

ELEMENTOS DE VIGAS EMBEBIDOS EN SÓLIDOS CON SECCIÓN RECTANGULAR Y DEFORMACIONES DE CORTE PARA EL MODELADO DE PILOTES A CARGA LATERAL

Diego F. Turello^{a,d}, Federico Pinto^b y Pablo J. Sanchez^{c,d}

^aFCEyN UNC, IDIT UNC-CONICET. CP:5000, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina.
diegoturello@gmail.com.ar

^bFCEyN UNC, IDIT UNC-CONICET. CP:5000, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina.
fpinto@unc.edu.ar

^cCIMEC UNL-CONICET, Güemes 3450, CP: 3000 Santa Fe, Argentina. psanchez@intec.unl.edu.ar

^dGIMNI UTN-FRSF, Lavaisse 610, CP: 3000 Santa Fe, Argentina.

Palabras Clave: elementos de vigas embebidos, deformaciones de corte, secciones rectangulares, pilotes, carga lateral

Resumen. En los últimos años se desarrolló el concepto de elementos de vigas embebidos en sólidos, en los cuales los elementos de vigas interactúan con los elementos de sólido a través de restricciones cinemáticas que se verifican en la superficie de interacción entre ambos. Estos elementos tienen la capacidad de modelar la respuesta mecánica acoplada entre el sólido y la viga, sin la necesidad de estructurar las mallas alrededor de las vigas para forzar la compatibilidad entre elementos con diferente aproximación cinemática. En este trabajo se presentan dos aspectos que son de interés; el primero es la introducción de una aproximación para los elementos de vigas que tiene en cuenta las deformaciones de corte a través de un modelo de vigas tipo Timoshenko. Se compara la respuesta obtenida con este modelo frente a elementos de viga tipo Euler-Bernoulli, para estudiar la contribución de las deformaciones de corte en pilotes cargados lateralmente. El segundo aspecto de interés, es generalizar las secciones transversales implementadas en los modelos de vigas, incorporando a la clásica sección circular, la cuadrada y la rectangular. Para ello es necesario definir nuevas funciones de mapeo entre la cinemática de vigas 1D y de sólidos 3D. Finalmente, se ilustra el desempeño numérico de la formulación presentada.

1. INTRODUCCIÓN

En la práctica de la ingeniería geotécnica es frecuente encontrar el caso donde es necesario evaluar la respuesta acoplada entre los pilotes y el suelo, lo que hace necesaria la modelación conjunta de los sub-dominios. Este problema fue abordado desde diferentes ópticas, lo cual generó diversos modelos simplificados de análisis, i.e., modelos de vigas sobre lecho elástico (Winkler, 1867), curvas de transferencia de carga (Reese et al., 1974) (Matlock y Ripperger, 1956), elementos de contorno (Pinto y Prato, 2006), etc. En estos modelos se incorpora la interacción suelo-estructura de forma simplificada, lo cual lleva a que estos no sean capaces de capturar aspectos importantes de la fenomenología de la interacción suelo-estructura. Si bien el modelado mediante el método de elementos finitos (MEF) utilizando elementos de sólidos 3D para ambos dominios es una opción válida para modelar este tipo de problemas, pudiéndose incorporar diversas complejidades sobre los mismos, los modelos que se consiguen son costosos desde el punto de vista computacional. En los últimos años Sadek y Shahrou (2004) desarrollaron elementos de vigas embebidos (EVE) en sólidos con el objeto de reducir los grados de libertad (GDL) necesarios para representar adecuadamente la física y las interacciones presentes en estos problemas. Estos elementos de vigas embebidos vinculan dos elementos finitos de diferente cinemática (i.e., de vigas y de sólidos) a través de establecer la compatibilidad de desplazamientos entre ambos. Además, el uso de teorías técnicas para representar el dominio de vigas (que modelan tanto la infraestructura como la superestructura) reduce notablemente los GDL necesarios, lo que se traduce en un ahorro computacional. Otra gran ventaja del método es que la malla de los elementos de vigas no impone una restricción a la malla de sólidos, es decir que no se necesita estructurar la malla de sólidos de forma especial alrededor de los pilotes. En los elementos embebidos originales propuestos por Sadek y Shahrou (2004) la compatibilidad de desplazamientos se establece sólo a nivel del problema discreto, donde se establece la equivalencia entre los desplazamientos nodales de vigas y los desplazamientos nodales de sólidos a través de las clásicas funciones de interpolación en el sólido. El establecimiento de las ecuaciones de compatibilidad de forma *ad-hoc* en el problema discreto y no en función de un planteo mecánico consistente genera un problema mal condicionado, en el cual la respuesta mecánica depende del tamaño de malla (Turello y Pinto, 2011). En el trabajo de Engin et al. (2007) se propone una solución *ad-hoc* para la falta de convergencia, donde se propone que los puntos de Gauss del dominio de sólidos situados en el interior del dominio de vigas sean forzados a permanecer en régimen elástico. Según el trabajo de Dao (2011), en el código comercial Plaxis los pilotes embebidos se modelan de esta forma. En ese mismo trabajo se muestra la capacidad de los elementos embebidos para recuperar los desplazamientos en el sólido cuando el tamaño de los elementos de sólido son menores al diámetro del pilote, lo cual es crucial al momento de modelar correctamente la interacción suelo-estructura.

Para solucionar la falta de convergencia mostrada por los elementos de vigas originales propuestos por Sadek y Shahrou, Turello et al. (2016) propusieron y desarrollaron un elemento de viga embebido (EVE) dotado de una superficie de interacción finita entre el sólido y la viga, de forma tal que la compatibilidad cinemática se plantee sobre esta superficie. En este modelo se adopta adherencia perfecta entre el sólido y el pilote. Al elegir convenientemente la interpolación de las fuerzas de contacto se consigue condensar el elemento de viga en los GDL de sólidos, lo que permite una reducción extra en los GDL del problema para el caso elástico. Como alternativa al modelo EVE con adherencia perfecta entre el suelo y el pilote, Turello et al. (2015) propusieron una interfaz no-lineal para acoplar a los EVEs con superficie de interacción, la cual modela de forma constitutiva la no-linealidad que se desarrolla en una zona cercana al

pilote.

