

## ¿MODOS DE IMPERFECCION O MODOS DE PANDEO?

**Claudio E. Jouglard<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>Grupo de Métodos Computacionales en Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires, Av. Medrano 951, 1179 Buenos Aires, Argentina, [jouglard@gmail.com.ar](mailto:jouglard@gmail.com.ar)*

**Palabras Clave:** Inestabilidad estructural, imperfecciones, modos de imperfección.

**Resumen.** Las fallas estructurales se pueden agrupar en dos categorías simples: fallas por rotura de material o fallas por inestabilidad estructural. Este último tipo de falla es característico de las estructuras esbeltas y tiene su origen primario en efectos geométricos. La geometría de la deformación introduce no linealidades que amplifican las tensiones calculadas sobre la base de una configuración indeformada de la estructura.

Tradicionalmente el comportamiento de inestabilidad estructural ha sido determinado mediante los llamados modos de pandeo y sus cargas críticas asociadas llamadas cargas de pandeo. Si bien esta teoría puede proveer resultados adecuados para una gran variedad de tipos estructurales, existen algunas estructuras laminares ó reticuladas para las cuales la información provista por las cargas clásicas de pandeo puede estar inusualmente alejada del comportamiento real y del lado de la inseguridad. Esto implica que estas estructuras fallan por inestabilidad a cargas sensiblemente inferiores que las predichas por los modos clásicos de pandeo. Es bien conocido que la causa principal de esta discordancia es la sensibilidad de estas estructuras a imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría perfecta de la estructura en su configuración indeformada.

El objeto del presente trabajo es introducir los modos de imperfección y su relación con el comportamiento de las estructuras imperfectas. Estos modos son similares a los modos de pandeo aunque presentan algunas ventajas como: siempre se evalúan en la configuración indeformada de la estructura, permiten interpretar el comportamiento correcto de una estructura en forma independiente de su sensibilidad a imperfecciones, y dan información acerca de la imperfección crítica, esto es, cuales son los desvíos geométricos de la estructura perfecta que más afectan la respuesta estructural.

## 1 INTRODUCCION

El comportamiento estático de sistemas estructurales discretos cuyas configuraciones de equilibrio se definen mediante un número finito de grados de libertad  $u_i$ , en general asociados a desplazamientos nodales de algún punto  $i$  del sistema, y para cargas proporcionales a un parámetro de carga  $\lambda$ , se representa mediante curvas o caminos de equilibrio en diagramas de respuesta  $\lambda, u_i$ . Sobre el camino de equilibrio existen dos tipos de puntos críticos asociados a inestabilidades, puntos límite y bifurcaciones. En un punto límite el camino presenta un máximo o mínimo local del parámetro de carga  $\lambda$ . En un punto de bifurcación dos o más caminos se cruzan intercambiando el grado de estabilidad (Thompson y Hunt, 1973).

El análisis de inestabilidad estructural se realiza usualmente mediante la determinación de las llamadas cargas críticas de pandeo, asociadas a los puntos de equilibrio crítico. En teoría al alcanzar esta carga la estructura se inestabiliza y para cargas menores permanece en situación de equilibrio estable. Si bien este comportamiento es representativo de una gran variedad de tipos estructurales, existen algunas estructuras laminares, como las cáscaras cilíndricas o circulares, que se inestabilizan a cargas sensiblemente inferiores. Es bien conocido que la causa principal de esta discordancia es la sensibilidad de estas estructuras a imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría perfecta de la estructura (Koiter, 1945).

Luego el tratamiento general de los problemas de inestabilidad debe llevar en cuenta el efecto de pequeñas imperfecciones geométricas en el comportamiento estructural. Un punto central es determinar cual de todas las imperfecciones posibles es la más perjudicial para la estructura. Dado que para pequeñas imperfecciones el comportamiento de la estructura imperfecta es asintótico al de la estructura perfecta, la mayoría de los métodos empleados para determinar la *peor imperfección* se basan en hallar el camino de bifurcación que presente la mayor pérdida de carga en proximidades del punto de bifurcación (Ho, 1974; Lanzo y Garcea, 1996, Deml y Wunderlich, 1997).

En este trabajo presentaremos una metodología para determinar la *peor imperfección* de un sistema estructural discreto. El análisis se efectúa en torno de la configuración indeformada de la estructura perfecta y no es necesario conocer los modos de pandeo ni sus cargas críticas.

## 2 ANALISIS DE SISTEMAS IMPERFECTOS

Consideremos un sistema estructural imperfecto que presenta pequeños desvíos geométricos respecto de una configuración de referencia perfecta. Las configuraciones de equilibrio son determinadas por los valores de  $n$  coordenadas generalizadas  $u_i$  que agrupamos en un vector  $\mathbf{u}$ . Usualmente estas coordenadas están asociadas con los desplazamientos de los nodos de la estructura discretizada y asumiremos que estas variables se miden desde la configuración original imperfecta libre de deformaciones. Asumiremos que los desvíos geométricos se pueden representar mediante las mismas coordenadas generalizadas como un vector de imperfecciones  $\mathbf{u}_0$  medidas desde la configuración perfecta de referencia. Consideraremos que las imperfecciones son proporcionales a un parámetro  $\varepsilon$  asociado a la magnitud de un  $\mathbf{v}$  es un vector de imperfecciones de referencia como:

$$\mathbf{u}_0 = \varepsilon \mathbf{v} \quad (1)$$

Luego las  $n$  ecuaciones de equilibrio del sistema estructural discreto con imperfecciones se pueden representar como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda, \varepsilon) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \varepsilon) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{f}$  es un vector de fuerzas internas generadas por la deformación de la estructura,  $\mathbf{p}$

es un vector de fuerzas externas de referencia y  $\lambda$  es un parámetro de control asociado a la magnitud de las cargas.

