

## MODELOS NUMERICOS DE VIGAS PRE-TORSIONADAS

**José A. Inaudi, Alan E. Dente y Enzo D. Alancay**

*Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez  
Sársfield 1611, 5000, Córdoba, Argentina, inaudijose@gmail.com, <http://www.efn.uncor.edu>*

**Palabras claves:** frecuencia natural, vibraciones, viga pre-torsionada, elementos finitos, viga continua.

**Resumen.** En este trabajo se desarrollan y comparan modelos de comportamiento dinámico transversal de vigas pre-torsionadas con dependencia arbitraria del ángulo que orienta el tensor de segundos momentos baricéntricos de área de la sección transversal a lo largo de la coordenada longitudinal de la viga. Se aplica el principio de Hamilton en modelos de vigas Euler-Bernoulli para obtener las ecuaciones de movimiento de los campos de desplazamientos transversales, de este tipo de elementos en condiciones de pequeñas curvaturas y rotaciones. Se calculan las frecuencias naturales y modos de vibración del modelo mediante técnicas de separación de variable e integración de las ecuaciones diferenciales de las formas modales en espacio de estado. Además, se desarrolla un análisis comparativo de modos de vibración y frecuencias naturales obtenidos a partir del modelo continuo con los estimados mediante modelos discretos basados en elementos finitos. Como parte final de este trabajo se incluyen ejemplos numéricos haciendo uso del código desarrollado para vigas con distintas dependencias del ángulo de pre-torsión y con distintas propiedades geométricas. Las estimaciones obtenidas se comparan con resultados publicados en trabajos de otros autores.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las vigas pre-torsionadas con secciones transversales de las más variadas formas, se observan en muchas aplicaciones de ingeniería, tales como en los alabes de turbina y compresor, palas de la hélice, rotor de helicópteros, de turbinas eólicas, entre otras. Es por eso de gran importancia para muchos investigadores, quienes han propuesto un variado número de métodos para su estudio. Entre los trabajos más destacados se presentan el de Rosen (1991), quien presentó las investigaciones realizadas durante los últimos cincuenta años respecto al análisis estático, dinámico y de estabilidad en vigas pre-torsionadas. Lin et al. (2001) han estudiado las vibraciones flexurales acopladas de una viga de Timoshenko pre-torsionada no uniforme con condiciones de frontera del tipo elásticas. Dawson (1968) estudió las vibraciones de palas pre-torsionadas mediante el método de Rayleigh-Ritz. Abrate (1995) estudió las vibraciones de modelos de vigas ahusadas pre-torsionadas usando el método de Rayleigh-Ritz. Gupta y Rao (1978) aplicaron el método de los elementos finitos para el estudio de la variación de las frecuencias naturales de modelos de vigas de Timoshenko pre-torsionadas y con doble ahusamiento. Hsu (2009) aplicó el método “*Collocation Spline*” para estudiar la variación de las frecuencias naturales de vigas pre-torsionadas. Yardimoglu y Yildirim (2004) estudiaron modelos de elementos finitos para el análisis de vibraciones de torsión y flexión acopladas para una viga de Timoshenko pre-torsionada con una sección transversal aerodinámica variante. Banerjee (2001) realizó estudios de vigas Euler-Bernoulli pre-torsionadas en vibraciones libres aplicando el método de la rigidez dinámica.

En este trabajo se analiza el caso de una viga pre-torsionada de sección rectangular en vibración libre. En un primer paso se aplica la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y el Principio de Hamilton para su análisis como un sistema dinámico continuo. Se utiliza una técnica que consiste en la descomposición de las curvaturas, que permite formular las ecuaciones de movimiento acopladas de los campos de desplazamiento. Mediante la técnica de separación de variables, la formulación de la ecuación diferencial de los modos de vibración y técnicas numéricas de integración del problema con valores de frontera se obtienen las frecuencias naturales para diferentes casos considerados. Como segundo paso, se realiza un análisis de elementos finitos mediante la discretización del dominio y el ensamble de las matrices de masa y rigidez elementales, para posteriormente resolver el problema de valores propios a nivel modelo estructural para estimar las frecuencias naturales. Finalmente se comparan los valores estimados con los obtenidos por Banerjee (2001) para diferentes casos.

## 2 ECUACION DE MOVIMIENTO Y CONDICIONES DE FRONTERA

El modelo analizado es una viga Euler-Bernoulli pre-torsionada como se muestra en la Figura 1. La obtención de ecuaciones de movimiento a partir del principio de Hamilton involucra el cálculo de las variaciones de la energía cinética y de la energía potencial y la posterior integración por partes de los términos de derivadas parciales de las variaciones de los campos de desplazamiento involucrados.

La hipótesis de Bernoulli de secciones planas y ortogonales a la elástica permite describir la configuración en flexión de la viga con dos campos de desplazamiento  $u_x(z, t)$  y  $u_y(z, t)$ , en dos direcciones ortogonales.