Otro punto que no ha sido completamente acabado en la práctica es la inclusión de secciones transversales diferentes a la circular (ver Hirai (2015) y Choi et al. (2015)), donde por ejemplo se suele transformar las secciones cuadradas o rectangulares en secciones circulares de área equivalente.

En este trabajo se presenta la expansión de la formulación EVE, previamente propuesta por los autores, para incluir secciones transversales rectangulares. Para ello es necesario definir nuevas funciones de mapeo entre la cinemática de vigas y de sólidos.

Otro punto a evaluar es la incorporación de deformaciones de corte en los elementos de vigas, formulando para ello vigas de Timoshenko frente a las implementadas en trabajos anteriores de Euler-Bernoulli y comparar los resultados.

Finalmente se ilustra el desempeño numérico de estas formulaciones.

2. FORMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS EVE

2.1. Nomenclatura

A través de este trabajo las letras minúsculas y mayúsculas se usan para identificar objetos a nivel elemental o global (ensamblado), respectivamente. Las letras en negrita se utilizan para definir vectores y matrices. El tipo de caligrafía itálica se asocia a cinemática de vigas, mientras que el tipo normal a cinemática convencional de sólidos. Finalmente, el símbolo de sombrero sobre las variables implica que se trata de variables nodales y el símbolo de barra sobre las variables implica que se trata de variaciones cinemáticamente admisibles de las variables.

2.2. Resumen de la formulación EVE

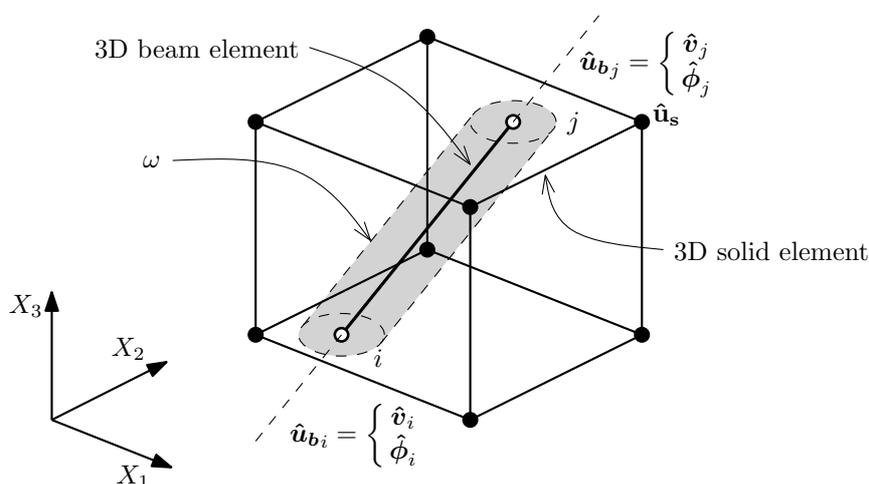


Figura 1: Esquema del elemento de viga embebido en sólidos.

En esta sección se presentan los puntos más importantes de la formulación básica propuesta para el elemento 3D de viga embebido en sólido (Turello et al., 2016), que incorpora la superficie de interacción, ω , entre el pilote y el suelo (Figura 1).

La formulación propuesta por lo autores consigue condensar la matriz de rigidez de los elementos de vigas en los GDL de los elementos de sólidos, a través de restricciones cinemáticas que se verifican en la superficie de interacción, donde se establece la compatibilidad cinemática entre los campos de desplazamientos del sólido y de la viga, \mathbf{u}_s y \mathbf{u}_b , respectivamente. Esta su-

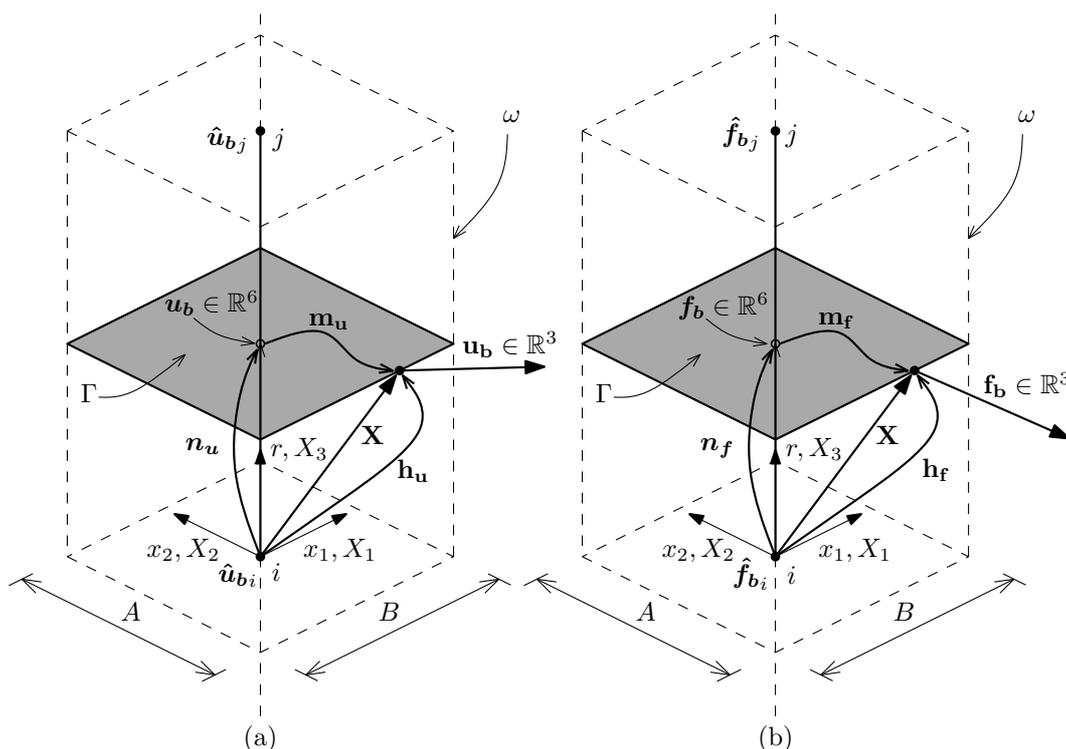


Figura 2: Esquema de las funciones de mapeo (a) h_u y (b) h_f en el elemento de viga embebido con sección transversal rectangular.