Las soluciones de las ecuaciones de equilibrio del sistema imperfecto son una familia de curvas que definen una superficie de equilibrio en el espacio de coordenadas  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ . Cada una de estas curvas tiene asociado un valor fijo de  $\varepsilon$  y las llamaremos *caminos imperfectos de equilibrio*. La curva correspondiente a  $\varepsilon = 0$  es la respuesta del sistema perfecto y la llamaremos *camino perfecto de equilibrio* (ver Figura 1).

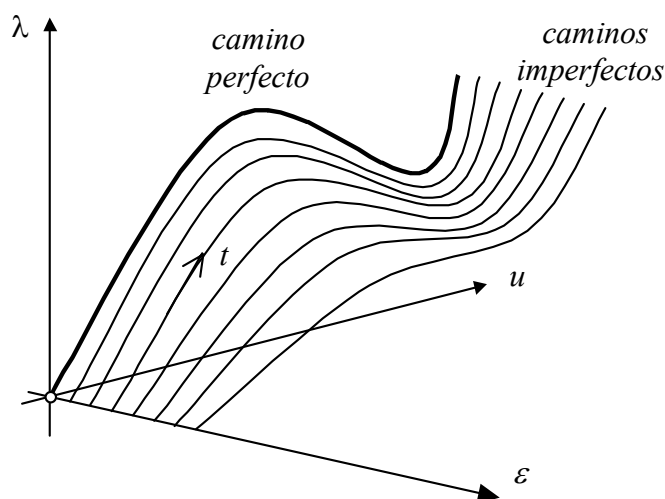


Figura 1: Caminos imperfectos de equilibrio

Los caminos de equilibrio se pueden describir parametricamente mediante un parámetro  $t$ , independiente del parámetro de imperfecciones  $\varepsilon$ , de manera que la superficie de equilibrio queda definida mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(t, \varepsilon) \\ \lambda &= \lambda(t, \varepsilon)\end{aligned}\quad (3)$$

Luego para un valor fijo del parámetro de imperfecciones  $\varepsilon$  tenemos un camino de equilibrio imperfecto que varía únicamente con el parámetro  $t$ . En particular para  $\varepsilon = 0$  resulta el camino de equilibrio perfecto correspondiente al sistema libre de imperfecciones. Además asumiremos que para  $t = 0$  resulta la configuración original imperfecta libre de deformaciones ( $\mathbf{u}=0$ ,  $\lambda=0$ ).

Asumiendo que, al menos en torno de la configuración original imperfecta, la variación del camino de equilibrio imperfecto sea analítica en el parámetro  $t$ , entonces es posible expresarlo mediante las siguientes series de Taylor:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t, \varepsilon) &= \mathbf{u}(\varepsilon)^{[1]}t + \mathbf{u}(\varepsilon)^{[2]}t^2 + \mathbf{u}(\varepsilon)^{[3]}t^3 + \dots \\ \lambda(t, \varepsilon) &= \lambda(\varepsilon)^{[1]}t + \lambda(\varepsilon)^{[2]}t^2 + \lambda(\varepsilon)^{[3]}t^3 + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Donde hemos indicado al  $i$ -ésimo coeficiente de cada serie con un superíndice entre corchetes. Asumiendo que, al menos para valores pequeños de  $\varepsilon$ , la variación de cada coeficiente de las series con este parámetro de imperfecciones sea analítica, entonces es posible expresar esta variación de los coeficientes mediante los siguientes desarrollos de Taylor:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\varepsilon)^{[m]} &= \mathbf{u}^{[m,0]} + \mathbf{u}^{[m,1]}\varepsilon + \mathbf{u}^{[m,2]}\varepsilon^2 + \mathbf{u}^{[m,3]}\varepsilon^3 + \dots \\ \lambda(\varepsilon)^{[m]} &= \lambda^{[m,0]} + \lambda^{[m,1]}\varepsilon + \lambda^{[m,2]}\varepsilon^2 + \lambda^{[m,3]}\varepsilon^3 + \dots\end{aligned}\quad (5)$$

Donde ahora hemos asignado dos índices a cada coeficiente, el primero asociado a la potencia del parámetro  $t$  y el segundo asociado a la potencia del parámetro  $\varepsilon$ . Notemos que el primer término es independiente de  $\varepsilon$  y corresponde al camino de equilibrio perfecto. Además, si las imperfecciones son muy pequeñas es posible obtener una buena aproximación despreciando los términos no lineales en  $\varepsilon$ .

Los coeficientes de las series (5) corresponden a un desarrollo en series dobles de Taylor de la superficie de equilibrio en torno de la configuración original perfecta ( $t=0$ ,  $\varepsilon=0$ ), y se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{[m,p]} &= \frac{1}{m!p!} \mathbf{u}^{(m,p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \lambda^{[m,p]} &= \frac{1}{m!p!} \lambda^{(m,p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}}\end{aligned}\quad (6)$$

Donde  $m!$  y  $p!$  son los factoriales de  $m$  y  $p$ , respectivamente, y hemos usado la notación

$$(\cdot)^{(m,p)} = \frac{d^{m+p}(\cdot)}{dt^m d\varepsilon^p} \quad (7)$$

para indicar la derivada de orden  $m$  con respecto a  $t$  y la derivada de orden  $p$  con respecto a  $\varepsilon$ . Adoptamos la convención que si  $m$  o  $p$  son nulos no se deriva respecto de la variable asociada al índice nulo.

Notemos que hemos asumido que las coordenadas generalizadas  $\mathbf{u}$  se miden desde la configuración imperfecta indeformada, esto implica que en esa configuración las coordenadas generalizadas son siempre nulas ( $\mathbf{u}=0$ ), independientemente del valor de  $\varepsilon$ . Luego, deben ser nulos los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{[0,p]} &= 0 \\ \lambda^{[0,p]} &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

## 2.1 Aproximación asintótica de los caminos de equilibrio

Asumiendo que las relaciones funcionales  $\mathbf{u}(t,\varepsilon)$ ,  $\lambda(t,\varepsilon)$  están definidas, al menos en un intervalo de  $t$  y  $\varepsilon$  alrededor de una configuración de referencia de equilibrio perfecto, y asumiendo que las ecuaciones de equilibrio  $\mathbf{F}(\mathbf{u},\lambda,\varepsilon)$  sean analíticas en las variables  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ , esto implica que en ese intervalo de  $t$  y  $\varepsilon$  es posible expresar a estas ecuaciones mediante un desarrollo en series dobles de Taylor como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u},\lambda,\varepsilon) = \mathbf{F}(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \mathbf{F}^{(p,m-p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} t^p \varepsilon^{m-p} = 0 \quad (9)$$

Donde

$$\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad (10)$$

son los *coeficiente binomiales*.

