

MODELO NO LOCAL DE DAÑO PARA SIMULAR EL COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN

M. E. Almenar^a, M. Luege^a y A. Orlando^a

^aCONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT, Av. Independencia 1800, 4000
S.M. de Tucumán, Argentina, almenarm@gmail.com, <http://www.herrera.unt.edu.ar/iest/>

Palabras Clave: Modelo no local; Modelo de daño dependiente del gradiente; ablandamiento; criterio de falla para hormigón.

Resumen. En los últimos años hubo mucho interés en modelar desde el punto de vista fenomenológico la respuesta de una gran cantidad de materiales empleados en ingeniería, como por ejemplo el hormigón. El interés se centró en modelar la pérdida progresiva de la rigidez al aumentar la carga hasta alcanzar la falla. Este proceso lleva inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. Desde el punto de vista matemático, ello implica la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio, obteniendo un problema mal puesto. Desde el punto de vista numérico la respuesta que brindan los modelos locales clásicos muestran una fuerte dependencia de los resultados con la malla elegida para resolver el problema. Para solucionar este problema, proponemos un modelo de daño continuo regularizado mediante una cantidad no local, adecuado para describir el comportamiento del hormigón. La variable daño escribe por lo tanto el proceso de deterioro del material y la cantidad no local introducida es el gradiente del daño. La resolución del modelo presentado se basa en la búsqueda del punto de silla de un funcional mixto, que representa la energía potencial del sistema. Finalmente el modelo es utilizado para la resolución de diversos ejemplos resaltando aspectos interesantes del modelo propuesto.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años hubo mucho interés en modelar desde el punto de vista fenomenológico la respuesta de una gran cantidad de materiales empleados en ingeniería, como por ejemplo el hormigón. El interés se centró en modelar la pérdida progresiva de la rigidez al aumentar la carga hasta alcanzar la falla. Este proceso lleva inevitablemente a una respuesta con ablandamiento. Desde el punto de vista matemático, ello implica la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio, obteniendo un problema mal puesto (Benallal et al., 1993). Desde el punto de vista numérico la respuesta que brindan los modelos que no regularizan este fenómeno muestran una fuerte dependencia de los resultados con la malla elegida para resolver el problema (Bazant et al., 1984).

Este problema puede ser abordado utilizando alguno de estos dos enfoques fenomenológicos: modelos discontinuos o modelos continuos regularizados. En los modelos discontinuos el ablandamiento es atribuido a fisuras discretas, dado a que la continuidad en las deformaciones es abandonada. Ejemplos del enfoque discontinuo son los modelos con elementos de interfaz (Lorentz, 2008); también pueden ser planteados modelos discontinuos utilizando métodos como X-FEM (ver Pietruszczak (2015), Luege et al. (2016), etc); entre otras posibilidades. Los modelos continuos regularizados pueden ser divididos a su vez en modelos locales y modelos no locales. Los modelos locales regularizan el problema introduciendo en sus leyes de ablandamiento cantidades relacionadas con el tamaño de la malla de elementos finitos (ver Mazars (1986), Lubarda et al. (1994), Comi (2001b), etc). Los modelos no locales regularizan el problema incorporando explícitamente en la formulación cantidades no locales, como por ejemplo el gradiente de alguna variable. La idea que se tiene al incorporar estas cantidades es que ante un proceso de daño la cantidad no local logre afectar a puntos vecinos dentro de una determinada zona. De este modo se logra obtener la misma evolución de la variable que describe el daño en el problema independientemente de la malla elegida (Frémond y Nedjar (1996), Nedjar (2001), Nedjar (2002), Lorentz y Godard (2011), Comi (2001a), etc).

En este trabajo se desarrolló un modelo de daño continuo no local, adecuado para describir el comportamiento del hormigón. La variable β describe el proceso de daño en el material y la cantidad no local introducida será el gradiente espacial del daño, $\nabla(\beta)$. Esta cantidad no local es introducida mediante la modificación del potencial de energía libre, lo que produce posteriormente una nueva ecuación de equilibrio mediante la aplicación del principio de potencias virtuales (ver Frémond y Nedjar (1996), Lorentz y Godard (2011)). La resolución de las ecuaciones de equilibrio a las que se arriba en este modelo se basa en el trabajo de Lorentz y Godard (2011). Para esto se realiza la búsqueda del punto de silla de un funcional mixto, que representa la energía potencial del sistema. La búsqueda del punto de silla de este funcional mixto conduce a una forma local de la condición de consistencia sencilla de resolver. Para representar adecuadamente el comportamiento en tracción y compresión del hormigón se introduce la función umbral propuesta en Lubliner et al. (1989). Finalmente el modelo es utilizado para la resolución de distintos ejemplos.

2. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Para tener en cuenta la degradación de la rigidez en el material se considera la variable de daño β que toma el valor 0 cuando el material se encuentra sano y 1 cuando se encuentra totalmente dañado. Para subsanar el problema al que lleva la reproducción de una respuesta con ablandamiento se decide introducir explícitamente en la formulación una cantidad no local como lo es el gradiente espacial del daño $\nabla(\beta)$. La introducción de esta cantidad en la formula-

ción se hace por medio del potencial de energía libre (ver Lorentz y Godard (2011) y Frémond y Nedjar (1996)). Durante el proceso de daño la cantidad no local afecta a una serie de puntos vecinos gracias a la ayuda de un parámetro $c > 0$ que controla indirectamente el ancho de localización del daño. De este modo la zona involucrada en el proceso de daño es siempre la misma independientemente de la malla elegida para resolver el problema.

2.1. Notación y consideraciones

En el siguiente desarrollo se utiliza la hipótesis de pequeños desplazamientos. Los vectores y tensores se denotan con letras en negrita. El producto escalar entre tensores se denota con “:”. El producto escalar entre vectores o entre tensor y vector se denota con “·”. El producto tensorial se denota con “ \otimes ”. La operación $\dot{\bullet}$ es la derivada en el tiempo de \bullet . La operación $\nabla(\bullet)$ es el gradiente espacial de \bullet . La operación $div(\bullet)$ es la divergencia de \bullet . El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es el gradiente simétrico del campo de desplazamientos \mathbf{u} .