perficie de interacción, se incorpora en el modelo para representar adecuadamente la mecánica del problema y evitar la falta de convergencia que exhibe el modelo EVE propuesto por Sadek y Shahrou (2004) cuando la malla es refinada. Además, se establece la equivalencia entre las fuerzas de interacción definidas sobre la superficie de interacción y las definidas sobre el eje de la viga.

Como primer paso en la definición de la formulación EVE con superficie de interacción, debemos definir funciones de mapeo que expresen los campos de desplazamiento 3D de vigas sobre la superficie de interacción, u_b , en función del campo de desplazamientos en el eje de la viga, u_b . Además es necesario definir el mapeo que vincule las fuerzas de interacción en la superficie de interacción, f_b , con las cargas distribuidas en el eje de la viga, f_b .

Una vez condensada la matriz de rigidez de los elementos de vigas, se halla la matriz completa del los elementos de vigas embebidos, adicionando la rigidez que aporta el elemento de sólido. Luego el problema se resuelve para los GDL de sólidos y la respuesta en los GDL de vigas se obtienen en un paso posterior de post-proceso.

Como se explica en Turello et al. (2016) los vectores de cargas externas sobre las vigas se deben transformar a una forma equivalente en GDL de sólidos, que luego se ensambla con el vector estándar de cargas sobre el dominio de sólidos.

3. DISCRETIZACIÓN Y FUNCIONES DE MAPEO PARA LA SECCIÓN RECTANGULAR

El campo 3D de desplazamientos del sólido, u_s , se expresa a través de las funciones de interpolación convencionales, n_s , en términos de las coordenadas espaciales del punto, X , y

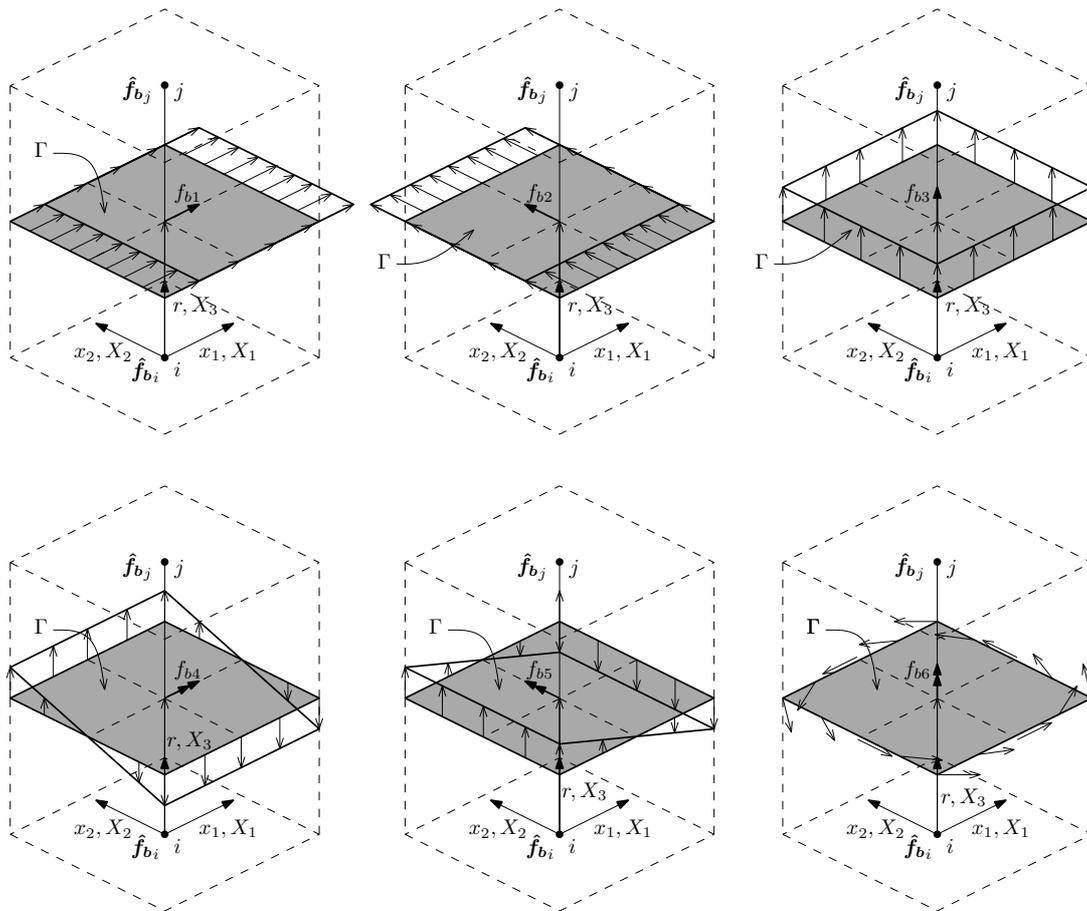


Figura 3: Fuerzas de interacción para los diferentes patrones de cargas en el pilote de sección rectangular.

desplazamientos nodales, $\hat{\mathbf{u}}_s$, como:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{X}) = \mathbf{n}_s(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}_s \tag{1}$$

El campo 3D de desplazamientos de la viga sobre la superficie de interacción, \mathbf{u}_b , (Figura 2) se expresa en función de los desplazamientos nodales de la viga en el eje de la misma, $\hat{\mathbf{u}}_b$ (desplazamientos y rotaciones), a través de la función de mapeo \mathbf{h}_u , la cual está compuesta por: i) una función \mathbf{n}_u que interpola, a lo largo del eje de la viga, los valores de los desplazamientos nodales en la misma, $\hat{\mathbf{u}}_b$, y ii) una función de mapeo, \mathbf{m}_u , que transforma los valores interpolados de desplazamientos y rotaciones en el eje de la viga a un vector de desplazamientos en la superficie de interacción.

