta u_0' - M_z \delta \theta_z' - M_y \delta \theta_y' + B \delta \theta' + Q_y \delta (v_s' - \theta_z) + Q_z \delta (w_s' - \theta_y) + T_{sv} \delta \phi' + T_w \delta (\phi' - \theta) \right) dx = \\ & = - \int_0^L \left(\ddot{u}_0 \overline{\rho A} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_y} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_z} + \ddot{\theta} \overline{\rho S_\omega} \right) \delta u_0 + \left(-\ddot{u}_0 \overline{\rho S_z} + \ddot{\theta}_z \overline{\rho I_z} + \ddot{\theta}_y \overline{\rho I_{yz}} - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega y}} \right) \delta \theta_z + \\ & \quad + \left(-\ddot{u}_0 \overline{\rho S_y} + \ddot{\theta}_z \overline{\rho I_{yz}} + \ddot{\theta}_y \overline{\rho I_y} - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega z}} \right) \delta \theta_y + \left(\ddot{u}_0 \overline{\rho S_\omega} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_{\omega y}} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_{\omega z}} + \ddot{\theta} \overline{\rho C_w} \right) \delta \theta + (10) \\ & \quad + \left(\ddot{v}_s \overline{\rho A} - \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\tilde{y}}} \right) \delta v_s + \left(\ddot{w}_s \overline{\rho A} + \ddot{\phi} \overline{\rho S_z} \right) \delta w_s + \left(-\ddot{v}_s \overline{\rho S_{\tilde{y}}} + \ddot{w}_s \overline{\rho S_z} + \ddot{\phi} \overline{\rho I_s} \right) \delta \phi + \\ & \quad + \int_0^L \left(q_x \delta u_0 - m_z \delta \theta_z - m_y \delta \theta_y + b \delta \theta + q_y \delta v_s + q_z \delta w_s + m_x \delta \phi \right) dx \end{aligned}$$

donde se ha definido:

$$\begin{aligned} q_x &= \int_A f_x dA, \quad q_y = \int_A f_y dA, \quad q_z = \int_A f_z dA, \quad b = \int_A f_x \omega dA \\ m_y &= \int_A f_x z dA, \quad m_z = \int_A f_z y dA, \quad m_x = \int_A (-f_y \tilde{z} + f_z \tilde{y}) dA \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho A} &= \int_A \rho dA, \quad \overline{\rho C_w} = \int_A \rho \omega^2 dA, \quad \overline{\rho I_s} = \int_A \rho (\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2) dA, \quad \overline{\rho I_z} = \int_A \rho y^2 dA, \\ \overline{\rho I_y} &= \int_A \rho z^2 dA, \quad \overline{\rho I_{yz}} = \int_A \rho yz dA, \quad \overline{\rho S_y} = \int_A \rho z dA, \quad \overline{\rho S_z} = \int_A \rho y dA, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\overline{\rho S_\omega} = \int_A \rho \omega dA, \quad \overline{\rho S_{\omega y}} = \int_A \rho \omega y dA, \quad \overline{\rho S_{\omega z}} = \int_A \rho \omega z dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{z}}} = \int_A \rho \tilde{y} dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{y}}} = \int_A \rho \tilde{z} dA$$

$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA,$$

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA, \quad (13)$$

$$T_{sv} = \int_A \left(\tau_{xy} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) dA, \quad T_w = - \int_A \left(\tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA$$

Siendo $q_x(x,t)$, $q_y(x,t)$ y $q_z(x,t)$ fuerzas distribuidas por unidad de longitud, $m_x(x,t)$ es el momento torsor externo respecto al centro de corte por unidad de longitud, y $m_y(x,t)$ y $m_z(x,t)$ momentos por unidad de longitud con respecto a los ejes centroidales, $b(x,t)$ el

bimomento externo por unidad de longitud y $\overline{\rho A}$, $\overline{\rho I_y}$, $\overline{\rho I_z}$, $\overline{\rho I_{yz}}$, $\overline{\rho I_s}$ y $\overline{\rho C_w}$ las propiedades inerciales seccionales. Por otra parte, N , M_y , M_z , B , Q_y , Q_z , T_{sv} y T_w corresponden a los habituales esfuerzos seccionales, es decir, esfuerzo normal, momentos flectores con respecto a y y a z , bimomento, esfuerzos de corte en las direcciones y , z , momento torsor de Saint Venant y momento torsor de alabeo respectivamente.

Operando en la expresión (10) de acuerdo al cálculo variacional pueden obtenerse las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial N}{\partial x} + \overline{\rho A} \ddot{u}_0 - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_y} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_z} + \ddot{\theta} \overline{\rho S_\omega} &= q_x \\
 \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q_y - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_z} + \overline{\rho I_z} \ddot{\theta}_z + \overline{\rho I_{yz}} \ddot{\theta}_y - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega y}} &= -m_z \\
 \frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_y} + \overline{\rho I_y} \ddot{\theta}_y + \overline{\rho I_{yz}} \ddot{\theta}_z - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega z}} &= -m_y \\
 -\frac{\partial Q_y}{\partial x} + (\ddot{v}_s \overline{\rho A} - \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\bar{y}}}) &= q_y \\
 -\frac{\partial Q_z}{\partial x} + (\ddot{w}_s \overline{\rho A} + \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\bar{z}}}) &= q_z \\
 -\frac{\partial B}{\partial x} - T_w + \ddot{u}_0 \overline{\rho S_\omega} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_{\omega z}} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_{\omega y}} + \overline{\rho C_w} \ddot{\theta} &= b \\
 -\frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} - \ddot{v}_s \overline{\rho S_{\bar{y}}} + \ddot{w}_s \overline{\rho S_{\bar{z}}} + \overline{\rho I_s} \ddot{\phi} &= m_x
 \end{aligned} \tag{14}$$