Notemos que el desarrollo debe anularse para cualquier par de valores  $t$  y  $\varepsilon$ , esto implica que deben anularse las derivadas parciales:

$$\mathbf{F}^{(p,m)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = \frac{\partial \mathbf{F}^{p+m}}{\partial t^p \partial \varepsilon^m} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = 0 \tag{11}$$

Luego aplicando la regla de la cadena las derivadas parciales son:

$$\mathbf{F}^{(0,p)} = \sum_{s=0}^{p-1} \binom{p-1}{s} \left[ \mathbf{F}_u^{(0,s)} \mathbf{u}^{(0,p-s)} + \mathbf{F}_\lambda^{(0,s)} \lambda^{(0,p-s)} \right] \quad (p > 0) \tag{12}$$

$$\mathbf{F}^{(m,p)} = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^p \binom{m-1}{r} \binom{p}{s} \left[ \mathbf{F}_u^{(r,s)} \mathbf{u}^{(m-r,p-s)} + \mathbf{F}_\lambda^{(r,s)} \lambda^{(m-r,p-s)} \right] \quad (m > 0)$$

Evaluando estas derivadas en la configuración perfecta inicial ( $t=0, \varepsilon=0$ ) tenemos

$$\mathbf{F}^{(0,p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = p! \sum_{s=0}^{p-1} \frac{(p-s)1}{p!s!} \left[ \mathbf{F}_u^{(0,s)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \mathbf{u}^{[0,p-s]} + \mathbf{F}_\lambda^{(0,s)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \lambda^{[0,p-s]} \right] = 0 \quad (p > 0) \tag{13}$$

$$\mathbf{F}^{(m,p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = m! p! \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^p \frac{(m-r)1}{m!r!s!} \left[ \mathbf{F}_u^{(r,s)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \mathbf{u}^{[m-r,p-s]} + \mathbf{F}_\lambda^{(r,s)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \lambda^{[m-r,p-s]} \right] = 0 \quad (m > 0)$$

Notemos que la primera ecuación se satisface idénticamente debido a la nulidad de los coeficientes  $\mathbf{u}^{[0,m]}$ ,  $\lambda^{[0,m]}$  (ec. 8), y la segunda ecuación, que llamaremos *ecuación de equilibrio de orden  $m$  en  $t$  y de orden  $p$  en  $\varepsilon$* , se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[m,p]} = \lambda^{[m,p]} \mathbf{p} - \mathbf{r}^{[m,p]} \quad (m > 0)} \tag{14}$$

Donde  $\mathbf{K}_T$  es la *matriz de rigidez tangente* en la configuración perfecta ( $t=0, \varepsilon=0$ ) definida como

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Notemos que para sistemas conservativos con energía potencial  $V$  las ecuaciones de equilibrio  $F_i$  se obtienen derivando a la energía potencial  $V$  respecto de la coordenada generalizada  $u_i$  como

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial u_i} \tag{16}$$

Por lo tanto, para estos sistemas conservativos la matriz de rigidez tangente es siempre simétrica pues

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_j \partial u_i} \quad (17)$$

Además asumimos, por simplicidad, que el vector de fuerzas externas de referencia  $\mathbf{p}$  es constante y por lo tanto son nulas sus derivadas paramétricas

$$\mathbf{F}_\lambda = -\mathbf{p} \quad (18)$$

Finalmente,  $\mathbf{r}^{[m,p]}$  son los *vectores de fuerzas residuales de orden  $m$  con respecto a  $t$  y de orden  $p$  con respecto a  $\varepsilon$* , definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{[1,0]} &= 0 \\ \mathbf{r}^{[1,1]} &= \mathbf{K}_T^{[0,1]} \mathbf{u}^{[1,0]} \\ \mathbf{r}^{[1,p]} &= \mathbf{K}_T^{[0,p]} \mathbf{u}^{[1,0]} + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{K}_T^{[0,r]} \mathbf{u}^{[1,p-r]} \quad (p > 1) \\ \mathbf{r}^{[m,0]} &= \sum_{r=1}^{m-1} \frac{(m-r)}{m} \mathbf{K}_T^{[r,0]} \mathbf{u}^{[m-r,0]} \quad (m > 1) \\ \mathbf{r}^{[m,1]} &= \mathbf{K}_T^{[0,1]} \mathbf{u}^{[m,0]} + \sum_{r=1}^{m-1} \frac{(m-r)}{m} \left( \mathbf{K}_T^{[r,0]} \mathbf{u}^{[m-r,1]} + \mathbf{K}_T^{[r,1]} \mathbf{u}^{[m-r,0]} \right) \quad (m > 1) \\ \mathbf{r}^{[m,p]} &= \mathbf{K}_T^{[0,p]} \mathbf{u}^{[m,0]} + \sum_{s=1}^{p-1} \mathbf{K}_T^{[0,s]} \mathbf{u}^{[m,p-s]} + \\ &\quad \sum_{r=1}^{m-1} \frac{(m-r)}{m} \left( \mathbf{K}_T^{[r,0]} \mathbf{u}^{[m-r,p]} + \mathbf{K}_T^{[r,p]} \mathbf{u}^{[m-r,0]} \right) + \\ &\quad \sum_{r=1}^{m-1} \frac{(m-r)}{m} \sum_{s=1}^{p-1} \mathbf{K}_T^{[r,s]} \mathbf{u}^{[m-r,p-s]} \quad (m > 1, p > 1) \end{aligned} \quad (19)$$