En la Figura 2 se muestra un esquema de estas funciones de interpolación y mapeo para la superficie lateral del pilote, junto con el sistema de coordenadas globales (X_1, X_2, X_3) y locales (x_1, x_2, r) para el caso de un pilote vertical de sección transversal rectangular con lados A y B .

La matriz de interpolación de los desplazamientos de vigas, \mathbf{n}_u , se define en función de la coordenada local a lo largo del eje de la viga, r . Esta matriz incorpora los diferentes modelos de vigas, sean Euler-Bernoulli (EB) o vigas de Timoshenko (TI). En este trabajo se siguió la línea de los modelos de vigas descritos en Oñate (2013).

La función de mapeo \mathbf{m}_u se define en función de las coordenadas locales, x_1, x_2, r , y la misma incorpora las hipótesis acerca de la sección transversal Γ , la cual permanece plana, in-

deformada y en el caso de vigas tipo EB perpendicular al eje de la viga. En el caso de la viga tipo TI la condición de perpendicularidad no se verifica.

A partir de las definiciones introducidas, el vector 3D de desplazamientos de vigas en la superficie de interacción, \mathbf{u}_b , se puede expresar en función de los desplazamientos nodales de vigas, $\hat{\mathbf{u}}_b$ (desplazamientos y rotaciones), como:

$$\mathbf{u}_b(x_1, x_2, r) = \mathbf{h}_u(x_1, x_2, r) \hat{\mathbf{u}}_b = \mathbf{m}_u(x_1, x_2) \mathbf{n}_u(r) \hat{\mathbf{u}}_b \quad (2)$$

La forma explícita de la función de mapeo, \mathbf{h}_u , para un elemento de viga tipo EB de 2 nodos (nodo i y j), sección transversal rectangular expresada en coordenadas locales es:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u(x_1, x_2, r) &= \mathbf{m}_u(x_1, x_2) \mathbf{n}_u(r) \\ \mathbf{m}_u(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{n}_u(r) &= (\mathbf{n}_{u_i}(r) \mathbf{n}_{u_j}(r)) \end{aligned} \quad (3)$$

La función \mathbf{n}_u para el caso de vigas tipo EB se escribe como:

$$\mathbf{n}_{u_i}(r) = \begin{pmatrix} n_{1i}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 \\ 0 & n_{1i}^H(r) & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_{1i,r}^H(r) & 0 & -n_{2i,r}^H(r) & 0 & 0 \\ n_{1i,r}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i,r}^H(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (4)$$

siendo n_1^H , n_2^H las funciones polinómicas cúbicas de Hermite para la interpolación de desplazamientos en función de desplazamientos y giros nodales, mientras que n^L son funciones de interpolación lineales. La matriz para el nudo j , $\mathbf{n}_{u_j}(r)$, tiene una expresión idéntica a $\mathbf{n}_{u_i}(r)$ pero cambiando el sub-índice i por j . En la Ecuación 4 $(\cdot)_{,r}$ representa la derivada parcial de la función respecto a la coordenada local, r .

En el caso de vigas tipo TI, \mathbf{n}_u se expresa como:

$$\mathbf{n}_{u_i}(r) = \begin{pmatrix} n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (5)$$

donde se ve que todas las variables nodales se interpolan linealmente sobre la coordenada local r .

De forma similar, las fuerzas de interacción \mathbf{f}_b , se pueden expresar en función de las fuerzas nodales de interacción en el eje de la viga, $\hat{\mathbf{f}}_b$, a través de la función de mapeo \mathbf{h}_f . Esta función consta de dos partes: i) una función de interpolación \mathbf{n}_f que interpola, en el eje de la viga, los valores nodales de las fuerzas de interacción, $\hat{\mathbf{f}}_b$, y ii) una función de mapeo \mathbf{m}_f que transforma el vector de fuerzas de interacción interpolado en el eje de la viga, \mathbf{f}_b , a un vector de fuerzas de interacción sobre la superficie de interacción, \mathbf{f}_b .

Las funciones de interpolación, \mathbf{n}_f , se definen en función de la coordenada local r , mientras que la función de mapeo \mathbf{m}_f , que transfiere cargas en el eje de la viga a la superficie de interacción, se define en función de las coordenadas locales, x_1, x_2 .

En vista de los conceptos previos, el campo de fuerzas distribuidas en la superficie de interacción, \mathbf{f}_b , se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_b(x_1, x_2, r) = \mathbf{h}_f(x_1, x_2, r) \hat{\mathbf{f}}_b = \mathbf{m}_f(x_1, x_2) \mathbf{n}_f(r) \hat{\mathbf{f}}_b \quad (6)$$