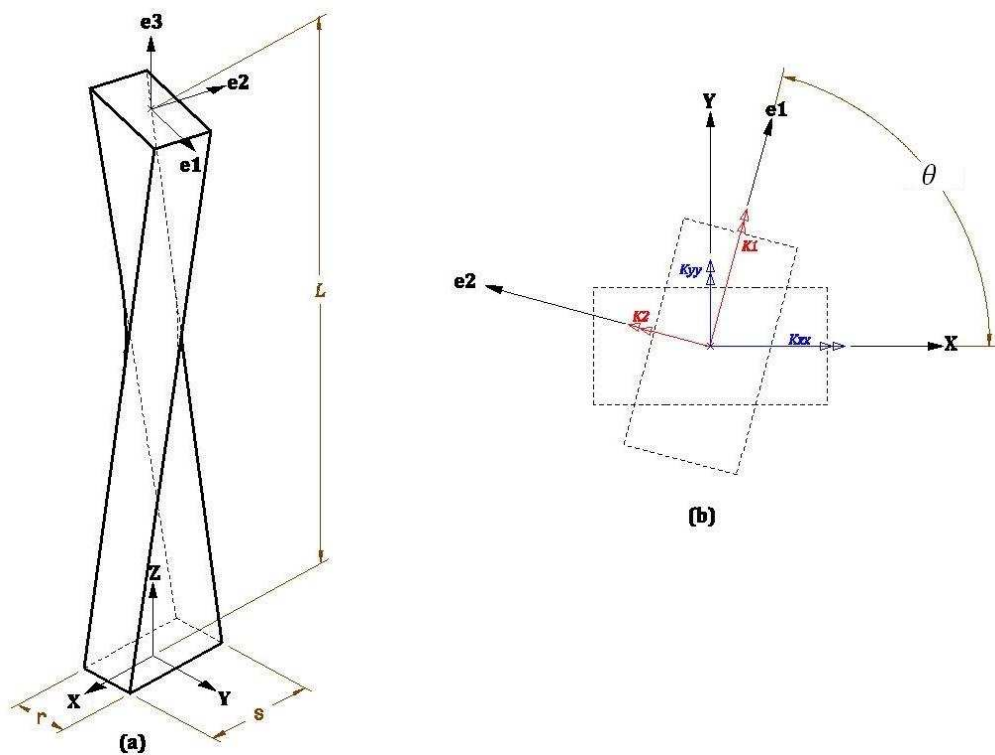


Figura 1. (a) Geometría de viga pre-torsionada. (b) Representación gráfica de curvaturas en sistemas de coordenadas globales y locales.

El principio de Hamilton generalizado (1) expresa que la variación de la diferencia de energía cinética ( $T$ ) y potencial ( $U$ ) más el trabajo de las fuerzas no conservativas ( $W_{nc}$ ), es nula.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \tag{1}$$

Donde  $\delta$  es el operador variacional y se cumple que las variaciones en el tiempo inicial  $t_1$  y el final  $t_2$  del intervalo considerado son nulas para los campos de desplazamiento, es decir:  $\delta u_x(z, t_1) = \delta u_x(z, t_2) = 0$  y  $\delta u_y(z, t_1) = \delta u_y(z, t_2) = 0$ .

Si el sistema no muestra trabajo no conservativo, el principio se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = 0 \tag{2}$$

### 2.1 Energía Potencial del sistema y su variación

La energía potencial de una viga sometida a flexión está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \{ \underline{K} \}^T [I] \{ \underline{K} \} dz = \frac{1}{2} \int_0^L E \{ \underline{k} \}^T \{ \underline{G} \}^T [I] \{ \underline{G} \} \{ \underline{k} \} dz \tag{3}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$  la matriz de segundos momentos de área de la sección en direcciones principales,  $\{ \underline{K} \}$  es el vector de curvaturas en direcciones principales y  $L$  la longitud de la viga.

Considerando deformaciones flexurales de pequeña magnitud, podemos tomar a las curvaturas en el sistema de coordenadas local  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  como una composición de las curvaturas en el sistema de coordenadas global  $\{X, Y, Z\}$ . Es decir que:

$$\{\underline{K}\} = \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \end{Bmatrix} \rightarrow \{\underline{K}\} = [\underline{G}]\{\underline{k}\} \quad (4)$$

$$k_{xx} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad ; \quad k_{yy} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \quad (5)$$

donde  $\theta(z)$  y  $\{k_{xx}, k_{yy}\}$  representan la orientación de los ejes principales de inercia y las curvaturas en el sistema de coordenadas globales  $\{X, Y, Z\}$  respectivamente, de la sección de la viga y  $\{K_1, K_2\}$  representan las curvaturas en el sistema de coordenadas locales  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ .

A continuación se desarrolla la formulación de la ecuación de movimiento para el caso más general de una viga pre-torsionada no uniforme con matriz de segundos momentos de área  $I$  de la sección transversal en las direcciones principales y área  $A$  variables a lo largo de la longitud de la viga. El módulo de elasticidad  $E$  y la densidad  $\rho$  se considerara constantes.

La energía potencial se expresa

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T [I(z)] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \end{Bmatrix} dz \quad (6)$$

A continuación, considerando el término potencial de la ecuación (2), la variación será

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(U_1 + U_2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta U_2 dt \quad (7)$$

Desarrollando cada uno de los términos de la ecuación (7) y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, (5) y (6), se llega a las expresiones del segundo término de la ecuación de Hamilton (2), para los cuales se han enumerado cada uno de sus términos de manera proceder a su análisis ordenado.

Los términos respecto a la dirección principal 1 son:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_1 dt = EI_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[ \overbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \cos^2(\theta) I_1}^{(1')} + \overbrace{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \sin^2(\theta) I_1}^{(2')} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \sin(2\theta) I_1}_{(3')} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \sin(2\theta) I_1}_{(4')} \right] dz \right\} dt \quad (8)$$

Los términos respecto a la dirección principal 2 son:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_2 dt = E \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[ \overbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \sin^2(\theta) I_2}^{(5')} + \overbrace{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \cos^2(\theta) I_2}^{(6')} \right. \right. \\ \left. \left. - \underbrace{\frac{1}{2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \sin(2\theta) I_2}_{(7')} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \left( \delta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \sin(2\theta) I_2}_{(8')} \right] dz \right\} dt \quad (9)$$

Aplicando integración por partes en los términos de las ecuaciones (8) y (9) logramos eliminar la variación de la derivada segunda de los campos de desplazamientos  $u_x$  y  $u_y$ , convirtiendo a estos términos en variaciones de los campos de desplazamiento  $\delta u_x$  y  $\delta u_y$ .