Donde  $\mathbf{K}_T^{[m,p]}$  son las *matrices de rigidez tangente de orden  $m$  en  $t$  y de orden  $p$  en  $\varepsilon$*  definidas como

$$\mathbf{K}_T^{[m,p]} = \frac{1}{m! p!} \mathbf{F}_u^{(m,p)} \Big|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \quad (20)$$

Las ecuaciones de equilibrio (14) de orden  $m$  en  $t$  y de orden  $p$  en  $\varepsilon$  nos permiten obtener las componentes  $\mathbf{u}^{[m,p]}$  de los caminos imperfectos en forma sucesiva. Notemos que en el lado derecho de cada ecuación aparecen las componentes  $\lambda^{[m,p]}$  correspondientes a los desarrollos de Taylor del parámetro de cargas  $\lambda$ . Estos valores dependen del parámetro  $t$  elegido para describir el camino de equilibrio.

## 2.2 El parámetro de cargas como parámetro del camino de equilibrio

Consideremos la utilización del parámetro de cargas como parámetro del camino. Esta elección es adecuada siempre que se pueda garantizar la existencia de las relaciones funcionales  $\mathbf{u}(\lambda)$ , y esto es siempre válido excepto en la cercanías de puntos límites donde

estas relaciones pierden unicidad (figura 2).

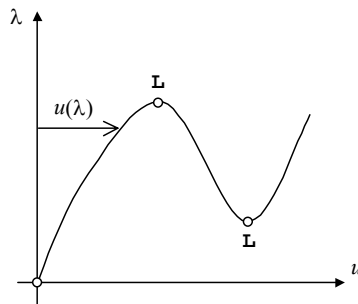


Figura 2: Camino de equilibrio con puntos limites

Luego asumiendo que en las proximidades de la configuración inicial perfecta ( $t=0, \varepsilon=0$ ) existan las relaciones funcionales  $\mathbf{u}(\lambda)$  podemos adoptar al parámetro de cargas  $\lambda$  como parámetro del camino resultando:

$$\lambda = t \tag{21}$$

Derivando sucesivamente esta ecuación respecto de  $t, \varepsilon$  resultan

$$\lambda^{[1,0]} = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = 1 \tag{22}$$

$$\lambda^{[m,p]} = \left. \frac{\partial^{m+p} \lambda}{\partial t^m \partial \varepsilon^p} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} = 0$$

Esto es, son nulos todos los componentes  $\lambda^{[m,p]}$  excepto la componente del camino perfecto  $\lambda^{[1,0]}$  que vale uno.

### 2.3 Influencia de pequeñas imperfecciones

Utilizando al parámetro de cargas como parámetro del camino analizaremos la obtención de las componentes  $\mathbf{u}^{[m,0]}$  del camino perfecto. De las ecuaciones de equilibrio (14) y llevando en cuenta las restricciones (22) tenemos:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[1,0]} = \mathbf{p} \tag{23}$$

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[m,0]} = -\mathbf{r}^{[m,0]} \quad (m > 1)$$

Solucionando estas ecuaciones obtenemos las componentes del camino de equilibrio perfecto que se puede expresar como

$$\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{u}^{[1,0]} \lambda + \mathbf{u}^{[2,0]} \lambda^2 + \mathbf{u}^{[3,0]} \lambda^3 + \dots \tag{24}$$

Para una magnitud fija del parámetro de imperfecciones  $\varepsilon$  los caminos de equilibrio imperfectos también se pueden expresar en función del parámetro  $\lambda$  al menos en las proximidades de la configuración inicial perfecta como

$$\mathbf{u}(\lambda, \varepsilon) = \mathbf{u}(\varepsilon)^{[1]} \lambda + \mathbf{u}(\varepsilon)^{[2]} \lambda^2 + \mathbf{u}(\varepsilon)^{[3]} \lambda^3 + \dots \tag{25}$$

Cada una de las componentes del camino imperfecto será función del parámetro  $\varepsilon$  y se puede expresar como (ver ec.(5))

$$\mathbf{u}(\varepsilon)^{[m]} = \mathbf{u}^{[m,0]} + \mathbf{u}^{[m,1]}\varepsilon + \mathbf{u}^{[m,2]}\varepsilon^2 + \mathbf{u}^{[m,3]}\varepsilon^3 + \dots \quad (26)$$

Donde el primer término corresponde al camino perfecto y los restantes se pueden interpretar como *correcciones* de primer orden y superiores. Asumiendo que las imperfecciones sean pequeñas es posible despreciar las correcciones de orden superior a la primera y se pueden aproximar a las componentes del camino imperfecto como

$$\mathbf{u}(\varepsilon)^{[m]} \approx \mathbf{u}^{[m,0]} + \mathbf{u}^{[m,1]}\varepsilon \quad (27)$$

Notemos que para valores pequeños del parámetro  $\lambda$  el comportamiento del camino imperfecto viene dominado por la componente  $\mathbf{u}(\varepsilon)^{[1]}$  que se puede aproximar como

$$\mathbf{u}(\varepsilon)^{[1]} \approx \mathbf{u}^{[1,0]} + \mathbf{u}^{[1,1]}\varepsilon \quad (28)$$

La influencia de las imperfecciones se manifiesta en la componente  $\mathbf{u}^{[1,1]}$  que se puede determinar mediante las ecuaciones (14) y (19) como

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[1,1]} = -\mathbf{K}_T^{[0,1]} \mathbf{u}^{[1,0]} \quad (29)$$

Notemos que el lado derecho depende de las imperfecciones que están incorporadas implícitamente en la matriz  $\mathbf{K}_T^{[0,1]}$  y de la aproximación lineal  $\mathbf{u}^{[1,0]}$  a la respuesta del sistema perfecto para un dado estado de cargas  $\mathbf{p}$ .