La forma explícita de la función de mapeo \mathbf{h}_f en la superficie lateral elemental para un pilote se sección rectangular es:

$$\mathbf{h}_f(x_1, x_2, r) = \mathbf{m}_f(x_1, x_2) \mathbf{n}_f(r)$$

$$\mathbf{m}_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(A+B)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{x_2}{2} \left(AB + \frac{A^2}{3} - B^2 - \frac{B^3}{3A} \right)}{\frac{A}{2} \left(AB + \frac{A^2}{3} - B^2 - \frac{B^3}{3A} \right)} \\ 0 & \frac{1}{2(A+B)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{x_1}{2} \left(AB + \frac{A^2}{3} - B^2 - \frac{B^3}{3A} \right)}{\frac{B}{2} \left(AB + \frac{A^2}{3} - B^2 - \frac{B^3}{3A} \right)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(A+B)} & \frac{\frac{x_2}{2} \left(\frac{A^2 B}{2} + \frac{A^3}{6} \right)}{\frac{A^2 B}{2} + \frac{A^3}{6}} & \frac{-x_1}{\frac{B^2 A}{2} + \frac{B^3}{6}} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{n}_f(r) = (\mathbf{n}_{f_i}(r) \mathbf{n}_{f_j}(r))$$

donde la matriz \mathbf{n}_f toma la siguiente forma par vigas tipo EB:

$$\mathbf{n}_{f_i}(r) = \begin{pmatrix} n_{1i}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 \\ 0 & n_{1i}^H(r) & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_{1i,r}^H(r) & 0 & -n_{2i,r}^H(r) & 0 & 0 \\ n_{1i,r}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i,r}^H(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (8)$$

En el caso de una viga tipo TI, la matriz \mathbf{n}_f se escribe como:

$$\mathbf{n}_{f_i}(r) = \begin{pmatrix} n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (9)$$

En la Fig. 3 se muestra un esquema de los patrones de fuerzas de interacción que se desarrollan en la superficie ω para los distintos patrones de carga (i.e., carga axial y transversal, flexión y torsión).

3.1. Implementación numérica

En este trabajo la implementación numérica se realiza para un elemento finito hexaédrico de sólido de 8 nodos, con interpolación bi-lineal e interpolación reducida de los términos de corte y para un elemento finito hexaédrico de sólido de 27 nodos con interpolación bi-cuadrática.

Se implementa un elemento de viga de Euler-Bernoulli de 2 nodos con interpolación cúbica de los desplazamientos transversales asociados a flexión y lineal para los desplazamientos y giros asociados al comportamiento axial y torsional respectivamente. Además, se implementa un elemento de viga tipo Timoshenko de 2 nodos con interpolación lineal de desplazamientos y giros asociados al comportamiento flexional, axial y torsional respectivamente, con integración reducida de los términos de corte (Oñate, 2013).

Los elementos embebidos que surgen de combinar los elementos finitos mencionados se denominan H8B2-EB, H8B2-TI, H27B2-EB y H27B2-TI, respectivamente.

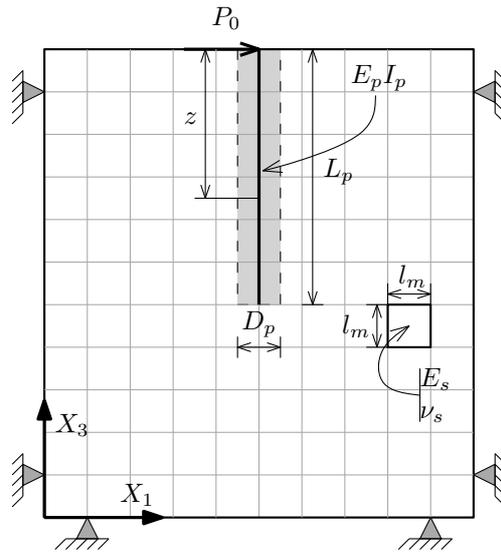


Figura 4: Ejemplo 1. Vista lateral del esquema utilizado.

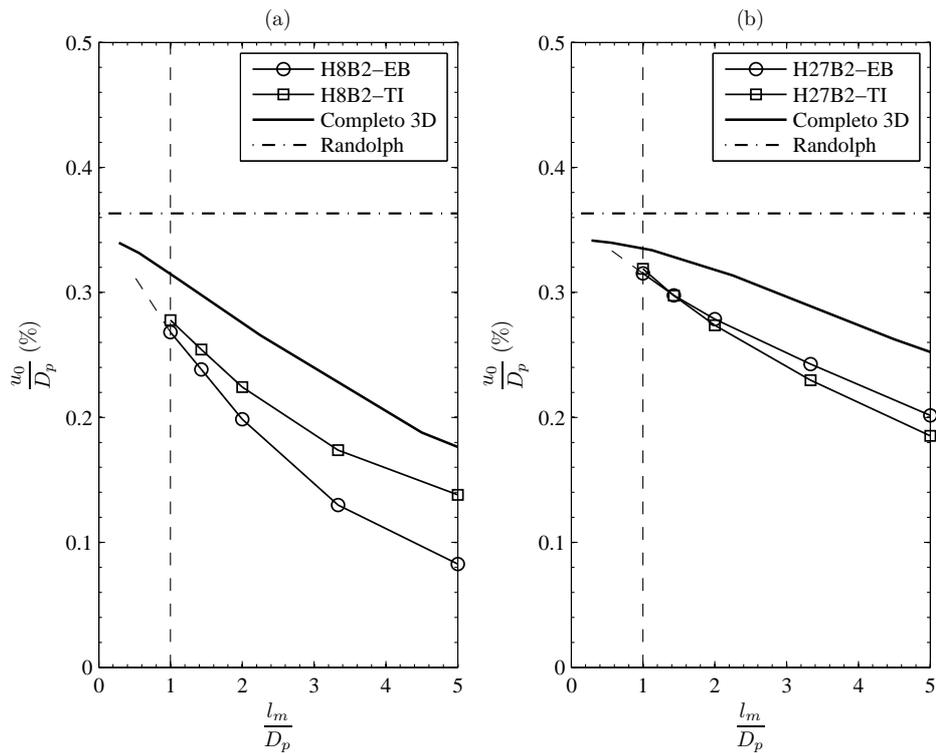


Figura 5: Ejemplo 1. Desplazamiento lateral adimensional en la cabeza del pilote, $\frac{u_0}{D_p}$, para (a) H8B2 y (b) H27B2 EVEs.