y las correspondientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
 N - N_0 &= 0 & o & \delta u_0 = 0 \\
 -M_z + M_{z0} &= 0 & o & \delta \theta_z = 0 \\
 -M_y + M_{y0} &= 0 & o & \delta \theta_y = 0 \\
 Q_z - Q_{z0} &= 0 & o & \delta w = 0 \\
 Q_y - Q_{y0} &= 0 & o & \delta v = 0 \\
 B - B_0 &= 0 & o & \delta \theta = 0 \\
 T_{sv} + T_w - (T_{sv0} + T_{w0}) &= 0 & o & \delta \phi = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

donde N_0 , M_{y0} , M_{z0} , B , Q_{y0} , Q_{z0} , T_{sv0} y T_{w0} son esfuerzos seccionales externos aplicados en los extremos de la viga considerada.

2.3 Ecuaciones constitutivas para las fuerzas seccionales

2.3.1 Primera aproximación

El material considerado verifica la ley de Hooke la cual, despreciando las tensiones y las deformaciones transversales, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (16)$$

En primera aproximación es posible determinar las ecuaciones constitutivas para las fuerzas seccionales sustituyendo las expresiones (9) en (16) y el resultado en (13), llegando a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} N^0 &= \overline{EA}u_0' \\ M_y^0 &= -\overline{EI}_y\theta_y' - \overline{EI}_{yz}\theta_z' \\ M_z^0 &= -\overline{EI}_{yz}\theta_y' - \overline{EI}_z\theta_z' \\ B^0 &= \overline{EC}_w\theta' \\ Q_y^0 &= \overline{GA}(v_s' - \theta_z) \\ Q_z^0 &= \overline{GA}(w_s' - \theta_y) \\ T_{sv}^0 &= \overline{GJ}\phi' \\ T_w^0 &= \overline{GD}(\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (17)$$

donde:

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_A E dA, \quad \overline{GA} = \int_A G dA, \quad \overline{EI}_z = \int_A Ey^2 dA, \quad \overline{EI}_y = \int_A Ez^2 dA, \quad \overline{EI}_{yz} = \int_A Eyz dA, \\ \overline{EC}_w &= \int_A E\omega^2 dA, \quad \overline{GD} = \int_A G \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] dA, \quad \overline{GJ} = \int_A G \left(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA \end{aligned} \quad (18)$$

El símbolo supra_cero (⁰) indica que se trata de una primera aproximación a las ecuaciones constitutivas buscadas.

Debe notarse que las tensiones de corte determinadas a partir de (9) y (16) no son de gran precisión. Este hecho es muy conocido, especialmente para los términos relacionados con flexión no uniforme (primer término en la segunda y en la tercera de las expresiones (9)). En efecto, tales aproximaciones indican que las correspondientes tensiones de corte en la sección son uniformes, lo cual es claramente incorrecto además del hecho de no verificar las condiciones de borde en los extremos de la sección (tensiones cortantes nulas). Tal inconsistencia es discutida en la literatura en relación a la teoría de Timoshenko. De la misma manera, el tercer término en la segunda y tercera de las expresiones (9) muestran la misma inconsistencia asociada al alabeo torsional. Se espera, en consecuencia, que las relaciones (17) presenten imprecisiones en la flexibilidad de la estructura en ciertos casos (vigas poco esbeltas).

Es posible determinar relaciones constitutivas mejoradas que consideren de manera más precisa la distribución de las tensiones de corte en la sección. En diversos modelos esto se suele efectuar modificando las ecuaciones (17) referidas a los esfuerzos de corte con factores cuya obtención ha motivado una gran cantidad de estudios.

2.3.2 Aproximación mejorada para las tensiones y ecuaciones constitutivas de las fuerzas seccionales.

Considerando la expresión general de desplazamientos dada por (4) y aplicando las definiciones de relaciones desplazamiento-deformación se obtienen las siguientes expresiones formalmente exactas:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_x &= u_0' - v'' y - w'' z + \phi'' \omega + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \hat{\gamma}_{xy} &= \phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \hat{\gamma}_{xz} &= \phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x}\end{aligned}\quad (19)$$

Asumiendo a continuación las siguientes restricciones:

$$\phi_2 = \phi_3 = 0, \phi_1 = \phi_1(y, z) \quad (20)$$

es posible sustituir la primera de las expresiones (19) en (16) y luego en (13), lo que permite obtener u_0', v'', w'' y ϕ'' en función del esfuerzo normal, los momentos flectores y el bimomento. Reintroduciendo dichas expresiones en la primera de (19) y aplicando la Ley de Hooke se llega a:

$$\sigma_x = N \frac{E}{EA} + M_y \left(E \frac{z \overline{EI_z} - y \overline{EI_{yz}}}{\Delta} \right) + M_z \left(E \frac{-z \overline{EI_{yz}} + y \overline{EI_y}}{\Delta} \right) + B \frac{E\omega}{EC_w} \quad (21)$$

donde:

$$\Delta = \overline{EI_y} \overline{EI_z} - \overline{EI_{yz}}^2 \quad (22)$$

Por otra parte, las tensiones de corte pueden expresarse con la ayuda de (16), (19) y (20) como:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \tau_{xz} &= G\phi' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\end{aligned}\quad (23)$$