Luego es conveniente poner de manera explícita la dependencia con las imperfecciones en el lado derecho de la ecuación (29) la matriz  $\mathbf{K}_T^{[0,1]}$ .

### 3 MATRIZ DE RIGIDEZ A IMPERFECCIONES

Para un sistema estructural imperfecto que presenta pequeños desvíos geométricos de la forma  $\mathbf{u}_0 = \varepsilon \mathbf{v}$ , la matriz  $\mathbf{K}_T^{[0,1]}$  es

$$\mathbf{K}_T^{[0,1]} = \mathbf{F}_u^{(0,1)} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}_0} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}_0} \Big|_{\varepsilon=0} \mathbf{v} \quad (30)$$

En forma expandida, esta matriz es

$$\mathbf{K}_T^{[0,1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \dots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_n \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_1 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_2 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \dots & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_n \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_1 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_2 \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} & \dots & \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_n \partial u_{0k}} v_k \Big|_{\varepsilon=0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Luego la ecuación (29) se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[1,1]} = -\mathbf{K}_I \mathbf{v}} \quad (32)$$



Donde  $\mathbf{K}_I$  es la matriz de rigidez a imperfecciones, que en forma expandida es

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_k \partial u_{01}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_k \partial u_{02}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_k \partial u_{0n}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_k \partial u_{01}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_k \partial u_{02}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_k \partial u_{0n}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_k \partial u_{01}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_k \partial u_{02}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_k \partial u_{0n}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Notemos que esta matriz no depende de la forma de las imperfecciones pero sí de la respuesta lineal del sistema perfecto  $\mathbf{u}^{[1,0]}$ . Luego la ecuación (32) nos permite obtener la corrección de primer orden  $\mathbf{u}^{[1,1]}$  que afectará a la respuesta lineal del sistema imperfecto. Esta corrección se verá influenciada por la forma  $\mathbf{v}$  de las imperfecciones.

#### 4 MODOS DE IMPERFECCION Y PEOR IMPERFECCION

Deseamos determinar que vector de imperfecciones  $\mathbf{v}$  influirá más en la respuesta de la estructura imperfecta. Notemos que inicialmente, para valores pequeños de  $\lambda$  la respuesta imperfecta es dominada por la componente lineal. Luego debemos determinar cual de todas las formas posibles de imperfección  $\mathbf{v}$  influenciará en mayor medida a la corrección de primer orden  $\mathbf{u}^{[1,1]}$  de la respuesta de la estructura imperfecta. A esta forma de imperfección la llamaremos la *peor imperfección* y veremos a continuación como determinarla.

Consideremos el siguiente problema de autovalor basado en la ecuación (32)

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\psi} = -\omega \mathbf{K}_I \boldsymbol{\psi} \quad (34)$$

Los autovectores  $\boldsymbol{\psi}_i$  tienen las siguientes propiedades de ortogonalidad

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K}_T \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K}_I \boldsymbol{\psi}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

La matriz de rigidez a imperfecciones  $\mathbf{K}_I$  puede ser singular. Esto implica que pueden existir vectores  $\boldsymbol{\phi}$  con la propiedad

$$\mathbf{K}_I \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (36)$$

Notemos que las imperfecciones en la forma de estos vectores ( $\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi}$ ) no influyen en el valor de  $\mathbf{u}^{[1,1]}$  y por lo tanto en la respuesta de la estructura imperfecta. Luego asumiendo que el problema de autovalor tenga  $m$  soluciones distintas, es posible expresar a una imperfección arbitraria como una combinación lineal de estos autovectores o *modos de imperfección* como

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (37)$$

Sustituyendo estas imperfecciones en la ec.(32) y llevando en cuenta la ecuación de autovalor (34) obtenemos

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}^{[1,1]} = -\mathbf{K}_I \mathbf{v} = -\sum_{i=1}^m \alpha_i (\mathbf{K}_I \boldsymbol{\psi}_i) = \mathbf{K}_T \left( \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\omega_i} \boldsymbol{\psi}_i \right) \quad (38)$$

Luego comparando al primer y último término resulta que la sumatoria entre paréntesis del último término debe ser el vector  $\mathbf{u}^{[1,1]}$ , esto es

$$\boxed{\mathbf{u}^{[1,1]} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\omega_i} \boldsymbol{\psi}_i} \quad (39)$$

Luego podemos deducir que los modos de imperfección  $\boldsymbol{\psi}_i$  asociados a los autovalores  $\omega_i$  más pequeños son los que más influyen en la respuesta de la estructura imperfecta y denominaremos al autovector más bajo como la *peor imperfección* pues es el de mayor influencia. Es posible establecer, en cierta forma, una analogía con las vibraciones libres de estructuras donde la respuesta viene dominada por los modos más bajos de vibración, en el caso de una estructura imperfecta con una imperfección arbitraria son los modos de imperfección más bajos los que más influyen en su comportamiento.

#### 4.1 Modos clásicos de pandeo

La matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  varía a lo largo del camino del equilibrio con el parámetro  $t$ . En un punto crítico la matriz de rigidez tangente tiene un autovalor nulo con autovector crítico asociado  $\boldsymbol{\xi}_c$  que debe satisfacer la ecuación (Thompson y Hunt, 1973):

$$\mathbf{K}_T(t_c) \boldsymbol{\xi}_c = 0 \quad (40)$$

Estos autovectores críticos son llamados *modos de pandeo* y los valores críticos  $t_c$  del parámetro del camino definen dos tipos de puntos críticos sobre el camino de equilibrio: puntos límites y puntos de bifurcación. En un punto límite el camino presenta un máximo o mínimo local del parámetro de carga  $\lambda$ . En un punto de bifurcación se intersectan dos o más caminos de equilibrio (Thompson y Hunt, 1973).