4. EJEMPLOS Y DISCUSIÓN

4.1. Ejemplo 1. Pilote sección circular.

En este ejemplo se modela un pilote vertical de sección transversal circular, dispuesto en suelo homogéneo y sometido a carga lateral en la cabeza del mismo, considerando la formulación de elementos de vigas embebidos de Euler-bernoulli (EB) como los de Timoshenko (TI). Tanto el dominio de suelo como el del pilote están caracterizados por un material elástico, lineal, isótropo y homogéneo. En este ejemplo se agrega la curva de respuesta obtenida con los EVEs con formulación de vigas tipo Timoshenko a la figura presentada en [Turello et al. \(2016\)](#).

Se comparan los resultados de los modelos numéricos con soluciones de referencia, que en este caso son la solución semi-analítica de [Randolph \(1981\)](#) y los resultados obtenidos con un modelo completo 3D del problema donde ambos dominios se discretizan mediante elementos finitos de sólidos 3D. Los modelos completos de MEF utilizan los mismos elementos de sólidos descriptos anteriormente.

Se varía el tamaño de malla desde $l_m = 5,0 \times D_p$ (gruesa) hasta $l_m = 1,0 \times D_p$ (fina).

La carga externa, P_0 , se aplica en la superficie del estrato de suelo en la dirección $+X_1$ (Figura 4) con un valor de 200kN. Los bordes externos del problema se colocan a una distancia de $10 \times D_p$ desde el eje del pilote, y en esas superficies se restringen todos los desplazamientos.

En este ejemplo los nodos de sólidos y de vigas son coincidentes como se muestra en la Figura 4.

Los parámetros elásticos del suelo considerados para el análisis son: módulo de Young $E_s = 100$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,33$. Por otro lado, los parámetros elásticos del pilote son: módulo de Young $E_p = 30000$ MPa, $\nu_p = 0,30$ (en el modelo completo 3D), $D_p = 0,50$ m, $L_p = 10,00$ m. El significado de estos parámetros se muestra en la Figura 4.

En la Fig. 5-(a) se puede ver que los desplazamientos laterales en la cabeza del pilote, u_0 , para los EVEs que consideran la formulación de vigas tipo Timoshenko y elementos de sólidos bi-lineales, arrojan resultados más cercanos a los obtenidos con el modelo completo 3D, para tamaños de malla relativos al diámetro del pilote mayores que 1. A medida que el tamaño de malla relativo tiende a 1, las respuestas obtenidas con ambos EVEs se acercan entre sí, siendo muy similares en el límite $\frac{l_m}{D_p} = 1$. En el caso de los elementos de sólidos bi-cuadráticos, Fig. 5-(b), la diferencia entre los elementos EVEs-EB y los EVEs-TI no es tan importante como en el caso bi-lineal (elementos de sólidos H8), siendo la respuesta de los EVEs-EB más cercana a la del modelo completo 3D. Al igual que en el caso bi-lineal, la respuesta con ambos modelos de vigas se acercan entre sí al refinar la malla.

4.2. Ejemplo 2. Pilotes de sección cuadrada y rectangular.

En este ejemplo también se modela un pilote vertical dispuesto en suelo homogéneo y sometido a carga lateral en la cabeza, pero esta vez se consideran secciones transversales cuadradas y rectangulares como se muestran en la Fig. 6. El lado de la sección cuadrada y el lado menor de la rectangular se denominan D_p y en este ejemplo toman un valor de 0,50m. En el caso de la sección rectangular, el lado mayor se adopta como $2 \times D_p$.

A diferencia del caso anterior, el tamaño de malla se varía de $l_m = 1,0 \times D_p$ (gruesa) hasta $l_m = 0,25 \times D_p$ (fina), para analizar los patrones de desplazamientos que se consiguen en el sólido con la formulación EVE propuesta con secciones rectangulares.

Al igual que en el ejemplo anterior, la carga externa se aplica en la superficie del estrato de suelo en la dirección $+X_1$ y toma el valor $P_0 = 50$ kN (Figura 4).

Los parámetros elásticos del suelo considerados para el análisis son: módulo de Young $E_s =$

100 MPa, coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,30$. Por otro lado, los parámetros elásticos del pilote son: módulo de Young $E_p = 30000$ MPa, $\nu_p = 0,30$ (en el modelo completo 3D), $D_p = 0,50$ m, $L_p = 10,00$ m.

Como en el ejemplo anterior los elementos de sólidos H27 no mostraron grandes diferencias entre la formulación de EB y la de TI para tamaños de malla relativos menores que la unidad,

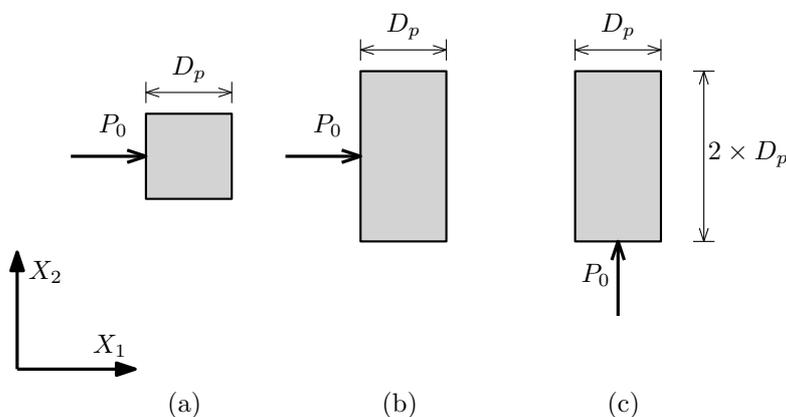


Figura 6: Ejemplo 2. Secciones transversales analizadas (a) Sección cuadrada (b) Sección Rectangular y carga según X_1 (c) Sección Rectangular y carga según X_2 .