Sustituyendo las expresiones de las tensiones dadas por (21) y (23) en la ecuación de equilibrio longitudinal (despreciando la fuerza volumétrica y fuerzas inerciales)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

y considerando las ecuaciones (14) para el caso estático con las fuerzas distribuidas iguales a cero, es posible determinar la función de alabeo φ . Tal solución puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\varphi_1 = Q_y \varphi_y + Q_z \varphi_z + T_w \varphi_\omega \quad (25)$$

donde φ_y , φ_z y φ_ω verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) = -\frac{E_0}{G_0} e \left(\frac{-z \overline{EI}_{yz} + y \overline{EI}_y}{\Delta} \right) \\ \left. \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \int_A \varphi_y dA = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) = -\frac{E_0}{G_0} e \left(\frac{z \overline{EI}_z - y \overline{EI}_{yz}}{\Delta} \right) \\ \left. \frac{\partial \varphi_z}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \int_A \varphi_z dA = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z} \right) = E \frac{\omega}{EC_w} \\ \left. \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \int_A \varphi_\omega dA = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Reinyectando la expresión (25) en las (23) es posible determinar las tensiones de corte en términos de Q_y , Q_z y T_w que hasta aquí, de acuerdo a (20), son supuestas independientes de x . Se admitirá, sin embargo, su validez aún cuando tales esfuerzos sean variables longitudinalmente. Luego, es posible rederivar la expresión (21) para la tensión normal contemplando la función de alabeo (25) con los esfuerzos variables con x . De esta forma es posible llegar a las siguientes expresiones mejoradas para las tensiones:

$$\sigma_x = \hat{N} \frac{E}{EA} + \hat{M}_y \left(E \frac{z \overline{EI}_z - y \overline{EI}_{yz}}{\Delta} \right) + \hat{M}_z \left(E \frac{-z \overline{EI}_{yz} + y \overline{EI}_y}{\Delta} \right) + \hat{B} \frac{E\omega}{EC_w} - E \left(q_y \varphi_y + q_z \varphi_z + (m_x + T'_{sv}) \varphi_\omega \right)$$

$$\tau_{xy} = Q_y \psi_{yy} + Q_z \psi_{zy} + T_w \psi_{wy} + T_{sv} \psi_{svy}$$

$$\tau_{xz} = Q_y \psi_{yz} + Q_z \psi_{zz} + T_w \psi_{wz} + T_{sv} \psi_{svz}$$
(29)

donde:

$$\psi_{yy} = G \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \psi_{zy} = G \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}, \quad \psi_{yz} = G \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}, \quad \psi_{zz} = G \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$
(30)

$$\psi_{wy} = g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial y}, \quad \psi_{wz} = g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z}$$

$$\psi_{svy} = \frac{G}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right), \quad \psi_{svz} = \frac{G}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - \tilde{y} \right)$$
(31)

$$\hat{N} = N$$

$$\hat{M}_y = M_y + q_y \int_A E \varphi_y z dA + q_z \int_A E \varphi_z z dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega z dA$$
(32)

$$\hat{M}_z = M_z + q_y \int_A E \varphi_y y dA + q_z \int_A E \varphi_z y dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega y dA$$

$$\hat{B} = B + q_y \int_A E \varphi_y \omega dA + q_z \int_A E \varphi_z \omega dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega \omega dA$$

A partir de las tensiones de corte (29) con T_w y T_{sv} iguales a 0 y considerando la definición de centro de corte (Sapountzakis y Protonotariou, 2008) es posible determinar sus coordenadas con las siguientes expresiones:

$$y_s = \int_A (\psi_{zz} y - \psi_{zy} z) dA$$

$$z_s = \int_A (\psi_{yy} z - \psi_{yz} y) dA$$
(33)

Las tensiones dadas por (29) constituyen una extensión de la clásica teoría de Saint Venant (Petrolo y Casciaro, 2004; El Fatmi, 2008) asumiendo tensiones de corte variables longitudinalmente, existencia de alabeo torsional no uniforme y secciones no homogéneas.