## 2.2 Energía Cinética (T) del sistema y su variación

La energía cinética de una viga sometida a movimientos transversales, despreciando la energía rotacional, está dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial t}, \frac{\partial u_y}{\partial t} \right\} m \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} \end{array} \right\} dz \quad (10)$$

donde  $m = \rho A(z)$  es la masa por unidad de longitud.

Desarrollando la ecuación (10) llegamos a las expresiones de la energía cinética para los dos campos de desplazamiento.

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(z) \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 dz \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(z) \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 dz \quad (12)$$

Realizando un análisis análogo al de la energía potencial, la variación de la energía cinética será

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T_1 + T_2) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta T_2 dt \quad (13)$$

Desarrollando la expresión (13), llegamos al primer término de la ecuación de Hamilton (2).

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_1 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho A(z) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) \delta u_x dz dt \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \rho A \right) \delta u_x dz dt \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T_2 dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho A(z) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) \delta u_y dz dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \rho A \right) \delta u_y dz dt \end{aligned} \quad (15)$$

Al realizar la integración por partes de la variación de la energía cinética y considerando nulas las variaciones para los tiempos inicial y final, aparecen las derivadas segundas respecto al tiempo de las componentes de los campos de desplazamiento.

Agrupando los términos de la expresión de Hamilton respecto de  $\delta u_x$  y  $\delta u_y$ , y teniendo en cuenta que éstas variaciones son arbitrarias, hacemos cumplir la condición de la ecuación (2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (\dots) \delta u_x dz + \int_0^L (\dots) \delta u_y dz + \begin{matrix} \text{términos} \\ \text{restantes} \end{matrix} \Big|_0^L \right\} dt = 0 \quad (16)$$

donde los términos restantes son las condiciones de borde geométricas y naturales del sistema respecto a la dirección 1 son:

$$\begin{aligned} E \left[ - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \cos^2(\theta) I_1 \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right]_0^L &= 0 \\ E \left[ \left( + \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} I_1 \cos^2(\theta) - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} (I_1 \sin(2\theta) \theta' - I_1' \cos^2(\theta)) \right) \delta u_x \right]_0^L &= 0 \\ \frac{E}{2} \left[ - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} I_1 \sin(2\theta) \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right]_0^L &= 0 \\ \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} I_1 \sin(2\theta) + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} (2 \cos(2\theta) I_1 \theta' + \sin(2\theta) I_1') \right) \delta u_x \right]_0^L &= 0 \\ E \left[ - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} I_1 \sin^2(\theta) \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right]_0^L &= 0 \\ E \left[ \left( \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} I_1 \sin^2(\theta) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} (\sin(2\theta) I_1 \theta' + \sin^2(\theta) I_1') \right) \delta u_y \right]_0^L &= 0 \\ \frac{E}{2} \left[ - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} I_1 \sin(2\theta) \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right]_0^L &= 0 \\ \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} I_1 \sin(2\theta) + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} (2 \cos(2\theta) I_1 \theta' + \sin(2\theta) I_1') \right) \delta u_y \right]_0^L &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Con respecto a la dirección 2 son:

$$\begin{aligned}
& E \left[ -\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} I_2 \sin^2(\theta) \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right]_0^L = 0 \\
& E \left[ \left( \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} I_2 \sin^2(\theta) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} (\sin(2\theta) \theta' I_2 + \sin^2(\theta) I_2') \right) \delta u_x \right]_0^L = 0 \\
& \frac{E}{2} \left[ \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} I_2 \sin(2\theta) \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right]_0^L = 0 \\
& \frac{E}{2} \left[ \left( -\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} I_2 \sin(2\theta) - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} (-2 \cos(2\theta) \theta' I_2 - \sin(2\theta) I_2') \right) \delta u_x \right]_0^L = 0 \\
& E \left[ -\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} I_2 \cos^2(\theta) \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right]_0^L = 0 \\
& E \left[ \left( \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} I_2 \cos^2(\theta) - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} (\sin(2\theta) \theta' I_2 - \cos^2(\theta) I_2') \right) \delta u_y \right]_0^L = 0 \\
& \frac{E}{2} \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} I_2 \sin(2\theta) \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right]_0^L = 0 \\
& \frac{E}{2} \left[ \left( -\frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} I_2 \sin(2\theta) + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} (-2 \cos(2\theta) \theta' I_2 - \sin(2\theta) I_2') \right) \delta u_y \right]_0^L = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Finalmente obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en vibraciones libres para una viga pre-torsionada no-uniforme.

$$\begin{aligned}
& \alpha_{4x} \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \alpha_{3x} \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} + \alpha_{2x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \alpha_{4y} \frac{\partial^4 u_y}{\partial z^4} + \alpha_{3y} \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} + \alpha_{2y} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \dots \\
& \quad + \rho A \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \\
& \beta_{4y} \frac{\partial^4 u_y}{\partial z^4} + \beta_{3y} \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} + \beta_{2y} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \beta_{4x} \frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \beta_{3x} \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^3} + \beta_{2x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \dots \\
& \quad + \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Los coeficientes  $\{\alpha_{4x}, \alpha_{3x}, \alpha_{2x}, \alpha_{4y}, \alpha_{3y}, \alpha_{2y}, \beta_{4y}, \beta_{3y}, \beta_{2y}, \beta_{4x}, \beta_{3x}, \beta_{2x}\}$  son dependientes del ángulo de pre-torsión, de los segundos momentos de área y sus derivadas respectivamente, para el caso de una viga no-uniforme. Se puede observar que las expresiones de los mismos se simplificarán al tomar el caso de una viga uniforme con variación lineal del ángulo de pre-torsión.