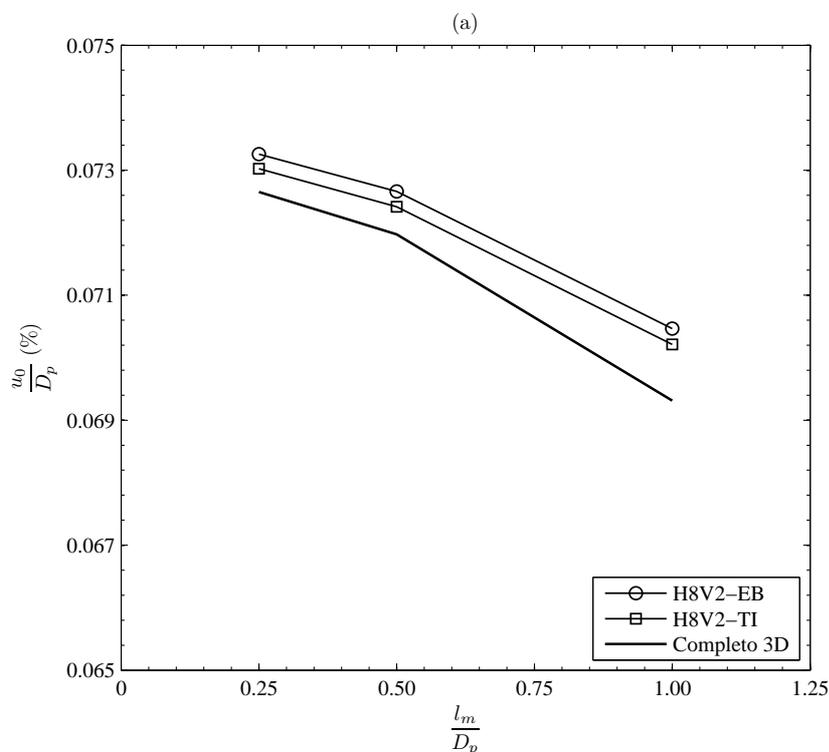


Figura 7: Ejemplo 2. Desplazamiento lateral adimensional en la cabeza del pilote, $\frac{u_0}{D_p}$, para el pilote de sección cuadrada y los elementos H8B2-EB y H8B2-TI.

con los elementos H8B2-TI es más cercana a la respuesta del modelo completo 3D, sin embargo las diferencias entre ambos modelos de vigas no son relevantes. Ambos modelos capturan la respuesta del modelo completo 3D.

En la Fig. 8 se muestra el desplazamiento adimensional, $\frac{u_0}{D_p}$, para el pilote rectangular y para los dos sentidos de carga (sub-figuras a y b, respectivamente). En este caso, si bien la formulación EVE captura el la respuesta del modelo completo 3D, el modelo de viga de Timoshenko no ofrece ventajas frente al elemento de Euler-Bernoulli. Los desplazamientos relativos en el caso de carga según el lado mayor (caso (b) de la Fig. 6) son un 20 % mayores que en el caso de carga según el eje menor (caso (c) de la Fig. 6).

En las Fig. 9, Fig. 10 y Fig. 11 se muestran los mapas de colores correspondientes a los desplazamientos en el sólido para el modelo completo 3D, el modelo EVE-EB y el EVE-TI (Fig. (a), (b) y (c) respectivamente) y para las distintas secciones transversales analizadas en el ejemplo. Se puede ver que la formulación EVE propuesta captura los desplazamientos en el dominio de sólidos, y que se captura de muy buena forma la influencia del área transversal de los pilotes. Es de notar que en los mapas de colores de los EVE-EB y los EVE-TI, es la

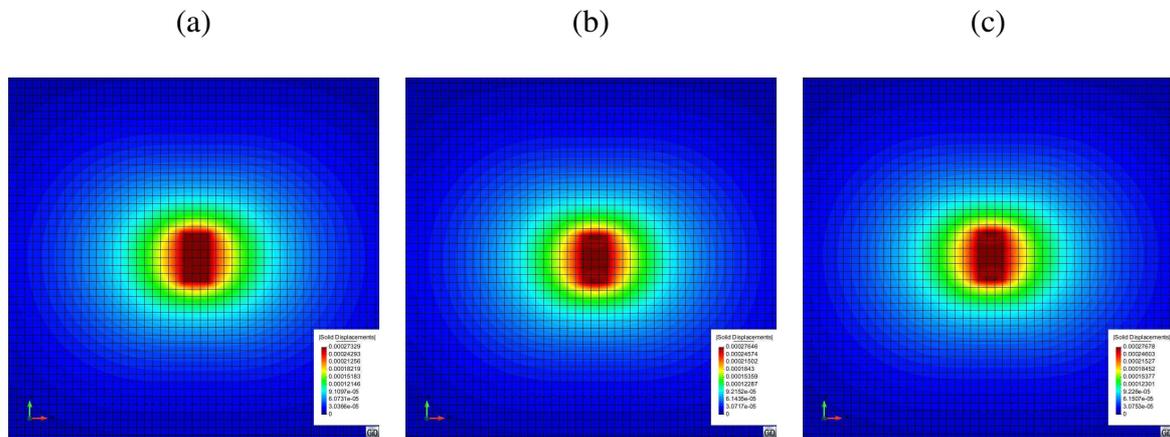


Figura 10: Mapa de colores para el desplazamiento en el sólidos para el pilote de sección rectangular y carga según X_1 (X según GID) para (a) Modelo completo 3D, (b) H8B2-EB y (c) H8B2-TI.