Aproximando a la matriz de rigidez tangente por su desarrollo en series desde la configuración inicial perfecta ( $t=0$ ) y evaluando en el punto crítico tenemos

$$(\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_T^{[1,0]} t_c + \mathbf{K}_T^{[2,0]} t_c^2 + \mathbf{K}_T^{[3,0]} t_c^3 + \dots) \boldsymbol{\xi}_c = 0 \quad (41)$$

Este es un problema no lineal de autovalor, siendo  $t_c$  los autovalores críticos y  $\boldsymbol{\xi}_c$  sus autovectores críticos asociados. Usualmente este problema es aproximado en forma lineal reteniendo sólo los dos primeros términos de la serie

$$(\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_T^{[1,0]} t_c) \boldsymbol{\xi}_c = 0 \quad (42)$$

La calidad de las soluciones  $t_c$ ,  $\boldsymbol{\xi}_c$  obtenidas con el problema de autovalor linealizado dependerá del grado de no linealidad de la matriz de rigidez tangente con el parámetro  $t$ . Si se utiliza al parámetro de cargas  $\lambda$  como parámetro del camino a la matriz de rigidez tangente de primer orden se la denomina usualmente *matriz de rigidez geométrica*  $\mathbf{K}_G$  y el problema lineal de autovalor se expresa como

$$(\mathbf{K}_T + \lambda_c \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\xi}_c = 0 \quad (43)$$

Este último problema de autovalor linealizado está usualmente implementado en la mayoría de los programas comerciales de análisis estructural y provee aproximaciones razonables a la carga crítica si la estructura se inestabiliza por bifurcaciones, como sucede en

columnas y placas. Sin embargo si la inestabilidad se produce por puntos limites, como en algunos arcos, este problema de autovalor no resulta adecuado, y se obtienen cargas críticas que, para las formulaciones usualmente empleadas, son mayores que las reales y del lado de la inseguridad (Kerr and M.T. Soifer, 1969).

De acuerdo a la ecuación (20) la matriz de rigidez geométrica es

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1 \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2 \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_n \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_1 \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_k \partial u_{02}} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_2}{\partial u_n \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_1 \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_2 \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 F_n}{\partial u_n \partial u_k} u_k^{[1,0]} \right|_{\substack{t=0 \\ \varepsilon=0}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Notemos que esta matriz es diferente de la matriz de rigidez a imperfecciones, ec. (30), por lo que en general los modos de pandeo serán diferentes a los modos de imperfección. Sin embargo dependiendo de la formulación empleada y del tipo de solución lineal  $\mathbf{u}^{[1,0]}$  pueden existir situaciones donde ambas matrices sean iguales resultando por ende iguales los modos de imperfección y los modos de pandeo.

### 5 EJEMPLO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

Consideremos el siguiente modelo formado por dos resortes de constante  $k$  y longitud  $L$ , vinculados por una articulación que posee un resorte a rotación de constante  $c$ . Adoptaremos como grados de libertad para describir los desplazamientos del modelo al acortamiento  $\Delta$  del extremo superior y al ángulo  $\theta$  que cada resorte forma con su posición original indeformada. Asumiremos que el sistema presenta pequeñas imperfecciones definidas por los valores  $\Delta_0$  y  $\theta_0$ .

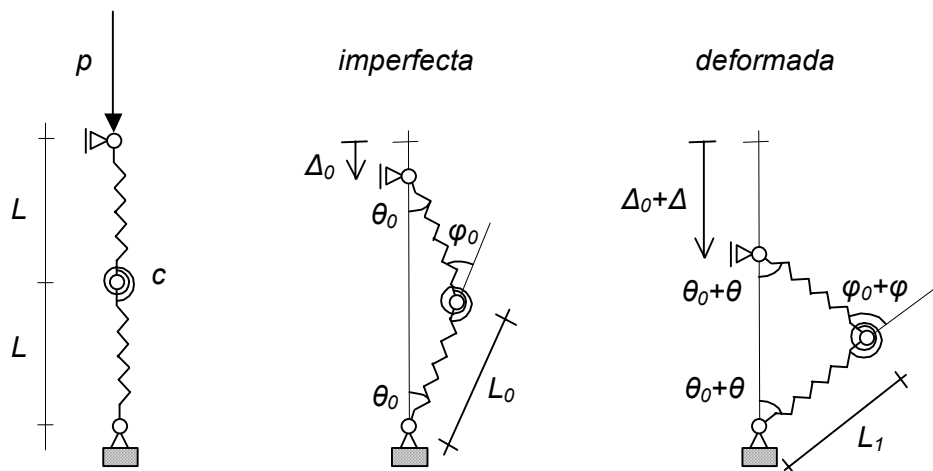


Figura 3: Modelo de dos grados de libertad.

La energía potencial del sistema imperfecto es

$$V = k(\Delta L)^2 + 2c\theta^2 - p\Delta \quad (45)$$

Donde  $\Delta L = L_1 - L_0$  es la variación de longitud de los resortes respecto a su estado indeformado. Definiendo las variables adimensionales  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $e$ , y los parámetros adimensionales  $\beta_0$ ,  $\delta_0$ , y  $\alpha$  como

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta}{2L} \\ \delta_0 &= \frac{\Delta_0}{2L} \\ \beta_0 &= \frac{L_0}{L} = \frac{1 - \delta_0}{\cos(\theta_0)} \\ e &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{L_1 - L_0}{L} = \frac{\beta_0 \cos(\theta_0) - \delta}{\cos(\theta_0 + \theta)} \\ \lambda &= \frac{p}{kL} \\ \alpha &= \frac{c}{kL^2} \end{aligned} \quad (46)$$

Luego es posible expresar la energía potencial como

$$V = kL^2(e^2 + 2\alpha\theta^2 - 2\lambda\delta) \quad (47)$$

Las ecuaciones de equilibrio vienen dadas por las derivadas primeras de la energía potencial respecto de las coordenadas generalizadas  $\theta$ ,  $\delta$ .