2.2. Leyes constitutivas generales

En este modelo el estado del material queda definido por la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, y por el daño β mediante el potencial de energía libre global Ψ y el potencial de disipación global Φ del siguiente modo:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \Psi_2(\beta), \quad (1)$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) d\Omega, \quad \Psi_2(\beta) = \int_{\Omega} \frac{c}{2} (\nabla(\beta))^2 d\Omega,$$

$$\Phi(\dot{\beta}) = \int_{\Omega} \phi(\dot{\beta}) d\Omega, \quad (2)$$

donde ψ y ϕ son la función de energía libre local y el potencial de disipación local respectivamente; Ω denota el dominio del sólido analizado. Las funciones anteriores permiten realizar la formulación en el marco de los modelos estándar generalizados, consiguiendo una formulación termodinámicamente consistente. Para tal fin se exige a la función Ψ ser convexa con respecto a $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ y a β separadamente. Se exige también a la función Φ ser convexa y mínima en 0.

Las funciones anteriores permiten definir las cantidades escalares tensión global \mathcal{S} y fuerza global asociada al daño \mathcal{B} , por medio de las siguientes derivadas direccionales.

$$\mathcal{S}(\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \mathbf{E}) = D[\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)]\mathbf{E} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, \quad (3)$$

$$\mathcal{B}(\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \mathbb{B}) = -D[\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)]\mathbb{B} = \int_{\Omega} \mathcal{V} \mathbb{B} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla(\mathbb{B}) d\Omega, \quad (4)$$

$$\mathcal{V} = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)}{\partial \beta}, \quad \mathbf{A} = -c \nabla(\beta),$$

$$\mathcal{B} \in \partial \Phi(\dot{\beta}), \quad (5)$$

donde $D[\bullet(\circ)]\diamond$ es la derivada direccional de \bullet , centrada en \circ y en la dirección \diamond . \mathbf{E} es una función de test dado por un tensor de segundo orden compatible con el campo $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. \mathbb{B} es una función de test dado por un escalar compatible con el campo β . $\boldsymbol{\sigma}$ es la fuerza asociada termodinámicamente a $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ dada por un tensor de segundo orden, en adelante llamada tensión. \mathcal{V} y \mathbf{A} son la fuerza escalar y vectorial respectivamente asociadas termodinámicamente al campo

β . El operación $\partial\bullet$ denota la sub-diferencial o derivada generalizada de \bullet . El último requisito de los modelos estandar generalizados tiene que ver con el cumplimiento de la ecuación (5), la cual indica que la fuerza global asociada al daño \mathcal{B} debe estar contenida en el conjunto que representa la derivada generalizada del potencial de disipación $\Phi(\dot{\beta})$.

2.3. Aplicación del principio de las potencias virtuales

A partir de las ecuaciones (3) y (4) se puede definir la potencia virtual interna como:

$$\mathcal{P}_{int}(\delta\dot{\mathbf{u}}, \delta\dot{\beta}) = \mathcal{S}(\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\dot{\mathbf{u}})) + \mathcal{B}(\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \delta\dot{\beta}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{V} \delta\dot{\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \nabla(\delta\dot{\beta}) d\Omega, \quad (6)$$

donde el $\delta\bullet$ indica la variación de \bullet . En la ecuación (6) el primer término es clásico; el segundo término que depende de $\delta\dot{\beta}$ es el que tiene en cuenta la potencia de los micro movimientos producidos por el daño; el tercer término que depende de $\nabla(\delta\dot{\beta})$ es el que tiene en cuenta la participación de puntos vecinos en el proceso de daño.

Considerando que solo se tiene en cuenta fuerzas externas asociadas al campo de desplazamientos \mathbf{u} , se define la potencia virtual de las fuerzas externas como:

$$\mathcal{P}_{ext}(\delta\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \delta\dot{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad (7)$$

donde los vectores \mathbf{f} y \mathbf{F} son las fuerzas volumétricas y superficiales respectivamente. $\partial\Omega$ es el contorno de Ω .

Considerando el caso cuasiestático, de tal forma que la potencia virtual de las fuerzas de inercia no tienen incidencia, el principio de potencias virtuales se reduce a

$$\forall \delta\dot{\mathbf{u}}, \forall \delta\dot{\beta} \quad \mathcal{P}_{int}(\delta\dot{\mathbf{u}}, \delta\dot{\beta}) = \mathcal{P}_{ext}(\delta\dot{\mathbf{u}}) \quad \text{en } \Omega. \quad (8)$$

La ecuación (8) permite derivar las ecuaciones de equilibrio del problema, para esto se aplica integración por parte y se utiliza el teorema fundamental del cálculo variacional. También se tiene en cuenta la ecuación (5), con lo que llegamos a:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F} \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (9)$$

$$\mathcal{V} - \text{div}(\mathbf{A}) \in \partial\phi(\dot{\beta}) \quad \text{en } \Omega \quad \text{con} \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (10)$$

donde $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector normal unitario saliente a $\partial\Omega$.

La ecuación (10) no es clásica y describe la evolución del daño en el dominio Ω .

2.4. Resolución del modelo de manera local

En esta sección veremos lo que ocurre cuando el problema planteado se intenta resolver de la forma en la que se lo hace con modelos locales. En el sistema dado por las ecuaciones (9) y (10), es la última ecuación la que requiere un tratamiento más complejo. Si nos restringimos al caso de comportamiento material rate-independent, la ecuación (10) puede resolverse mediante el

cumplimiento de una regla de flujo y la condición de consistencia. Introducimos antes la siguiente notación:

$$y = \mathcal{V} - \text{div}(\mathbf{A}), \quad (11)$$

con lo que el cumplimiento de la ecuación (10) es equivalente a:

$$y \in \partial\phi(\dot{\beta}) \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = \epsilon \frac{df}{dy}(y), \\ f(y) \leq 0, \quad \epsilon \geq 0, \quad \epsilon f(y) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

adoptando en este caso:

$$f(y) = y + k, \quad (13)$$

$$\phi(\dot{\beta}) = k\dot{\beta} + \mathbb{I}_{R^+}(\dot{\beta}) \text{ con } \mathbb{I}_{R^+}(\dot{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{\beta} \geq 0, \\ +\infty & \text{si } \dot{\beta} < 0, \end{cases} \quad (14)$$