Finalmente, las ecuaciones constitutivas mejoradas para las fuerzas seccionales, se determinan sustituyendo (9) y (29) (considerando $q_y = q_z = m_x = T'_{sv} = 0$) en la ecuación variacional (2). De esta última se pueden despejar los esfuerzos seccionales obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
N &= \overline{EA}u_0' \\
M_y &= -\overline{EI}_y\theta_y' - \overline{EI}_{yz}\theta_z' \\
M_z &= -\overline{EI}_{yz}\theta_y' - \overline{EI}_z\theta_z' \\
B &= \overline{EC}_w\theta' \\
Q_y &= \overline{GA}_y(v_s' - \theta_z) + \overline{GA}_{yz}(w_s' - \theta_y) \\
Q_z &= \overline{GA}_{yz}(v_s' - \theta_z) + \overline{GA}_z(w_s' - \theta_y) \\
T_{sv} &= \overline{GJ}\phi' \\
T_w &= \overline{GD}_\omega(\phi' - \theta)
\end{aligned} \tag{34}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\overline{GA}_y &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yy} dA \left(\int_A \frac{\psi_{zy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}^2}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zy} dA \left(\int_A \frac{\psi_{zy}\psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}\psi_{yz}}{G} dA \right) \\
\overline{GA}_{yz} &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yy} dA \left(\int_A \frac{\psi_{zy}\psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}\psi_{yz}}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zy} dA \left(\int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \\
\overline{GA}_z &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yz} dA \left(\int_A \frac{\psi_{zy}\psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}\psi_{yz}}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zz} dA \left(\int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \\
\Delta^* &= \left(\int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \left(\int_A \frac{\psi_{zy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}^2}{G} dA \right) - \left(\int_A \frac{\psi_{yy}\psi_{zy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}\psi_{yz}}{G} dA \right)^2 \\
\overline{GD}_\omega &= \frac{G_0 \int_A \frac{\partial \omega}{\partial y} \psi_{wy} dA + \int_A \frac{\partial \omega}{\partial z} \psi_{wz} dA}{\int_A \frac{1}{g} (\psi_{wy}^2 + \psi_{wz}^2) dA}
\end{aligned} \tag{35}$$

3 SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para una estructura y para un estado de carga dados debe obtenerse, en primer lugar, el centroide elástico de la sección, el que se tomará como origen del sistema de coordenadas principal de la misma.

Para realizar el análisis seccional, se determinan las rigideces \overline{EA} , \overline{EI}_z , \overline{EI}_y y \overline{EI}_{yz} mediante las expresiones (18). Posteriormente, se obtienen las funciones de alabeo ϕ_y y ϕ_z mediante la solución de las ecuaciones (26) y (27). Las coordenadas del centro de corte elástico y_s , z_s pueden ser entonces determinadas a partir de las expresiones (33). Seguidamente, se obtiene la función de alabeo de Saint Venant de la solución de la ecuación (6), con la cual pueden

determinarse \overline{EC}_w y \overline{GJ} mediante (18). Finalmente la función de alabeo torsional secundario φ_ω se obtiene mediante la resolución de la ecuación (28).

Una vez determinadas las funciones de alabeo mencionadas y utilizando las definiciones (30) y (31), es posible determinar las rigideces seccionales \overline{GA}_y , \overline{GA}_z , \overline{GA}_{yz} y \overline{GD}_ω mediante las expresiones (35). De esta manera todas las rigideces seccionales que figuran en las ecuaciones constitutivas (34) quedan determinadas.

Para obtener los desplazamientos generalizados se deben introducirse las expresiones (34) en las (14) y resolver las ecuaciones gobernantes unidimensionales así obtenidas.

Finalmente, los desplazamientos pueden obtenerse a partir de (8) y las tensiones a partir de (29).

Como puede apreciarse, el modelo requiere la resolución de cuatro problemas de contorno bidimensionales (6, 26, 27 y 28) y siete ecuaciones de movimiento acopladas unidimensionales (34 y 14). Todos estos problemas se resuelven mediante el método de los Elementos Finitos. El algoritmo completo se implementa en el programa FlexPDE® (2016).

En este programa el problema se define a través de la escritura de las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema que se estudia y de sus correspondientes condiciones de contorno en un archivo de textos denominado “descriptor” utilizando una notación muy sencilla, similar a la usada comúnmente en matemática. Internamente, dicho programa se encarga de obtener las correspondientes ecuaciones variacionales, a través del método de Galerkin, así como de la correspondiente discretización del dominio efectuando un mallado automático. Este mallado se densifica de acuerdo a un límite de error, en la solución de las ecuaciones nodales, elegido por el usuario, aunque también es posible ajustar la densidad de la malla, tanto en el dominio completo como en determinadas zonas, mediante comandos especiales destinados a tal fin. El programa posee, además, varias estrategias que el usuario puede seleccionar para la resolución de problemas no lineales de contorno y/o de valores iniciales.

Para resolver el modelo propuesto se arman seis descriptores que se corren, de acuerdo a la secuencia de cálculo ya descripta, desde un archivo “batch”. En el primero se calculan y se transfieren las coordenadas del centroide de la sección a partir de ejes generales cualesquiera y en el segundo, utilizando ejes centroidales, se calculan las características seccionales y el centro de corte. En el tercer y cuarto descriptores se resuelven la ecuación de alabeo de Saint Venant y la de alabeo secundaria respectivamente y se calculan las características seccionales que se definen a partir de ellas y los coeficientes de las tensiones de corte. En el quinto descriptor se calcula el problema unidimensional obteniéndose los esfuerzos en las secciones elegidas, valores que se transfieren al sexto archivo para calcular las tensiones en dichas secciones.

En los ejemplos presentados en la sección siguiente se han utilizado en todos los casos elementos cuadráticos, adoptándose para los problemas unidimensionales 200 elementos lineales y para los bidimensionales (características seccionales y tensiones) 1214 y 596 elementos triangulares para las secciones cerrada y abierta respectivamente. En los casos tridimensionales se usaron elementos tetraédricos, 11975 para la viga con sección cajón y 7668 para la que tiene una sección abierta asimétrica.