A continuación se muestran los coeficientes en su expresión general:

$$\begin{aligned}
\alpha_{4x} &= (\sin^2(\theta) I_1 + \cos^2(\theta) I_2) E \\
\alpha_{3x} &= [\sin(2\theta) \theta' (-I_1 + I_2) + \cos^2(\theta) I_1' - \sin^2(\theta) I_2'] 2E \\
\alpha_{2x} &= [(-I_1 + I_2)(2 \cos(2\theta) (\theta')^2 + \sin(2\theta) \theta'') + 2 \sin(2\theta) \theta' (-I_1' + I_2') \\
&\quad + \cos^2(\theta) I_1'' + \sin^2(\theta) I_2''] E \\
\alpha_{4y} &= (I_1 - I_2) \sin(2\theta) \frac{E}{2} \\
\alpha_{3y} &= [(I_1 - I_2) 2 \cos(2\theta) \theta' - \sin(2\theta) (-I_1' + I_2')] E \\
\alpha_{2y} &= [(-4 \sin(2\theta) (\theta')^2 + 2 \cos(2\theta) \theta'') (I_1 - I_2) + 4 \cos(2\theta) \theta' (I_1' - I_2') \\
&\quad + \sin(2\theta) (I_1'' - I_2'')] \frac{E}{2}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{4y} &= (\sin^2(\theta) I_1 + \cos^2(\theta) I_2) E \\
\beta_{3y} &= [\sin(2\theta) \theta' (I_1 - I_2) + \sin^2(\theta) I_1' + \cos^2(\theta) I_2'] 2E \\
\beta_{2y} &= [(I_1 - I_2)(2 \cos(2\theta) (\theta')^2 + \sin(2\theta) \theta'') + 2 \sin(2\theta) \theta' (I_1' - I_2') \\
&\quad + \sin^2(\theta) I_1'' + \cos^2(\theta) I_2''] E \\
\beta_{4x} &= (I_1 - I_2) \sin(2\theta) \frac{E}{2} \\
\beta_{3x} &= [(I_1 - I_2) 2 \cos(2\theta) \theta' + \sin(2\theta) (-I_1' + I_2')] E \\
\beta_{2x} &= [(-4 \sin(2\theta) (\theta')^2 + 2 \cos(2\theta) \theta'') (I_1 - I_2) + 4 \cos(2\theta) \theta' (I_1' - I_2') \\
&\quad - \sin(2\theta) (I_1'' - I_2'')] \frac{E}{2}
\end{aligned} \tag{21}$$

Considerando una viga uniforme y con  $\theta' = cte$  los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se reducen a expresiones más simples en donde  $I_1' = I_1'' = I_2' = I_2'' = 0$ . Si se plantean las ecuaciones en un sistema de ejes locales, tomando una viga uniforme y la variación del ángulo de pretorsión constante ( $\theta' = cte$ ), se verifican las expresiones de las ecuaciones de movimiento propuestas por Banerjee (2001).

De las ecuaciones (17) y (18) se obtienen las siguientes condiciones de borde para el caso de una viga empotrada-libre:

$$\begin{aligned}
u_x(0, t) &= 0 \\
u_y(0, t) &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial z}(0, t) &= 0 \\
\frac{\partial u_y}{\partial z}(0, t) &= 0
\end{aligned} \tag{23}$$



$$\left[ EI_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]_{z=L} = 0 \quad (24)$$

$$\left[ EI_2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right]_{z=L} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]_{z=L} = 0 \quad (25)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[ EI_2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right]_{z=L} = 0$$

### 3 ANALISIS MODAL

La ecuación de movimiento, las condiciones de frontera y las condiciones iniciales forman lo que se conoce como problema de valores de frontera el cual puede ser resuelto usando el método de separación de variables. Expresando  $u_x(z, t)$  y  $u_y(z, t)$

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \varphi_x(z)\eta(t) \\ u_y(z, t) &= \varphi_y(z)\eta(t) \end{aligned} \quad (26)$$

y reemplazando estas soluciones en la ecuación de movimiento, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_{4x} \varphi_x^{iv}(z) + \alpha_{3x} \varphi_x'''(z) + \alpha_{2x} \varphi_x''(z) + \alpha_{4y} \varphi_y^{iv}(z) + \alpha_{3y} \varphi_y'''(z) + \alpha_{2y} \varphi_y''(z) - \dots \\ - \rho A \varphi_x(z) \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \beta_{4y} \varphi_y^{iv}(z) + \beta_{3y} \varphi_y'''(z) + \beta_{2y} \varphi_y''(z) + \beta_{4x} \varphi_x^{iv}(z) + \beta_{3x} \varphi_x'''(z) + \beta_{2x} \varphi_x''(z) - \dots \\ - \rho A \varphi_y(z) \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Expresamos ahora el sistema ecuaciones (27) y (28) en formato de espacio de estado para luego buscar una solución numérica al problema con condiciones de frontera. Para ello definimos un vector de estado  $\underline{v}(z)$ , que contiene las funciones  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  y las correspondientes derivadas hasta el orden tres. Las dos ecuaciones diferenciales (27) y (28) se expresan en formulación de espacio de estado como

$$\underline{v}' = [A(z)] \underline{v} \quad (29)$$

Una vez que tenemos la ecuación en formato de espacio de estado y al ser la matriz  $[A(z)]$  dependiente de la coordenada  $z$ , podemos buscar las formas modales mediante integración numérica (utilizando los métodos de Runge-Kutta) para el problema de condiciones de frontera.