Si reemplazamos la definición de la fuerza vectorial asociada al daño indicada en la ecuación (4) en la ecuación (11), podemos sustituir $\text{div}(\mathbf{A})$ por $c\nabla^2\beta$ donde $\nabla^2\beta$ representa el Laplaciano del daño. En la ecuación (14) vemos que la función de disipación elegida es convexa y mínima en 0. Esta función de disipación contiene la función indicador \mathbb{I}_{R^+} , cuya misión es imponer la irreversibilidad del daño, pues vemos que para tener un valor coherente de disipación solo cabe la posibilidad $\dot{\beta} \geq 0$. La ecuación (13) es una función de daño. En esta vemos que el parámetro $k > 0$ actúa como un umbral. Si se reemplaza la ecuación (11) en la ecuación (13) se llega a:

$$f(\mathcal{V} - \text{div}(\mathbf{A})) = \mathcal{V} + c\nabla^2\beta - k, \quad (15)$$

donde vemos que la función de daño depende del la Laplaciano del daño $\nabla^2\beta$.

El problema a resolver finalmente queda descrito por las ecuaciones (9) y (12), sin embargo este enfoque no resulta tan atractivo de abordar por el difícil tratamiento que requiere el Laplaciano del daño en la función de daño.

3. FORMULACIÓN VARIACIONAL

El problema dado anteriormente no es sencillo de resolver de modo numérico debido a la presencia del término del Laplaciano del daño en la regla de flujo y en la condición de consistencia. El enfoque que a continuación se sigue para la resolución del problema se basa en el trabajo de Lorentz y Godard (2011). Dicho enfoque consiste en encontrar el punto de silla del funcional que representa la energía potencial del problema previa utilización del método de Euler implícito en el reemplazo de la derivada temporal del daño, es decir $\dot{\beta}$. Considerando que el tiempo transcurrido para pasar del paso de carga N al $N + 1$ es Δt , la energía potencial total y la posterior búsqueda del punto de silla para encontrar los campos incógnitas al final del paso \mathbf{u}^{N+1} y β^{N+1} están dados por:

$$P(\mathbf{u}, \beta, \beta^N) = \Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \Psi_2(\beta) + \Delta t \Phi \left(\frac{\beta - \beta^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}), \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^{N+1} = \underset{\mathbf{u}}{\text{argmin}} P(\mathbf{u}, \beta^{N+1}, \beta^N), \quad \beta^{N+1} = \underset{\beta}{\text{argmin}} P(\mathbf{u}^{N+1}, \beta, \beta^N), \quad (17)$$

donde $\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u})$ es el trabajo de las fuerzas externas (ver ecuación (7)).

Para evitar problemas a la hora de buscar el punto de silla del funcional de la ecuación (16) se hace la siguiente propuesta. La idea principal es introducir un campo auxiliar $\alpha \in L^2(\Omega)$ que se asume igual al campo de daño $\beta \in H^1(\Omega)$ y se reescribe la energía potencial total:

$$P\alpha(\mathbf{u}, \beta, \alpha, \alpha^N) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi_2(\beta) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}). \quad (18)$$

Para dar coercibilidad, se añade un término penalizador con $r > 0$. Este término no tiene influencia en tanto se cumpla la condición $\alpha = \beta$, obteniendo:

$$P\alpha r(\mathbf{u}, \beta, \alpha, \alpha^N) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi_2(\beta) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \frac{r}{2} (\beta - \alpha)^2 d\Omega. \quad (19)$$

La restricción $\alpha = \beta$ se consigue utilizando el método de Lagrange aumentado, llegando a:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \beta, \lambda, \alpha, \alpha^N) = \Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi_2(\beta) + \Delta t \Phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) - \mathcal{P}_{ext}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \frac{r}{2} (\beta - \alpha)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda (\beta - \alpha) d\Omega. \quad (20)$$

En este último funcional mixto $\lambda \in L^2(\Omega)$ es el multiplicador de Lagrange. El problema finalmente se reduce a encontrar el punto de silla de este último funcional, que equivale a resolver el sistema de ecuaciones de las derivadas direcciones del funcional respecto de cada variación de los campos incógnitas igualadas a 0. En este caso cada una de las ecuaciones obtenidas del modo antes indicado representa la forma débil de la ecuación de equilibrio correspondiente al campo respecto del cual se calcula la derivada direccional. Finalmente el sistema a resolver es:

$$\forall \delta \mathbf{u} \in KA \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, \quad (21)$$

$$\forall \delta \beta \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} c \nabla(\beta) : \nabla(\delta \beta) d\Omega + \int_{\Omega} r(\beta - \alpha) \delta \beta d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta \beta d\Omega = 0, \quad (22)$$

$$\forall \delta \lambda \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} (\beta - \alpha) \delta \lambda d\Omega = 0, \quad (23)$$

$$\forall \delta \alpha \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} \mathcal{V}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) \delta \alpha d\Omega + \int_{\Omega} r(\beta - \alpha) \delta \alpha d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta \alpha d\Omega \in \int_{\Omega} \Delta t \partial_{\alpha} \left[\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) \right] \delta \alpha d\Omega, \quad (24)$$

donde KA es el campo cinemáticamente admisible correspondientes a los desplazamientos \mathbf{u} .