4 EJEMPLOS

Se analizan a continuación algunos ejemplos numéricos con el fin de mostrar la precisión del enfoque propuesto.

elementos finitos (FlexPDE®, 2016). Los resultados pueden verse en la [Tabla 2](#). Como se aprecia, la comparación es muy buena siendo las diferencias promedio del orden del 2%.

	Empotrada-Libre		Empotrada-Articulada	
	1D	3D	1D	3D
f_1	1.83	1.84	7.58	7.62
f_2	5.25	5.33	19.14	18.75
f_3	10.66	11.30	22.31	21.71
f_4	11.49	11.59	23.54	22.23

Tabla 2: Frecuencias Naturales (Hz) de la viga del ejemplo 4.2.

4.3 Vibraciones forzadas de una viga cajón.

Se considera a continuación la misma viga descrita previamente sometida a una carga distribuida $p_z = 658\cos(\lambda t)$ Pa, aplicada en la mitad derecha de la cara superior, siendo la frecuencia externa λ igual a la mitad de la correspondiente frecuencia fundamental.

Se han calculado las vibraciones forzadas para las condiciones empotrada-articulada y empotrada-libre empleando el presente enfoque y también un modelo tridimensional de elementos finitos.

En la [Figura 3](#) se aprecia la variación longitudinal del desplazamiento transversal (w) para los puntos A y B mostrados en la [Figura 2](#) para el caso de la condición de empotrada-articulada. Los cálculos indican una muy buena concordancia entre ambos modelos. Lo mismo puede decirse para la viga en condición empotrada-libre como se muestra en la [Figura 4](#), en la cual se considera el desplazamiento transversal (w) del punto B de la [Figura 2](#).

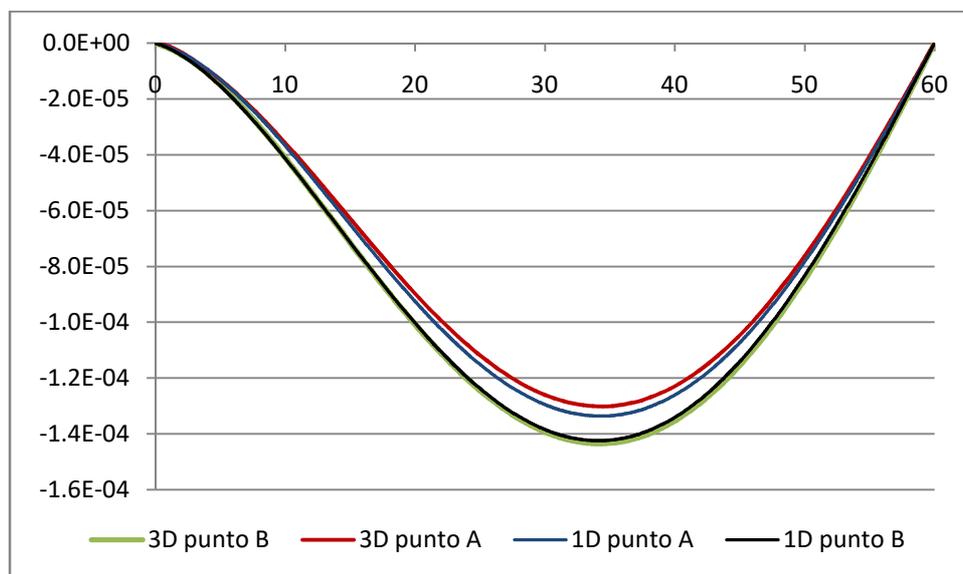


Figura 3. Desplazamiento vertical en puntos A y B. Viga E-A. Ejemplo 4.3.

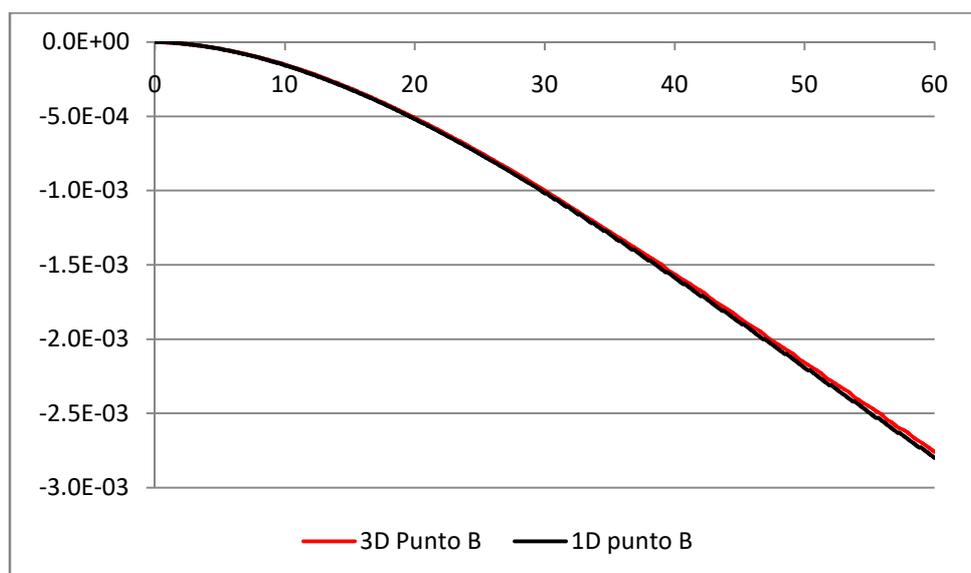


Figura 4. Desplazamiento vertical en el punto B. Viga E-L. Ejemplo 4.3.