Teniendo en cuenta que se deben cumplir las condiciones de frontera, evaluamos el vector de espacio de estado para  $z = 0$ .

$$\underline{v}_\varphi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_x''(0) \\ \varphi_x'''(0) \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_y''(0) \\ \varphi_y'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

En la ecuación (30) observamos que tenemos un problema de condiciones de frontera donde no conocemos los valores de los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , ni el valor de la frecuencia natural  $\omega$  del modo analizado.

Como la ecuación diferencial es lineal, podemos expresar al vector de estado como una combinación lineal de los parámetros  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  y sus correspondientes soluciones asociadas para condiciones nulas en los demás coeficientes

$$\underline{v}_\varphi(0) = \underline{v}_1 C_1 + \underline{v}_2 C_2 + \underline{v}_3 C_3 + \underline{v}_4 C_4 \quad (31)$$

A continuación, integramos numéricamente por separado el problema con cada una de las condiciones  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$ ,  $\underline{v}_3$  y  $\underline{v}_4$ , de la cual obtendremos un conjunto de condiciones de salidas a las cual llamaremos soluciones base  $\gamma_1(z)$ ,  $\gamma_2(z)$ ,  $\gamma_3(z)$  y  $\gamma_4(z)$ , respectivamente.

Entonces el vector de estado discretizando la variable  $z$  en los puntos de muestreo de  $\Delta z$  constante quedaría expresado de la siguiente forma

$$\underline{v}_\varphi(z) = [\gamma_1(z)]C_1 + [\gamma_2(z)]C_2 + [\gamma_3(z)]C_3 + [\gamma_4(z)]C_4 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} [\gamma_1(z)] &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \gamma_{1n,3} & \gamma_{1n,4} & \dots & \dots & \gamma_{1n,7} & \gamma_{1n,8} \end{bmatrix} \\ [\gamma_2(z)] &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \gamma_{2n,3} & \gamma_{2n,4} & \dots & \dots & \gamma_{2n,7} & \gamma_{2n,8} \end{bmatrix} \\ [\gamma_3(z)] &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \gamma_{3n,3} & \gamma_{3n,4} & \dots & \dots & \gamma_{3n,7} & \gamma_{3n,8} \end{bmatrix} \\ [\gamma_4(z)] &= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \gamma_{4n,3} & \gamma_{4n,4} & \dots & \dots & \gamma_{4n,7} & \gamma_{4n,8} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

donde los  $\gamma_{kij}$  son los elementos de las solución base  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) de la fila  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y columna  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ).

Como en el otro extremo de la viga ( $z = L$ ) se deben cumplir las condiciones de frontera naturales. Del vector de estado  $\underline{v}_\varphi(L)$  podemos expresar la condición de frontera tomando los

últimos elementos ( $\gamma_{k_{n,j}}$ ) de las columnas correspondientes al de corte y momento ( $j = 3,4,7$  y 8) de la solución base:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1_{n3}} \\ \gamma_{1_{n4}} \\ \gamma_{1_{n7}} \\ \gamma_{1_{n8}} \end{bmatrix} C_1 + \begin{bmatrix} \gamma_{2_{n3}} \\ \gamma_{2_{n3}} \\ \gamma_{2_{n3}} \\ \gamma_{2_{n3}} \end{bmatrix} C_2 + \begin{bmatrix} \gamma_{3_{n3}} \\ \gamma_{3_{n4}} \\ \gamma_{3_{n7}} \\ \gamma_{3_{n8}} \end{bmatrix} C_3 + \begin{bmatrix} \gamma_{4_{n3}} \\ \gamma_{4_{n4}} \\ \gamma_{4_{n7}} \\ \gamma_{4_{n8}} \end{bmatrix} C_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Esta expresión permite definir el problema de valores propios para el cálculo de frecuencias naturales del modelo:

$$[B_c(\omega)] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Vemos que las columnas de la matriz  $[B_c]$  son los elementos de la última fila de la solución base. A esta matriz la denominamos matriz de condiciones de frontera.

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución distinta de la trivial, esta matriz debe ser singular. Es por eso que la existencia de una solución para una forma de vibración natural requiere que

$$\det[B_c(\omega)] = 0 \quad (36)$$

Esta ecuación posee infinitas raíces, y puede ser resuelta de manera numérica para un número deseado de frecuencias naturales.

## 4 DISCRETIZACION DEL MODELO CONTINUO Y METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

### 4.1 Método de los Elementos Finitos

El MEF se basa en la aproximación del sistema continuo mediante la representación de un número finito de elementos discretos en los cuales los campos de desplazamientos se aproximan mediante funciones de interpolación (o de forma) suaves.

A continuación desarrollamos un elemento finito de viga utilizando los polinomios cúbicos estándar de vigas de Bernoulli para los desplazamientos en las direcciones  $x$  e  $y$ , se obtienen las matrices de masa y rigidez del elemento para las definiciones de energía cinética y potencial definidas en las secciones anteriores, y se ensamblan matrices de masa y rigidez del modelo estructural discreto teniendo en cuenta la continuidad geométrica (compatibilidad) y las condiciones de borde naturales (equilibrio de fuerzas y momentos) de la estructura para distintas discretizaciones o mallados del dominio estructural.

La figura a continuación (Figura 2) muestra la definición de los desplazamientos y rotaciones nodales utilizadas en la interpolación del elemento finito desarrollado. El elemento finito utiliza para representar los desplazamientos transversales, ocho grados de libertad, denominados  $u_i(t)$ ,  $i = 1,2,\dots,8$ .