A continuación se expresa en forma fuerte la ecuación (24). Para esto se opera su correspondiente forma débil y se utiliza el lema fundamental del calculo variacional , obteniéndose

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \mathcal{V}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + r(\beta - \alpha) + \lambda \in \Delta t \partial_{\alpha} \left[\phi \left(\frac{\alpha - \alpha^N}{\Delta t} \right) \right]. \quad (25)$$

De la manera antes desarrollada el problema queda definido por las ecuaciones (21), (22), (23) y (25). Las tres primeras ecuaciones representan las formas débiles de las ecuaciones de equilibrio para los campos de desplazamientos \mathbf{u} , daño β y multiplicadores de Lagrange λ respectivamente. Para resolver estas ecuaciones deben ser linealizadas con el método de Newton-Raphason y discretizadas espacialmente por el método de los elementos finitos. En la elección del tipo de elementos finitos que discretiza a cada campo hay que tener en cuenta que aparte de soportar las derivadas que exige la formulación, los mimos deben cumplir con la condición inf-sup, por encontrarnos en presencia de un funcional mixto. La ecuación (25) representa la forma fuerte de la ecuación que rige el campo α . La ecuación (25) puede resolverse como se indicó en la sección (2.4), es decir mediante el uso de una regla de flujo y una condición de consistencia (ecuación (12)). La gran diferencia con el tratamiento clásico es que la modificación de la energía potencial total conduce a una ecuación que rige la evolución del daño (ecuación (25)) que no depende del laplaciano del daño $\nabla^2 \beta$, sino que depende de cantidades sencillas de actualizar en el proceso iterativo de la resolución de cada paso de carga. Si se compara la ecuación (11) con el primer término de la ecuación (25) vemos que el laplaciano del daño es reemplazado por el término $r(\beta - \alpha) + \lambda$, que resultan en este último caso cantidades mucho más fácil de actualizar en el proceso iterativo.

Para lograr el cumplimiento de la ecuación (25), es decir que el primer término esté contenido en la derivada generalizada que aparece en el segundo término se considera comportamiento del material rate-independent pudiendo aplicar la ecuación (12), tenemos entonces:

$$\begin{cases} \text{si } \mathcal{V}^*(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha^N) + r(\beta - \alpha^N) + \lambda - k \leq 0 & \text{entonces } \alpha = \alpha^N, \\ \text{si no, encuentre } \alpha \geq \alpha^N & \text{tal que } \mathcal{V}^*(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + r(\beta - \alpha) + \lambda - k = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Note que \mathcal{V} fue reemplazado por \mathcal{V}^* . Esta modificación permite incluir en la ecuación que gobierna la evolución del daño criterios específicos para el material que se quiere representar. En la sección (4.3) se explicará su diferencia.

4. PARAMETROS DEL MODELO Y ELECCIÓN DE LEYES CONSTITUTIVAS

4.1. Parámetros introducidos durante la formulación

La formulación del modelo de daño antes descrito requiere el conocimiento de parámetros necesarios para su funcionamiento. Dichos parámetros son: c este parámetros controla la influencia del gradiente del daño en la formulación y es introducido en la definición del potencial de energía libre global $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)$ de la ecuación (1), k el umbral de la función de daño y es introducido al elegir la forma de la función de daño que cumple con la regla de flujo y la condición de consistencia (ver ecuación (13)), r es un parámetro penalizador que se añade en un término que modifica a la energía potencial total (ver ecuación (19)). Los parámetros k y c pueden ser correlacionados a datos obtenidos de ensayos experimentales mediante un análisis unidimensional que se propone en Lorentz y Godard (2011). En dicho trabajo también se indica

que el valor del penalizador r debe ser el mayor posible, siempre y cuando no provoque inestabilidad numérica durante el proceso de resolución, proponiendo una relación con el umbral k corroborada numéricamente. Las relaciones usadas para los parámetros introducidos durante la formulación son:

$$k = \frac{3 G_f}{4 D}, \quad c = \frac{1}{2} k D^2, \quad r = 10^3 k, \quad (27)$$

donde G_f es la energía de fractura y D es el semiancho de localización. El semiancho de localización D es la semi longitud donde se concentra el daño sufrido por el material representando a una fisura que se propaga. El valor de D deber ser elegido en principio como mucho más pequeño que la máxima dimensión de la estructura que se desea resolver.

4.2. Función de rigidez

La función de rigidez es la encargada del deterioro progresivo de la rigidez del material y se elige introducirla dentro de la función de energía libre local (ver ecuación (1)) del siguiente modo:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) = R(\beta) \varpi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \quad (28)$$

donde $R(\beta)$ es la función de rigidez y $\varpi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ es la función de energía elástica.

A partir de las ecuaciones (28), (3) y (4) podemos definir la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y a la fuerza escalar termodinámicamente asociada al daño \mathcal{V} como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = R(\beta) \frac{\partial \varpi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = R(\beta) \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (29)$$

$$\mathcal{V} = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta)}{\partial \beta} = -\frac{dR(\beta)}{d\beta} \varpi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \quad (30)$$

donde el tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}_0$ es la tensión sin dañar.

El empleo de funciones de rigidez da más versatilidad que el clásico valor utilizado $(1 - \beta)$. Las función de rigidez permite controlar la forma de la curva carga desplazamiento por calibración de los parámetros que en ella interviene independientemente del criterio de daño que se haya adoptado. Como se ve en la ecuación (29), la función de rigidez adopta el sentido físico que en otros modelos se le da al daño, la función de rigidez vale 1 cuando el material está sano y 0 cuando se encuentra totalmente dañado. Por esta introducción, el daño pierde el sentido físico que se le suele dar en instancias intermedias, convirtiéndose en una variable incorporada solo con fines matemáticos. Desde el punto de vista estrictamente matemático, la función de rigidez controla la distribución del daño dentro del semiancho de localización D . Dicho de otro modo, en este modelo el “ancho de una fisura” queda representado por el semiancho de localización D , en este ancho el valor del daño debe tener una transición suave desde el centro hasta las fronteras. La función encargada de dar dicha transición, de tal forma de no tener inconvenientes durante el proceso numérico de resolución, es la función de rigidez.

La función de rigidez adoptada es la propuesta en el trabajo de [Lorentz y Kazymyrenko \(2014\)](#)

$$R(\beta) = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 - \beta)^2 + \frac{3 E G_f}{2 f_t^2 D} \beta (1 + p \exp(q\beta^2))}, \quad (31)$$

donde p y q son parámetros que controlan la rama de ablandamiento en una curva carga desplazamiento. Los parámetros materiales E y f_t son respectivamente el módulo de Young y la resistencia a tracción uniaxial.