Para las mismas condiciones de borde, en la [Figura 5](#) se muestra una comparación de las tensiones normales correspondientes a la sección transversal ubicada a 3 metros del empotramiento. Como se observa, el presente modelo compara favorablemente con los resultados del enfoque de elementos finitos tridimensional.

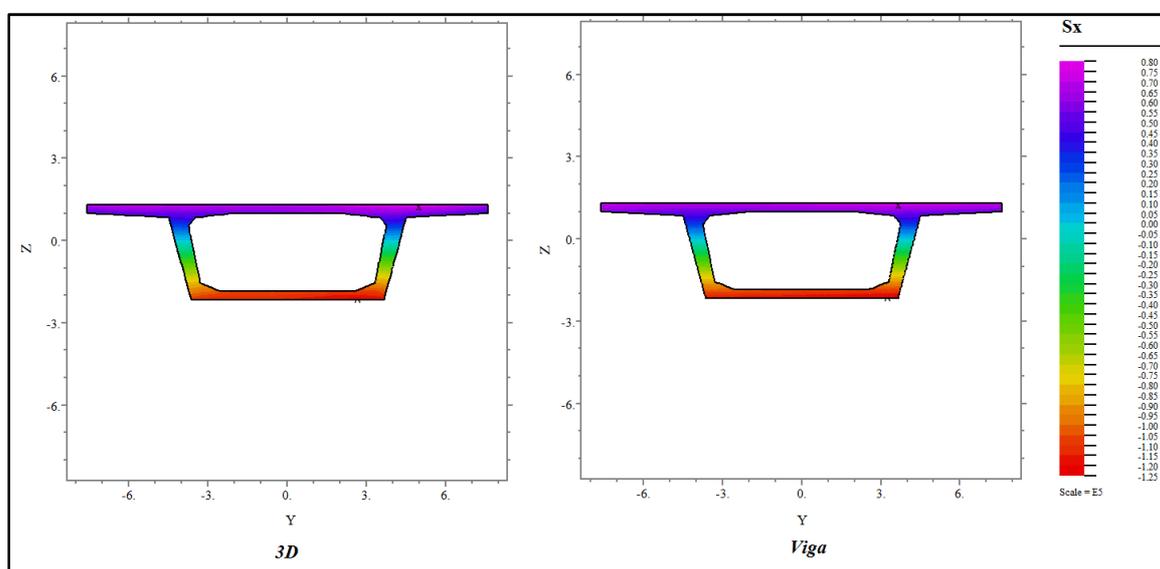


Figura 5. Tensión σ_x en $x=3m$, viga cajón empotrada-libre. Ejemplo 4.3.

4.4 Vibraciones libres de una viga de sección abierta asimétrica.

Se analiza la estructura de un metro de longitud cuya sección transversal se muestra en la [Figura 6](#), construida con un material de las siguientes características: $\rho = 2650 N/m^3$, $E = 4,5 \times 10^{10} Pa$, $\nu = 0,25$.

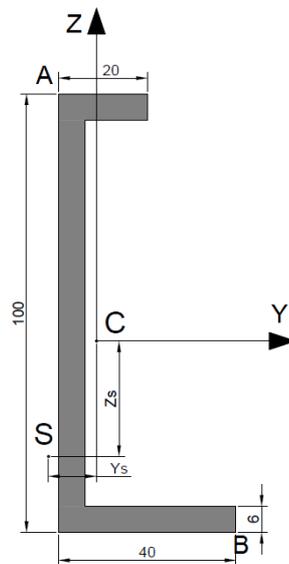


Figura 6: Sección transversal abierta. Ejemplos 4.4 y 4.5.

Se han determinado con el presente enfoque las cuatro primeras frecuencias naturales para las condiciones empotrada-libre y empotrada-articulada. Dichos valores se muestran en la [Tabla 3](#) conjuntamente con resultados obtenidos mediante un modelo tridimensional de elementos finitos. Puede apreciarse una muy buena concordancia entre ambos modelos, siendo la diferencia media menor al 1%.

	Empotrada-Libre		Empotrada-Articulada	
	1D	3D	1D	3D
f_1	5.14	5.14	21.93	21.96
f_2	19.57	19.60	59.85	60.34
f_3	30.01	30.12	67.84	68.09
f_4	35.75	36.00	98.85	99.04

Tabla 3: Frecuencias Naturales (Hz) de la viga del ejemplo 4.4.

4.5 Vibraciones forzadas de una viga de sección abierta asimétrica.

Se considera la misma viga descrita en el ejemplo anterior para la condición empotrada-articulada, sometida a una carga distribuida $p_z = 50\cos(\lambda t)$ kPa aplicada sobre el ala superior en el sentido negativo del eje z . La frecuencia de excitación λ es la mitad de la correspondiente a la frecuencia fundamental.