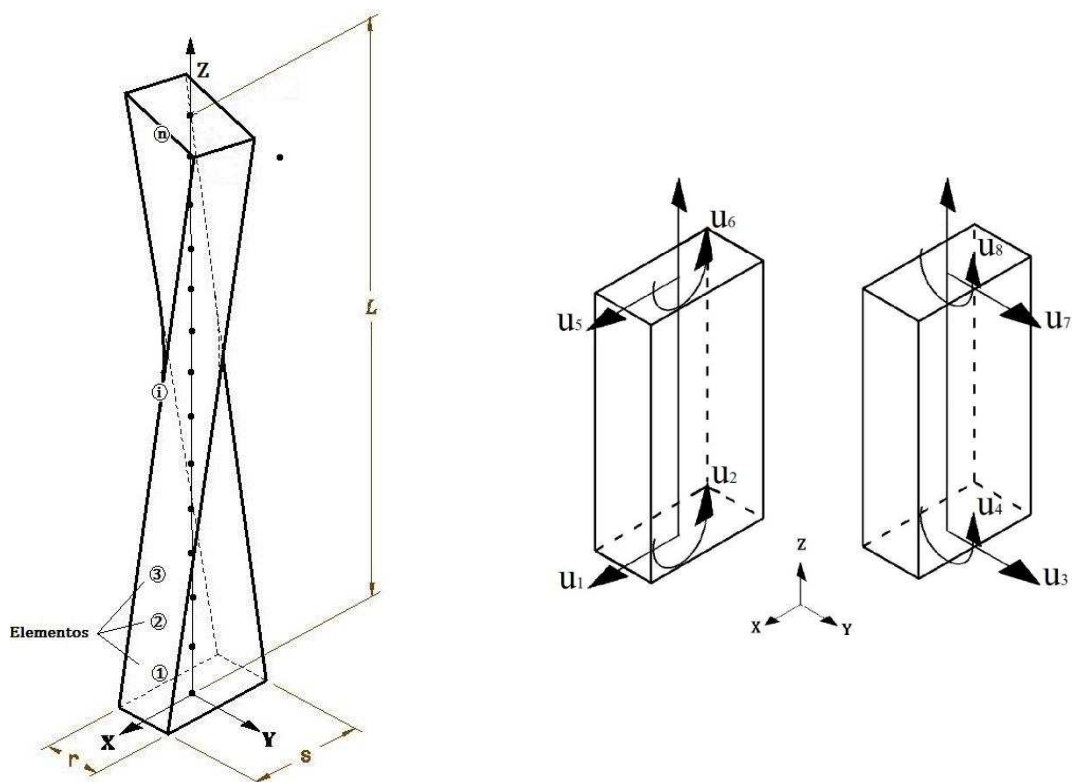


Figura 2. Diagrama esquemático de una viga pre-torsionada aproximada mediante un número finito de elementos de viga.

## 4.2 Matrices Elementales

La ecuación de movimiento (19) y las condiciones de frontera naturales pueden ser cumplimentadas mediante la adopción de funciones de forma cúbicas  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$  para los elementos de viga de la Figura 2.

$$u_x(z, t) = N_1(z) u_1 + N_2(z) u_2 + N_3(z) u_5 + N_4(z) u_6 \quad (37)$$

$$u_y(z, t) = N_1(z) u_3 + N_2(z) u_4 + N_3(z) u_7 + N_4(z) u_8 \quad (38)$$

Donde

$$\begin{aligned} N_1(z) &= 1 - 3(z/L)^2 + 2(z/L)^3 \\ N_2(z) &= z - 2z^2/L + z^3/L^2 \\ N_3(z) &= 3(z/L)^2 - 2(z/L)^3 \\ N_4(z) &= -z^2/L + z^3/L^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Definiendo la matriz  $\mathbf{N}$  como

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

y reemplazando la matriz de funciones de forma (40) en las ecuaciones de la energía potencial (6) y cinética (10), podemos obtener las matrices de rigidez y de masa elementales

(de dimensión ocho por ocho). Estas son calculadas mediante integración numérica a partir de sus expresiones:

$$K_e = \int_0^L \{\mathbf{N}''\}^T [\mathbf{EI}_\theta] \{\mathbf{N}''\} dz \quad (41)$$

$$M_e = \int_0^L m \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dz \quad (42)$$

Donde

$$[\mathbf{EI}_\theta] = \begin{bmatrix} EI_1 \cos^2 \theta + EI_2 \sin^2 \theta & (EI_1 - EI_2) \sin \theta \cos \theta \\ (EI_1 - EI_2) \sin \theta \cos \theta & EI_1 \sin^2 \theta + EI_2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (43)$$

## 5 ALCANCE DE LA TEORIA

Vale la pena destacar las hipótesis asumidas para la modelación. En primer lugar, la viga propuesta utiliza el modelo de Euler-Bernoulli, por lo cual no se consideran las deformaciones por corte ni la inercia rotacional de las secciones de la viga, y las dimensiones de la sección transversal se asumen pequeñas en comparación a la longitud de la viga (vigas esbeltas).

El desarrollo de las ecuaciones de movimiento se realiza para el caso de una viga cuya matriz de segundos momentos de área  $I$  de la sección transversal en las direcciones principales y el área  $A$  son variables a lo largo de la longitud de la viga ( $z$ ).