4.3. Criterio de daño adoptado en la formulación

En esta sección se explica el criterio de daño que se utiliza y de que modo se introduce en la formulación para poder representar el comportamiento del material con el que se desea trabajar (en este caso hormigón). La introducción del criterio de daño se inspira en el trabajo de [Lorentz y Kazymyrenko \(2014\)](#). En dicho trabajo se sustituye la fuerza escalar asociada al daño \mathcal{V} (ver ecuación (4)) por una función \mathcal{V}^* definida implícitamente por algún criterio de daño. Al hacer esta modificación en [Lorentz y Kazymyrenko \(2014\)](#) se elige un criterio de fluencia definido por una función convexa y se toma como punto de referencia la falla en tracción uniaxial tanto para la formulación definida por \mathcal{V} como por \mathcal{V}^* . Las fallas correspondientes a otras direcciones quedan determinadas entonces por el criterio de daño. En este trabajo seguiremos la idea de [Lorentz y Kazymyrenko \(2014\)](#) para la introducción del criterio de daño, con la diferencia de que la función \mathcal{V}^* quedará definida explícitamente por el criterio de daño utilizado. Esto trae ventajas simplificando la linealización del problema para su posterior resolución numérica. La función \mathcal{V}^* queda definida entonces de modo explícito por:

$$\mathcal{V}^* = \frac{dR(\beta)}{d\beta} \varpi^*, \quad (32)$$

$$\varpi^* = \frac{1}{2E} [\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}_0)]^2, \quad (33)$$

donde \mathcal{C} es una función que responde a algún criterio de daño en términos de la tensión sin dañar $\boldsymbol{\sigma}_0$.

El criterio de daño que se elige para este trabajo es el propuesto en [Lubliner et al. \(1989\)](#)

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{1}{\ell_1(1-\ell_2)} \left(\sqrt{2J_2} + \ell_2 I_1 + \ell_3 \langle \sigma_{0max} \rangle^+ \right), \quad (34)$$

$$\text{con } \ell_3 = \ell_1(1 - \ell_2) - (1 + \ell_2),$$

donde I_1 es el primer invariante, J_2 es el segundo invariante del tensor desviador y σ_{0max} es el máximo autovalor. Las tres cantidades antes mencionadas se calculan sobre $\boldsymbol{\sigma}_0$. La función positiva vale $\langle \bullet \rangle^+ = \frac{1}{2}(\bullet + |\bullet|)$. Los parámetros ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 se ajustan mediante ensayos. A continuación se indica que representa cada uno y se dan valores típicos para el caso de hormigón. El parámetro ℓ_1 indica la relación entre la resistencia uniaxial a compresión y tracción, es decir $\ell_1 = f_c/f_t$. El valor de ℓ_1 anda al rededor de 10. El parámetro ℓ_2 es una relación entre la resistencia a compresión uniaxial y equibiaxial, este valor varía entre $0,08 < \ell_2 < 0,12$. El parámetros ℓ_3 es el encargado de regular la relación entre la resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el primer límite de discontinuidad. El valor de ℓ_3 está dado por la ecuación (34) y resulta aproximadamente 7,66. Para más detalle sobre los parámetros ver [Lubliner et al. \(1989\)](#).

Tabla 1: Datos de mallas para la probeta trapecial

-	Elementos regulares	Elementos totales	Nodos totales
Malla T-A	$\frac{1}{2}$	200	1118
Malla T-B	1	543	2896
Malla T-C	2	1417	7380
Malla T-D	4	3812	19574
Malla T-F	8	7603	38910
Malla T-F	16	22792	115626

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para la resolución de los siguientes ejemplos se adopta en la ecuación (28) una función de energía elástica dada por:

$$\varpi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (35)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 + \mu} \mathbf{I} + \frac{\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta},$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo de cuarto orden para material isótropo y homogéneo, \mathbf{I} y $\boldsymbol{\delta}$ son los tensores identidad de cuarto y segundo orden respectivamente. E es el módulo de Young y μ es el coeficiente de Poisson.

Todos los ensayos que se presentan a continuación se realizan en estado plano de tensiones utilizando un espesor de 1 mm. Como se indica en la sección (3), los elementos finitos elegidos para discretizar cada campo deben cumplir la condición inf-sup. Por este motivo para desplazamientos se utilizan triángulos de 6 nodos y para daño y multiplicadores de Lagrange se utilizan triángulos de 3 nodos. A continuación realizamos algunos ensayos numéricos con el objetivo de probar la formulación propuesta y mostrar la incidencia en la respuesta de algunos de sus parámetros.

5.1. Ensayo en probeta trapecial: Test de convergencia en trapecio

A continuación presentamos el ensayo de una probeta trapecial con una entalla. El objetivo del ensayo es ir refinando la malla para mostrar que la zona dañada se encuentra dentro del semiancho de localización D . También se muestra que la respuesta va presentando menos diferencia respecto de la anterior a medida que se refina la malla.

La probeta presentada en la figura (1) tiene simetría respecto de un eje horizontal por lo que las mallas solo representan la mitad superior. Las mallas utilizadas tiene una determinada cantidad de elementos dispuestos en forma regular conformando cuadrados en la zona donde se propaga el daño y hasta la longitud terminada por el semiancho de localización D . En la tabla (1) indicamos la cantidad de elementos regulares dentro del semiancho D y la cantidad total de elementos y nodos para cada malla.

Los parámetros con los que se realizan estos ensayos son:

- Parámetros elásticos $E = 30000 \text{ Mpa}$, $\mu = 0,20$.

- Parámetros de la función de rigidez $D = 5,00E - 02 \text{ m}$, $G_f = 1,00E - 04 \text{ Mpam}$, $f_t = 3,00 \text{ Mpa}$, $p = 2$, $q = 0$.
- Parámetros del criterio de daño $\ell_1 = 10$, $\ell_2 = 0,10$.