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = kL^2 \left( 2e \frac{\partial e}{\partial \theta} + 4\alpha\theta \right) = 0 \\ F_2 &= \frac{\partial V}{\partial \delta} = kL^2 \left( 2e \frac{\partial e}{\partial \delta} - 2\lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Que implica que deben verificarse las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda^2 \sin(\theta_0 + \theta) \cos(\theta_0 + \theta) - \lambda \beta_0 \sin(\theta_0 + \theta) + 2\alpha\theta &= 0 \\ \delta &= \beta_0 \cos(\theta_0) - \beta_0 \cos(\theta_0 + \theta) + \lambda \cos^2(\theta_0 + \theta) \end{aligned} \quad (49)$$

El modelo perfecto ( $\delta_0=0$ ,  $\theta_0=0$ ) tiene 3 tipos de soluciones según el valor de  $\alpha$ , en todos los casos existe una solución lineal que viene dada por

$$\begin{aligned} \delta &= \lambda \\ \theta &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Dependiendo del valor de  $\alpha$  tenemos dos bifurcaciones si  $\alpha \leq 0.125$  que son coincidentes para  $\alpha = 0.125$ . Si  $\alpha > 0.125$  aparecen dos soluciones aisladas que no intersectan al camino fundamental. En la figura 4 se muestran estos caminos en un diagrama de respuesta  $\lambda$ ,  $\theta$ .

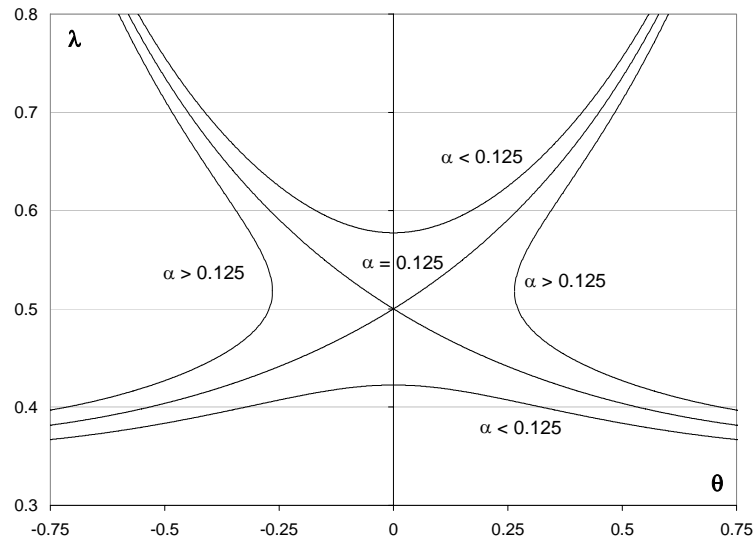


Figura 4: Respuestas del modelo perfecto

La matriz de rigidez tangente sobre la trayectoria fundamental ( $\delta=\lambda, \theta=0$ ) es

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \end{bmatrix} = 2kL^2 \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda + 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

y el vector  $\mathbf{p}$  de fuerzas externas generalizadas vale

$$\mathbf{p} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \end{Bmatrix} = kL^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Dado que la trayectoria fundamental es lineal los puntos críticos sobre ella solo pueden ser puntos de bifurcación para determinarlos debemos aplicar la condición de punto crítico que implica que el determinante de la matriz de rigidez tangente sobre este camino ( $\delta=\lambda, \theta=0$ ) debe ser nulo, resultando la ecuación:

$$\lambda_c^2 - \lambda_c + 2\alpha = 0 \quad (53)$$

Cuya solución son los valores críticos  $\lambda_c$  para el parámetro de cargas:

$$\lambda_c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}}{2} \quad (54)$$

Notemos que si  $\alpha > 0.125$  la raíz se torna imaginaria lo que implican que no existen puntos críticos sobre el camino fundamental que es siempre estable.

Para obtener una aproximación lineal al problema de autovalor usando al parámetro de cargas como parámetro del camino debemos obtener la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ . Para ello previamente debemos determinar  $\mathbf{u}^{[1,0]}$  de la ec. (23) resultando:

$$\mathbf{u}^{[1,0]} = \begin{Bmatrix} u_{\theta}^{[1,0]} \\ u_{\delta}^{[1,0]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Luego de la ec. (41) la matriz de rigidez geométrica es

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} & \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta^2} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} & \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta^2} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Resultando

$$\mathbf{K}_G = k L^2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Luego el problema linealizado de autovalor, ec. (43) nos dá un único valor aproximado de carga crítica  $\lambda_c = 2\alpha$ . En la tabla 1 se comparan los valores de carga crítica obtenidos por el problema linealizado versus los exactos.

$\alpha$	$\lambda_c$ exacto	$\lambda_c$ aprox.	error (%)
0.010	0.0204	0.02	-2.0
0.030	0.0641	0.06	-6.4
0.050	0.1127	0.10	-11.3
0.070	0.1683	0.14	-16.8
0.090	0.2354	0.18	-23.5
0.110	0.3268	0.22	-32.7
0.125	0.5000	0.25	-50.0

Tabla 1: Comparación de cargas críticas exactas y aproximadas.

Notemos que los errores del problema linealizado se incrementan con el parámetro  $\alpha$  llegando a ser un 50% inferiores cuando  $\alpha = 0.125$ . Para valores de  $\alpha$  mayores a 0.125 el problema linealizado sigue prediciendo cargas críticas aunque el camino fundamental sea estable y no tenga ningún punto crítico.