La variación del ángulo  $\theta$  a lo largo de la viga es arbitraria con la limitación de ser diferenciable. A continuación se elige una variación del ángulo de pre-torsión del tipo lineal para realizar desarrollar ejemplos numéricos comparables con resultados disponibles en la bibliografía y se asume que se presenta únicamente acoplamiento entre los desplazamientos flexurales y no existen acoplamientos con deformaciones extensionales y/o torsionales. Además, las secciones transversales de la viga no se alabeen por hipótesis de viga Euler-Bernoulli. Esta hipótesis es válida y arroja buenos resultados cuando las vigas pre-torsionadas en estudio poseen secciones transversales con doble simetría. No así para vigas más complejas tales como palas de aerogeneradores o alabes de turbinas, en las cuales el efecto del acoplamiento de las deformaciones flexurales, torsionales y extensionales es importante.

## 6 RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección se comparan los resultados obtenidos por Banerjee (2001) y Rosen et al. (1987), quienes estiman las frecuencias naturales de una viga uniforme empotrada-libre con ángulo de pre-torsión en el empotramiento nulo y en el otro extremo  $\theta = 2\pi/9$  [rad]. Las propiedades estructurales y valores geométricos asumidos son los siguientes: (i)  $EI_1 = 2869.7$  [ $Nm^2$ ], (ii)  $EI_2 = 57393.0$  [ $Nm^2$ ], (iii)  $m = 34.47$  [ $kg/m$ ] y (iv)  $L = 3.048$  [ $m$ ].

Las primeras cinco frecuencias naturales de la viga se presentan en la Tabla 1. Aquí se plantea el análisis del sistema dinámico continuo y discreto, donde en esta última se considera al sistema discretizado en una malla de 20 elementos.

Se puede observar que las estimaciones obtenidas en este trabajo son similares a las obtenidas por Banerjee (2001) y Rosen et al. (1987).

Número de frecuencia	Frecuencias naturales [ <i>rad/s</i> ]			
	$\theta = 2\pi/9$ [ <i>rad</i> ]			
	Sist. Continuo	MEF	Banerjee (2001)	Rosen et al. (1987)
1	3.472	3.4719	3.47173	3.47257
2	13.341	13.3415	13.3465	13.2740
3	25.166	25.1672	25.1707	25.2700
4	56.396	56.3698	56.3716	56.3009
5	102.973	103.2647	103.263	103.200

Tabla 1: Frecuencias naturales de una viga pre-torsionada empotrada-libre

A continuación, se propone determinar la influencia de la pre-torsión sobre las frecuencias naturales de la viga en estudio. Para ello se calculan las primeras cinco frecuencias naturales para diferentes valores de ángulo de pre-torsión  $\theta$  del extremo libre de la viga manteniendo constantes los demás parámetros. En las Tablas 2, 3 y 4 se presentan los resultados para valores de  $\theta = \pi/6$ ,  $\pi/12$  y  $0$  [*rad*], respectivamente.

Número de frecuencia	Frecuencias naturales [ <i>rad/s</i> ]		
	$\theta = \pi/6$ [ <i>rad</i> ]		
	Sist. Continuo	MEF	Banerjee (2001)
1	3.464	3.4637	3.464
2	14.058	14.0579	14.06
3	23.837	23.8381	23.84
4	58.019	58.0154	58.01
5	100.681	100.759	100.8

Tabla 2: Frecuencias naturales de una viga pre-torsionada empotrada-libre para  $\theta = \pi/6$  [*rad*]

Número de frecuencia	Frecuencias naturales [ <i>rad/s</i> ]		
	$\theta = \pi/12$ [ <i>rad</i> ]		
	Sist. Continuo	MEF	Banerjee (2001)
1	3.456	3.4558	3.456
2	15.013	15.0128	15.01
3	22.276	22.2765	22.27
4	59.886	59.8882	59.89
5	97.828	97.8597	97.86

Tabla 3: Frecuencias naturales de una viga pre-torsionada empotrada-libre para  $\theta = \pi/12$  [*rad*]

Número de frecuencia	Frecuencias naturales [rad/s]		
	$\theta = 0[rad]$		
	Sist. Continuo	MEF	Banerjee (2001)
1	3.453	3.4532	3.453
2	15.443	15.4429	15.44
3	21.64	21.6407	21.64
4	60.585	60.5955	69.59
5	96.778	96.7794	96.78

Tabla 4: Frecuencias naturales de una viga pre-torsionada empotrada-libre para  $\theta = 0[rad]$

El método de análisis empleado nos permite converger hacia la solución del modelo de una viga Euler-Bernoulli sin ángulo de torsión, obteniendo frecuencias naturales de un sistema con vibraciones flexurales desacopladas en cada dirección principal de inercia.

Los siguientes gráficos (Ver Figura 3 y Figura 4) muestran las frecuencias naturales calculadas con diferentes ángulos de pre-torsión por método de viga continua y MEF.