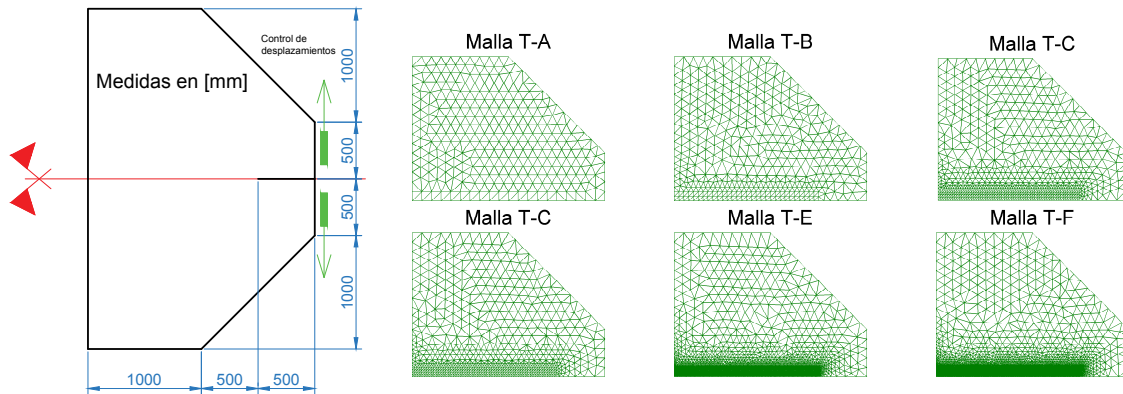


Figura 1: Geometría, condiciones de carga y apoyo y malla para probeta trapecial

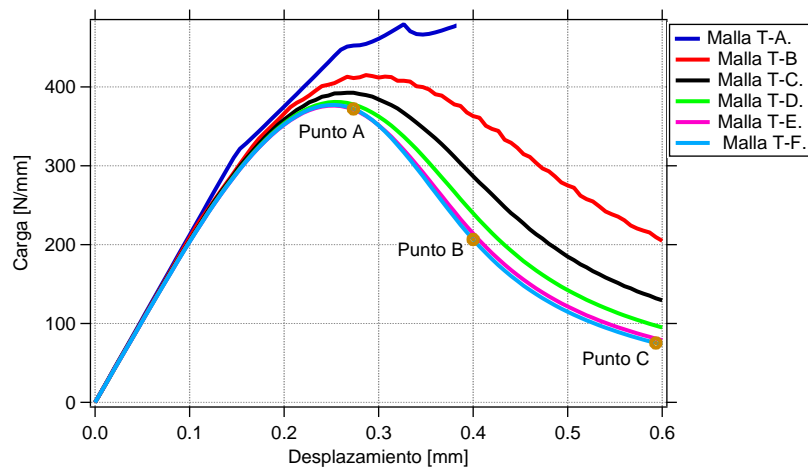


Figura 2: Carga vs desplazamiento para probeta trapecial

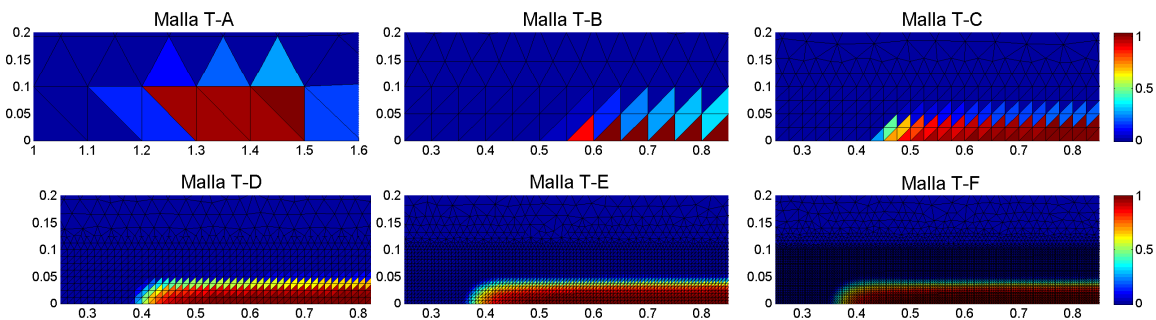


Figura 3: Mapa de $(1 - R)$ para probeta trapecial

La figura (3) muestra los mapas de $(1 - R)$ obtenidos para las distintas mallas en la zona donde se propaga el daño y para el máximo desplazamiento mostrado en la figura (2). En la

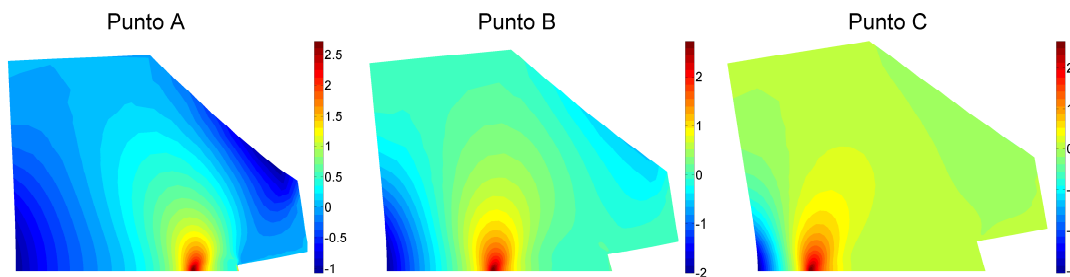


Figura 4: Tensión vertical para probeta trapecial correspondientes a la Mesh T-F. Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$

figura (4) se muestran los mapas de tensión vertical obtenidos para la Malla T-F y para los Punto A, Punto B y Puntos C indicados en la figura (2).

Como se muestra en la figura (3) la zona donde se concentra el daño queda definida por el semiancho de localización D . En cada caso se nota que solo una fila de elementos por encima del semiancho D tiene una pequeña participación del proceso de daño. En la figura (2) notamos que para el caso de la Malla T-A no obtenemos congerencia por parte del modelo pasando el pico del ensayo. Recalcamos que para esta malla solo la mitad de un elemento está contenida en el semiancho de localización D . Para las otras mallas, si bien la zona de daño siempre se concentra en la zona indicada por el semiancho de localización D , notamos que las respuestas se van acercando cada vez más entre si a medida que se refina la malla. Creemos que una de las razones por las que a medida que se tiene una malla más fina la curva se encuentra más por debajo es porque se hace menos influyente la fila de elementos que se encuentra por encima del semiancho de localización.

5.2. Viga Rilem: Energía libre y función de rigidez

En este ejemplo se ensayan vigas Rilem variando la energía de fractura G_f y el parámetros de la función de rigidez p con el objetivo de estudiar su influencia en la respuesta.