En la [Figura 7](#) se muestra una comparación entre los desplazamientos verticales de los puntos A y B ([Figura 6](#)) obtenidos mediante el presente modelo y con un enfoque tridimensional de elementos finitos. Asimismo, en la [Figura 8](#) se muestra una comparación similar para las tensiones normales σ_x en una sección ubicada a 0.3 metros del empotramiento y en la [Figura 9](#) una comparación de la distribución de las tensiones de corte en la línea media del alma de la misma sección (los valores correspondientes al modelo 3D se han consignado sin suavización en el post-proceso). Como se observa la comparación es muy buena en todos los casos.

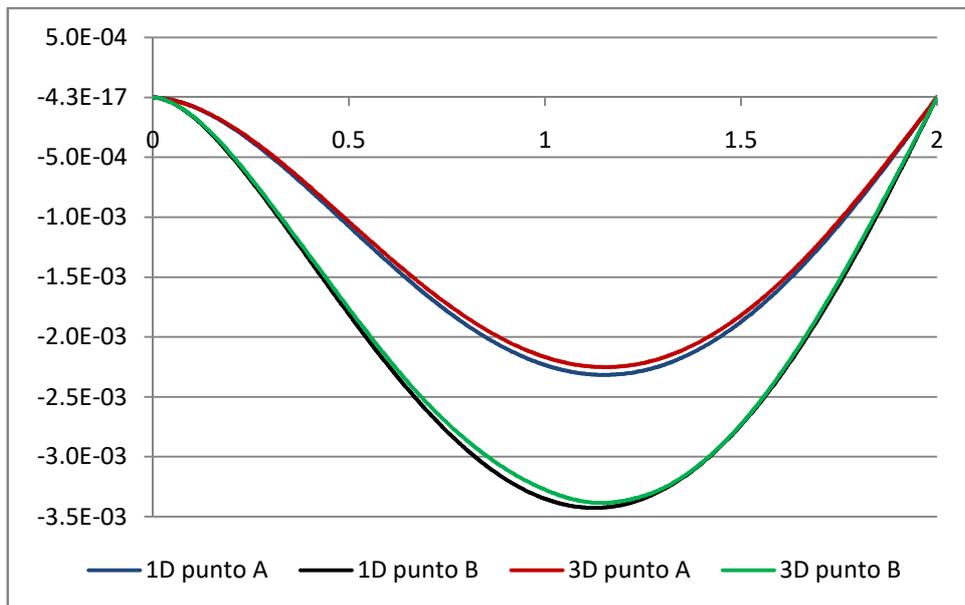


Figura 7. Desplazamiento en puntos A y B, viga empotrada-articulada. Ejemplo 4.5.

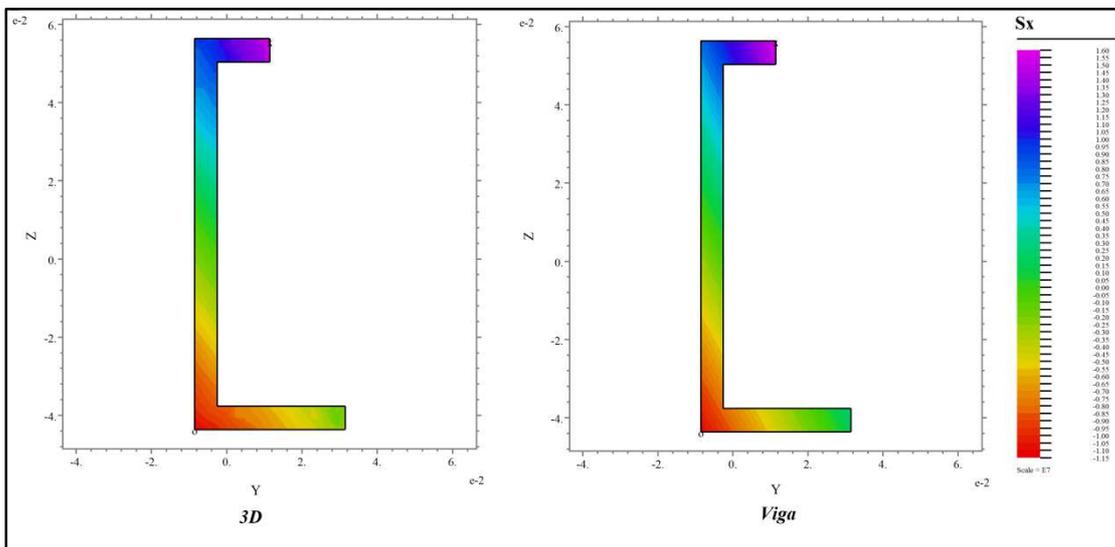


Figura 8. Tensión σ_x en $x=0.3m$, viga empotrada-articulada. Ejemplo 4.5.