Para analizar el sistema imperfecto debemos determinar previamente la peor imperfección. Para ello calculamos la matriz de rigidez a imperfecciones  $\mathbf{K}_I$  de la ec.(33) como:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta_0 \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta_0 \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} & \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta_0 \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta_0 \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} \\ \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta_0 \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta_0 \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} & \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta_0 \partial \theta} u_{\theta}^{[1,0]} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta_0 \partial \delta} u_{\delta}^{[1,0]} \right) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \varepsilon=0}} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Resultando

$$\mathbf{K}_I = k L^2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Notemos que en este caso coinciden la matriz de rigidez a imperfecciones  $\mathbf{K}_I$  con la matriz

de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ . Por lo tanto son iguales los modos de imperfección a los modos de pandeo. Luego el problema de autovalor de modos de imperfección, ec. (34) nos dá el siguiente vector de peor imperfección:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \sqrt{4\alpha k L^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Luego adoptamos una imperfección inicial  $\mathbf{u}_0$  proporcional a la peor imperfección:

$$\mathbf{u}_0 = \varepsilon \mathbf{v} = \varepsilon \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

En la figura 5 vemos el comportamiento del modelo imperfecto para un valor fijo  $\alpha=0.128$  y para 3 valores de  $\varepsilon=0.001, 0.003$  y  $0.006$ .

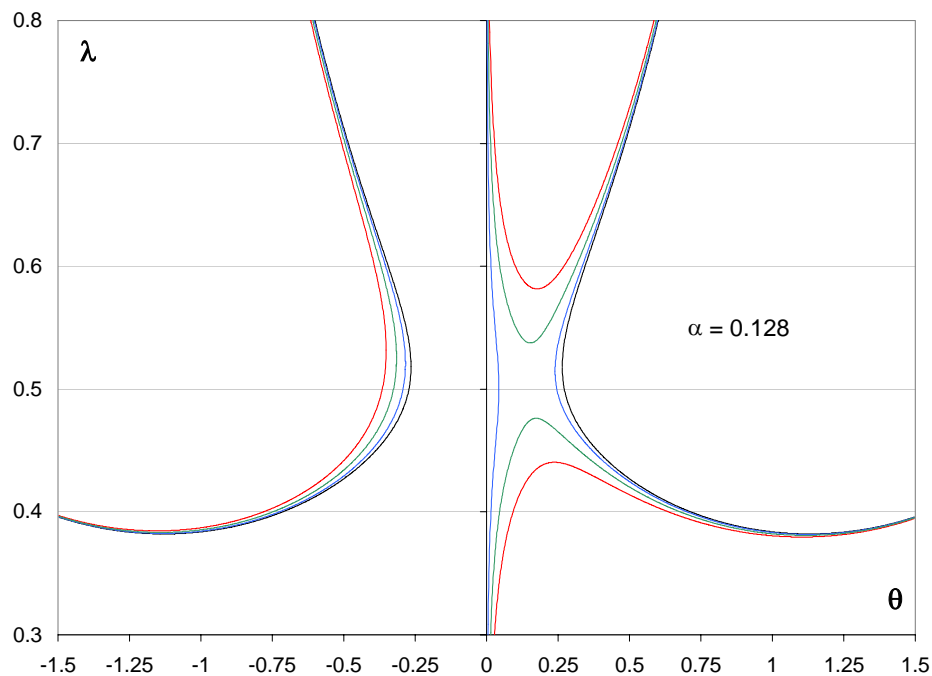


Figura 5: Respuestas del modelo imperfecto

Para una imperfección con amplitud  $\varepsilon=0.001$  el comportamiento apenas se aparta del modelo perfecto presentando una trayectoria fundamental completamente estable. Esto significa que si la amplitud de las imperfecciones se encuentran por debajo de este valor el modelo es estable para cualquier valor de carga. Sin embargo para  $\varepsilon=0.003$  el comportamiento varía completamente presentado un punto límite, aproximadamente para  $\lambda=0.48$ , representando esta la carga última del modelo. Para  $\varepsilon=0.006$  el comportamiento es similar presentado un punto límite para  $\lambda=0.44$  aproximadamente. Puede deducirse que para estas amplitudes el modelo presenta una moderada sensibilidad a las imperfecciones.

Debemos notar que pese a la variedad de comportamientos posibles, el problema clásico linealizado de autovalor (43) predice en todos los casos una carga crítica  $\lambda_c=0.256$ , sensiblemente inferior de la carga crítica real para amplitudes de imperfecciones superiores a 0.001 y no representativa del comportamiento real para imperfecciones menores a 0.001 ya que el modelo es estable para esa magnitud de imperfecciones.

## 6 CONCLUSIONES

El análisis de fallas por inestabilidad mediante los modos clásicos de pandeo no es suficiente para representar adecuadamente el comportamiento de ciertos sistemas estructurales.

Es necesario analizar el comportamiento estructural frente a diferentes magnitudes de imperfecciones geométricas para determinar el grado de estabilidad de la misma. Para ello es de fundamental importancia determinar la *peor imperfección* entre todas las posibles. Se ha presentado una metodología para determinar de manera precisa la forma geométrica de esta imperfección y se han introducido los *modos de imperfección*. Si bien para ciertos modelos estos modos de imperfección pueden coincidir con los modos de pandeo, no se puede asegurar que siempre sean iguales.

Debemos destacar que el presente análisis de imperfecciones tiene la limitación de basarse en un único modo de imperfección. Para ciertos tipos de cáscaras es posible que existan varios modos de imperfección asociados a un mismo autovalor mínimo, implicando que todos los modos coincidentes influyen aproximadamente de la misma manera. En este caso se produce un fenómeno de interacción que requiere un análisis más detallado que el aquí presentado.

## REFERENCES

- J.M.T. Thompson y G.W. Hunt. *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London, 1973.
- W.T. Koiter. *On the Stability of Elastic Equilibrium*, en holandés, Tesis Doctoral, Polytechnic Institute Delft, 1945.
- D. Ho. Buckling load of non-linear systems with multiple eigenvalues. *International Journal of Solids and Structures*, 10:1315–1330, 1974.
- A.D. Lanzo y G. Garcea. Koiter's analysis of thin-walled structures by a finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3007–3032, 1996.
- M. Deml y W. Wunderlich. Direct evaluation of the 'worst' imperfection shape in shell buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149:201-222, 1997.
- A.D. Kerr and M.T. Soifer, The Linearization of the Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads, *Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME*, **36**, 425-430, 1969.