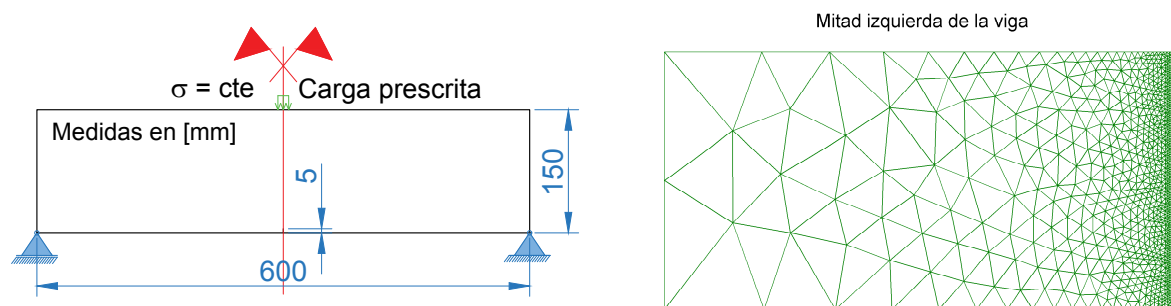


Figura 5: Geometría, condiciones de carga y apoyo y malla para viga Rilem

La probeta presentada en la figura (5) tiene simetría respecto de un eje vertical por lo que la malla solo representa la mitad izquierda. La malla utilizada tiene 2653 elementos y 13794 nodos.

Los parámetros con los que se realizan estos ensayos son:

- Parámetros elásticos $E = 36500 \text{ Mpa}$, $\mu = 0,18$.
- Parámetros de la función de rigidez $D = 5,00E - 02 \text{ m}$, $G_{f1} = 5,00E - 06 \text{ Mpam}$, $G_{f2} = 1,00E - 05 \text{ Mpam}$, $G_{f3} = 2,00E - 05 \text{ Mpam}$, $G_{f4} = 3,00E - 05 \text{ Mpam}$, $G_{f5} = 5,00E - 05 \text{ Mpam}$, $f_t = 3,00 \text{ Mpa}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 8$, $q = 0$.

- Parámetros del criterio de daño $\ell_1 = 25$, $\ell_2 = 0,10$.

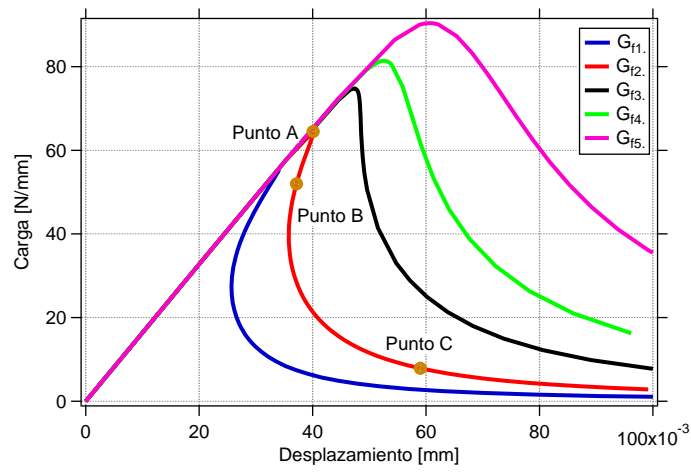


Figura 6: Carga vs desplazamiento para viga Rilem. Comparación de Energía de Fractura

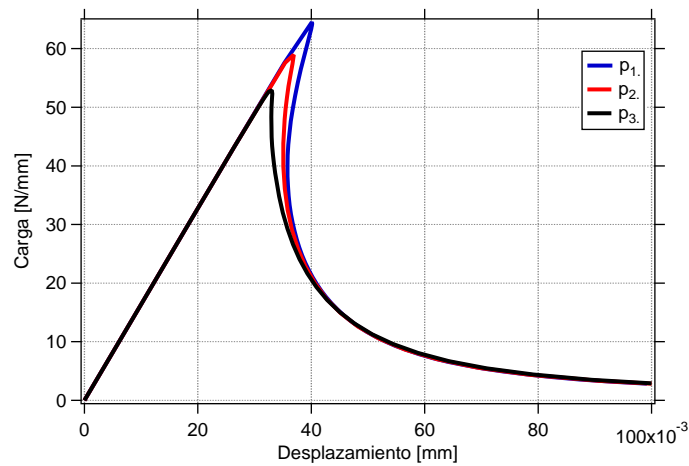


Figura 7: Carga vs desplazamiento para viga Rilem. Comparación parámetro p de función de rigidez

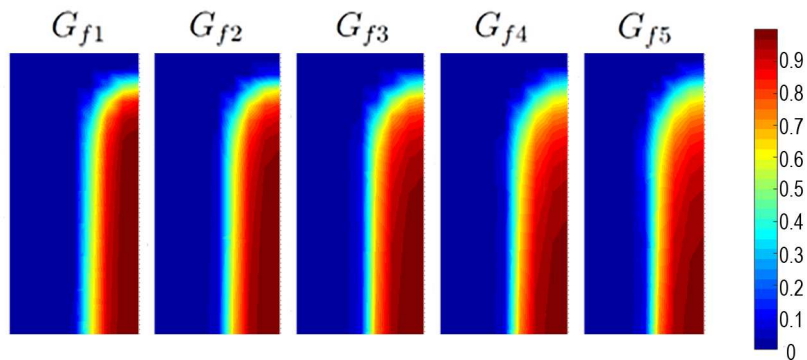


Figura 8: Mapa de $(1 - R)$ para viga Rilem. Comparación de Energía de Fractura

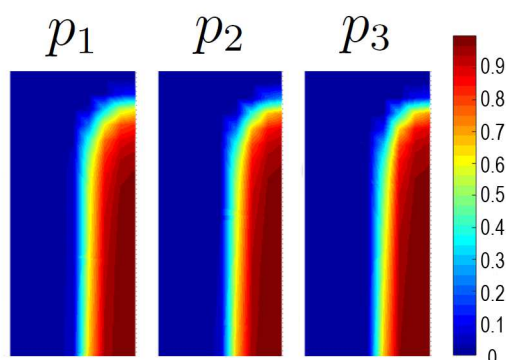


Figura 9: Mapa de $(1 - R)$ para viga Rilem. Comparacion parametro p de funcion de rigidez