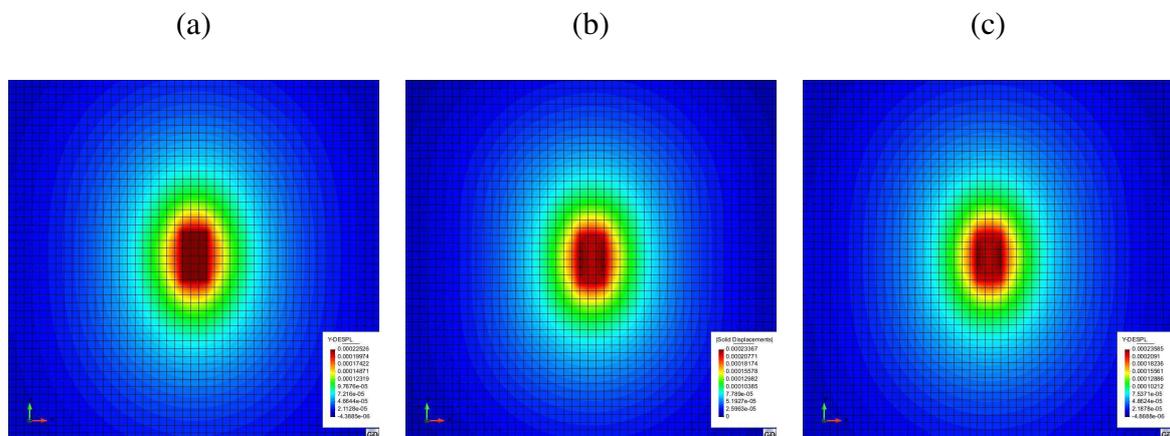


Figura 11: Mapa de colores para el desplazamiento en el sólidos para el pilote de sección rectangular y carga según X_2 (Y según GID) para (a) Modelo completo 3D, (b) H8B2-EB y (c) H8B2-TI.

propia formulación la cual se encarga de colocar las fuerzas de interacción y la compatibilidad de desplazamientos sobre la superficie de interacción. En estas figuras se puede ver que los patrones de desplazamientos obtenidos con la formulación EVE dentro de la superficie del pilote son lo suficientemente homogéneos como para considerar que el elemento de viga embebido modela de forma satisfactoria el efecto del volumen del pilote.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un breve resumen de la formulación de elementos de vigas embebidos en sólidos, publicado anteriormente por los autores y se presentaron funciones de mapeo novedosas para el modelado de secciones transversales rectangulares. De esta forma, se puede ver que la formulación propuesta tiene la capacidad de modelar correctamente el efecto del volumen del pilote, es decir que los mapas de desplazamientos en el sólido son muy similares en los modelos EVEs propuestos a los arrojados por la solución de referencia utilizada (en este caso el modelo completo 3D). Este punto es de gran importancia para modelar en forma adecuada la interacción suelo-estructura en este tipo de problemas. Otros problemas donde interesa modelar correctamente este comportamiento es en grupos de pilotes, donde la interacción pilote-suelo-pilote juega un papel clave en la respuesta mecánica del grupo. La formulación propuesta, al modelar correctamente los patrones de desplazamientos en el sólidos, tiene la capacidad de capturar esos efectos de interacción de forma natural. Además se introdujeron elementos de vigas con formulación de deformaciones de corte tipo Timoshenko, los cuales se contrastaron frente a los clásicos elementos de Euler-Bernoulli. En este sentido se pudo ver que para tamaños de mallas relativos mayores que la unidad y para elementos de sólidos bi-lineales (H8) los elementos de Timoshenko ofrecen una respuesta más cercana a la obtenida con el modelo completo 3D. Para los elementos de sólidos bi-cuadráticos (H27) los elementos de Timoshenko no ofrecen ventajas frente a los de Euler-Bernoulli. En función de los resultados obtenidos en los experimentos numéricos realizados se puede ver que con el refinamiento de la malla, la diferencia entre los elementos de vigas tipo Euler-Bernoulli y los de Timoshenko se reduce. Este hecho es significativo para tamaños de malla relativos menores que la unidad, donde no se evidencian diferencias sustanciales entre los dos tipos de elementos.

REFERENCIAS

- Choi Y.S., Basu D., Prezzi M., y Salgado R. Study on laterally loaded piles with rectangular and circular cross sections. *Geomechanics and Geoengineering*, 10(2):139–152, 2015.
- Dao T. *Validation of plaxis embedded piles for lateral loading*. Tesis de Doctorado, TU Delft, Delft University of Technology, 2011.
- Engin H., Septanika E., y Brinkgreve R. *Improved embedded beam elements for the modelling of piles*. Proceedings of Tenth International Conference on numerical models in geomechanics - NUMOG X, Rhodos, Greece, 2007.
- Hirai H. Analysis of rectangular piles subjected to lateral loads in nonhomogeneous soil using a winkler model approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 39(9):937–968, 2015.
- Matlock H. y Ripperger E. Procedures and instrumentation for tests on a laterally loaded pile. En *Proceedings, Eighth Texas Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1956.
- Oñate E. *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells*. Springer Science & Business Media, 2013.

- Pinto F. y Prato C. Three dimensional indirect boundary element method formulation for dynamic analysis of frames buried in semi-infinite elastic media. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 132(3):967–978, 2006.
- Randolph M. The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique*, 31(2):247–259, 1981.
- Reese L., Cox W., y Koop F. Analysis of laterally loaded piles in sand. En *Proceedings, 5th Annual Offshore Technology Conference, Paper No. OTC 2080, Houston, TX*, páginas 473–485. ASCE, 1974.
- Sadek M. y Shahrour I. A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:931–946, 2004.
- Turello D. y Pinto F. Efecto del tamaño de malla en la modelación numérica del comportamiento lateral de pilotes mediante elementos de barra embebidos en sólidos. *Mecánica Computacional*, Volume XXX(Number 13. Solid Mechanics (B)):141–152, 2011.
- Turello D., Pinto F., y P.J. S. Interacción suelo-estructura en pilotes cargados lateralmente mediante elementos de viga embebidos en sólidos. En *From Fundamentals to Applications in Geotechnics*, volumen doi: 10.3233/978-1-61499-603-3-1145, páginas 1145 – 1152. 2015.
- Turello D., Pinto F., y P.J. S. Embedded beam element with interaction surface for lateral loading of piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(4):568–582, 2016. ISSN 1096-9853. doi:10.1002/nag.2416. Nag.2416.
- Winkler E. *Die lehre von elasticitat und festigkeit*. (H. Dominic us), Prague, 182-184., 1867.