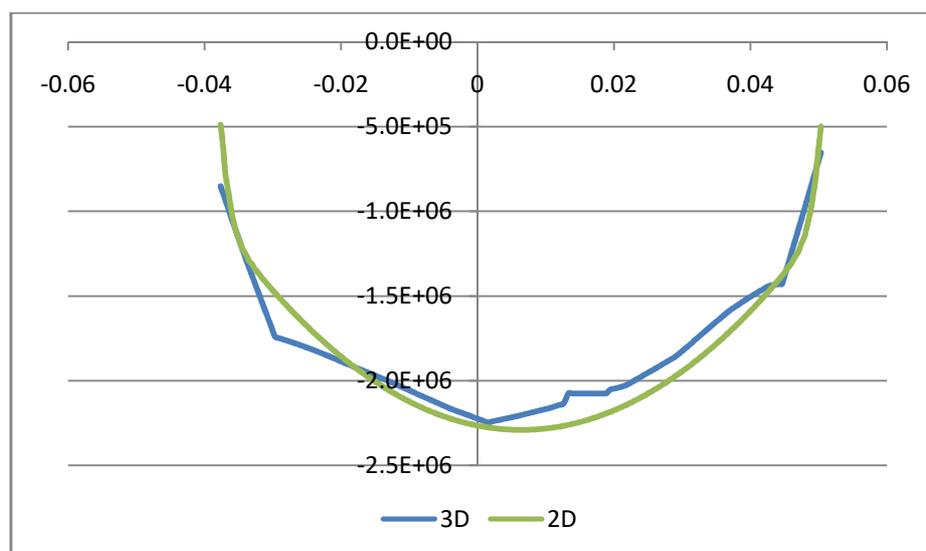


Figura 9. Tensión τ_{xz} en $x=0.3m$. Ejemplo 4.5.

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo teórico para la dinámica de estructuras esbeltas que considera de manera mejorada las propiedades de rigidez seccional de una viga no homogénea así como las distribuciones de tensiones normales y de corte. Esta teoría mantiene la estructura general de un modelo Timoshenko-Vlasov, es decir no aumenta el número de incógnitas unidimensionales para su descripción, por lo tanto pueden emplearse eficientes modelos de elementos finitos para su solución tal como el propuesto en Cortínez y Piovan (2006).

En el presente trabajo tanto el análisis seccional como la dinámica uniaxial se han resuelto mediante el método de elementos finitos implementando el algoritmo completo en el programa FlexPDE®. Este modelo es especialmente atractivo para estudios de diseño óptimo de estructuras esbeltas, tema que será abordado próximamente.

Asimismo, una investigación en curso es la extensión de la teoría para el estudio de vigas laminadas anisótropas.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte del proyecto “Mecánica estructural no lineal: diseño óptimo e identificación de fallas estructurales” (Secyt, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur).

REFERENCIAS

- Cortínez, V. H. y Dotti, F. E. Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams. *Engineering Fracture Mechanics* 110, 249–257, 2013.
- Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701–723, 2002.
- Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers & Structures* 84 978–990, 2006.
- Cortínez, V. H. y Rossi, R. R. Dinámica de vigas de sección abierta de pared delgada deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones. *Revista Internacional de*

- Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. 14 (3), 293-316, 1998.
- Dominguez, P. N y Cortínez, V. H. Vibration-based damage identification in thin-walled beams with diffuse cracking. *Proceedings XXXVI Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, PUC, Río de Janeiro, Brasil, nov., 2015.
- Dikaros, I. C. y Sapountzakis, E. J. Argyridi, A. K. Generalized warping effect in the dynamic analysis of beams. *Journal of Sound and Vibration* 369, 119–146, 2016
- El Fatmi, R. Non-uniform warping including the effect of torsion an shear forces. Part I: A general beam theory. *International Journal of Solids and Structures* 44, 5912-5929, 2007.
- FlexPDE[®], PDE Solutions Inc. www.pdesolutions.com, 2015.
- Genoese, A.; Genoese, A. y Garcea, G. Calculus of the elastic properties of a beam cross-section. *Proceedings of the COMSOL Conference*. Milan, 2009.
- Genoese, A.; Genoese, A.; Bilotta, A. y Garcea, G.. A mixed beam model with non-uniform warpings derived from the Saint Venant rod. *Computers and Structures* 121, 87–98, 2013.
- Kourtis, L. C.; Kesari, H; Carter, D. R. y Beaupré, G. S. Transverse and torsional shear stresses in prismatic bodies having inhomogeneous material properties using a new 2D stress function. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4 (4), 659-674, 2009.
- Pagani, A; de Miguel, A.G.; Petrolo, M. y Carrera, E. Analysis of laminated beams via unified formulation and Legendre polynomial expansions. *Composite Structures*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.095>, 2016.
- Petrolo, A. S. y Casciaro, R. 3D beam element base on Saint Venant's rod theory. *Computers & Structures* 82, 2471-2481, 2004.
- Prokic, A. A new finite element for analysis of shear lag. *Computers & Structures*, 80,1011-24, 2002.
- Reguera, F. y Cortínez, V. H. Optimal design of composite thin-walled beams using simulated annealing. *Thin-Walled Structures* 104, 71–81, 2016.
- Romano, G; Barretta, A y Barretta, R. On torsion and shear of Saint-Venant beams. *European Journal of Mechanics A/Solids* 35, 47-60, 2012.
- Sapountzakis, E. J., Mokos V. G., Protonotariou, V. M. A BEM solution to transverse shear loading of beams. *Computational Mechanics*. 36, 384-397, 2005.
- Sapountzakis, E. J., Protonotariou, V. M. A displacement solution for transverse shear loading of beams using the boundary element method. *Computers & Structures* 86, 771–779, 2008.
- Saravia, M. C.; Saravia, L. J. y Cortínez, V. H. A one dimensional discrete approach for the determination of the cross sectional properties of composite rotor blades. *Renewable Energy* 80, 713-723, 2015.
- Timoshenko, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, p. 125, 1922.
- Vlasov, V. Thin-walled elastic beams. *Israel program for Scientific Translations*, Jerusalem, 1963.