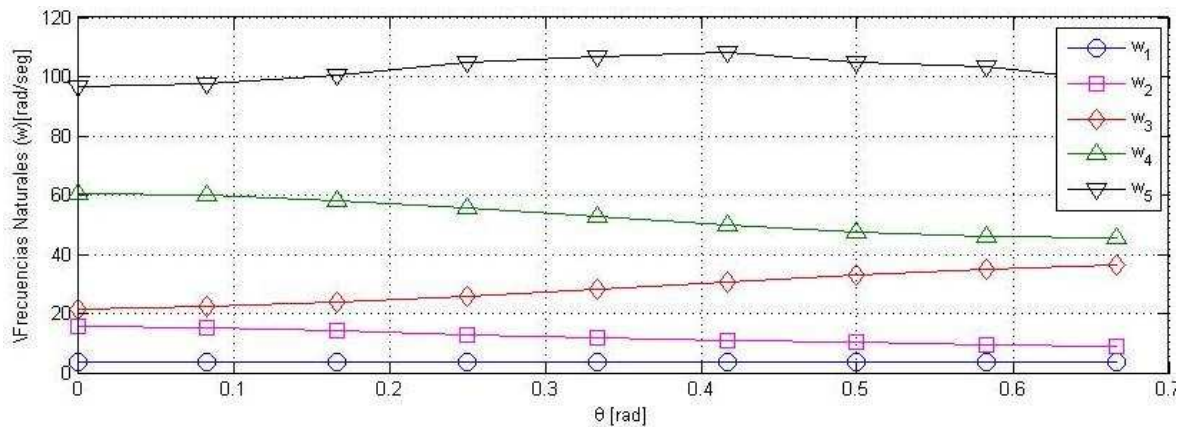


Figura 3. Frecuencias naturales calculadas por el método de sistema continuo para una viga empotrada-libre con diferentes ángulos de pre-torsión.

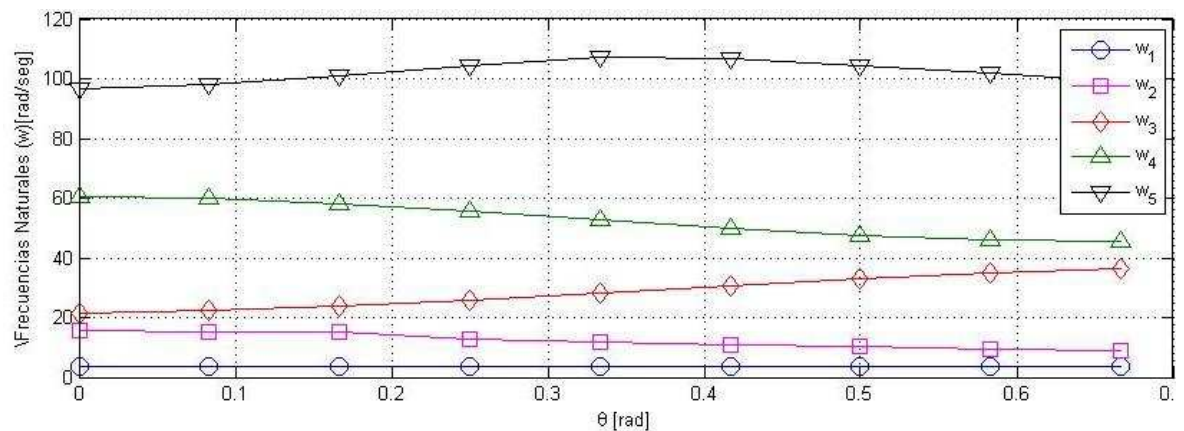


Figura 4. Frecuencias naturales calculadas por MEF de una viga empotrada-libre con diferentes ángulos de pre-torsión.

A partir de las Figuras 3 y 4 se puede observar el crecimiento de la primera y tercera

frecuencia natural cuando el ángulo de pre-torsión total aumenta. Sucede lo contrario con respecto a la segunda y cuarta frecuencia natural, las cuales disminuyen. Con relación a la quinta frecuencia natural, ésta aumenta hasta tomar un valor máximo para un ángulo de pre-torsión total de  $75^\circ$  y luego disminuye.

## 7 CONCLUSIONES

Aplicando el principio de Hamilton se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para una viga pre-torsionada no-uniforme en vibraciones libres, para luego, mediante un análisis modal del modelo continuo estándar, obtener las frecuencias naturales. Posteriormente, se aplicó el MEF con lo cual se validaron los resultados obtenidos en la modelación como sistema continuo. Las frecuencias naturales obtenidas considerando una viga uniforme, se compararon con los obtenidos por otros autores.

En comparación con el desarrollo del autor Banerjee (2001), en este trabajo se han considerados los términos de segundo orden de la función que define al ángulo de pre-torsión y la variaciones del área y de la matriz de los segundos momentos área. Esto conduce a una expresión más general de las ecuaciones de movimiento que permite analizar casos con geometrías de pre-torsión más complejas.

Se observa la influencia del ángulo de pre-torsión sobre las frecuencias naturales y se compara el comportamiento de las mismas respecto al ángulo de pre-torsión total con los obtenidos por el autor Hsu (2009). Los resultados numéricos obtenidos validan la aplicabilidad del método empleado.

## REFERENCIAS

- Abrate, S., 1995. Vibration of non-uniform rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4), pp.703–716.
- Banerjee, J.R., 2001. Free vibration analysis of a twisted beam using the dynamic stiffness method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(38-39), pp.6703–6722.
- Dawson, B.B., 1968. Coupled bending-bending vibrations of pre-twisted cantilever blading treated by the Rayleigh-Ritz energy method. *Journal Mechanical Engineering Science*, 10(5), pp.381–388.
- Gupta, R.S. & Rao, S.S., 1978. Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 56(2), pp.187–200.
- Hsu, M.H., 2009. Vibration analysis of pre-twisted beams using the spline collocation method. *Journal of Marine Science and Technology*, 17(2), pp.106–115.
- Lin, S.M., Wang, W.R. & Lee, S.Y., 2001. The dynamic analysis of nonuniformly pretwisted Timoshenko beams with elastic boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(10), pp.2385–2405.
- Rosen, A., 1991. Structural and dynamic behavior of pretwisted rods and beams. *Applied Mechanics Reviews*, 44(12), p.483.
- Rosen, A., Loewy, R.G. & Mathew, B., 1987. Use of twisted principal coordinates and non-physical coordinates in blade analysis. *Vertica*, 11, pp.541–572.
- Yardimoglu, B. & Yildirim, T., 2004. Finite element model for vibration analysis of pre-twisted Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 273(4-5), pp.741–754.