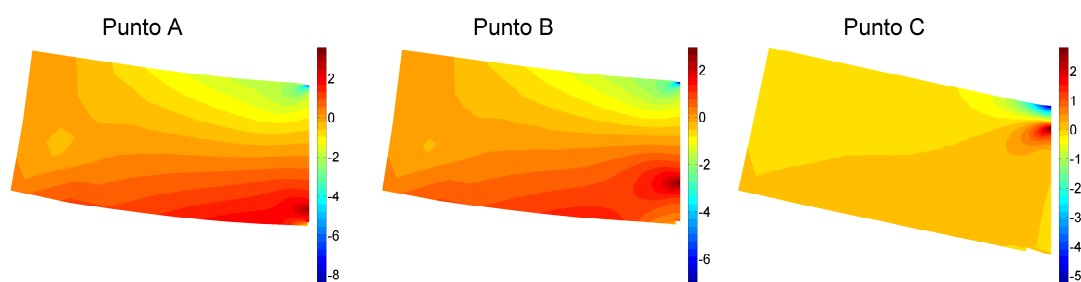


Figura 10: Tensión horizontal para viga Rilem G_{f2} . Factor de amplificación de desplazamientos $1E^{03}$

La figura (6) muestra las curvas carga desplazamiento para distintas energías de fracturas G_f . En correspondencia se obtiene los mapas de $(1 - R)$ de la figura (8). La figura (7) muestra las curvas carga desplazamiento para los distintos parámetros p de la función de rigidez. En correspondencia se obtiene los mapas de $(1 - R)$ de la figura (9). Las curvas carga desplazamiento de las figuras (6) y (7) se realizaron con control de carga hasta al pico y luego se continuó con control de disipación, puesto a que algunas de ellas presentan ramas de snap-back. Para poder realizar el control de disipación en un paso de carga se incorpora al sistema de ecuaciones que define el problema una ecuación denominada condición path-following. Dicha ecuación responde al trabajo de Verhoosel et al. (2009). La figura (10) muestra los mapas de tensión horizontal en los Punto A, Punto B y Punto C indicados en la figura (6) correspondientes a G_{f2} .

En la figura (6) se observa como al aumentar la energía de fractura se incrementa el pico del ensayo y se pasa de un comportamiento porstpico con presencia de una rama de snap-back, para las energías más bajas, a un comportamiento donde no se presenta dicha rama para energías más altas. En en la figura (8), en relación también a la energía de fractura, se observa como al ir aumentando su valor la zona de transición desde el estado totalmente dañado hasta un estado sin daño ,en la cabeza de la fisura, se hace más amplia. Es razonable pensar que al incrementarse esta zona de transición la viga puede resistir más y presentar un comportamiento postpico no tan frágil. En la figura (7) se observa como al aumentar el valor del parámetro p disminuye el pico del ensayo y se pasa de un comportamiento porstpico con presencia de una rama de snap-back, para el parámetro de valor más bajo, a un comportamiento donde no se presenta dicha rama para el valor más alto del parámetro. En en la figura (9), en relación también al parámetro p , se observa como al ir aumentando su valor la zona de transición desde el estado totalmente dañado hasta un estado sin daño en sentido transversal a la fisura se hace más abrupta.

6. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este trabajo se propone un modelo de daño no local enmarcado en la teoría de daño continuo. Para solucionar el problema de la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de equilibrio al reproducir el ablandamiento, en la sección (2), podemos ver como se incluye en la formulación una cantidad no local, que en este caso es el gradiente espacial del daño dentro del potencial de energía libre global Ψ . La resolución del problema se encara mediante la búsqueda del punto de silla de un funcional mixto que representa la energía potencial total, como se ve en la sección (3). Con dicho enfoque se logra obtener el sistema de ecuaciones de equilibrio que definen el problema y en particular una ecuación que gobierna la evolución del daño (ecuación (26)) que resulta más sencilla de tratar que la obtenida con el enfoque clásico aplicada en modelos locales, como se ve en la sección (2.4). Se logra incluir también dentro de la formulación un criterio de daño adecuado para la representación del comportamiento del hormigón mediante la modificación de la fuerza escalar asociada termodinámicamente al daño \mathcal{V}^* , como se ve en la sección (4.3). En la sección (5) probamos la formulación en la reproducción de algunos ejemplos numéricos, reproducidos de forma satisfactoria. En particular, en la sección (5.1) reproducimos un ensayo numérico en una probeta de sección trapezoidal donde observamos como al ir refinando la malla, la zona dañada se encuentra siempre delimitada por el semiancho de localización D , indicando una buena regularización por parte del gradiente del daño. También observamos que para obtener convergencia en la resolución numérica al menos un elemento finito debe estar contenido en D . En la sección (5.2) observamos la influencia sobre la respuesta de los parámetros G_f y p en un ensayo numérico realizado a una viga Rilem. En el caso de la energía de fractura G_f observamos como al ir aumentando su valor aumenta el pico del ensayo y en el pospico se pasa de una respuesta con una rama de snap-back a otra donde desaparece dicha rama. En el caso del parámetro p al ir aumentando, disminuye el pico y en la respuesta pospico desaparece la rama de snap-back.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido soportado financieramente por CONICET y el proyecto PICT 2011-0094.

REFERENCIAS

- Bazant Z.P., Belytschko T.B., y Chang T.P. Continuum theory for strain-softening. *J. Eng. Mech.*, 110(12):1666–1692, 1984. doi:10.1061/(asce)0733-9399(1984)110:12(1666).
- Benallal A., Billardon R., y Geymonat G. Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, páginas 1–44, 1993.
- Comi C. A non-local model with tension and compression damage mechanisms. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(1):1–22, 2001a.
- Comi ClaudiaPerego U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 38(36-37):6427–6454, 2001b.
- Frémond M. y Nedjar B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103, 1996.
- Lorentz E. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(2):302–317, 2008.
- Lorentz E. y Godard V. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(21-22):1927–1944, 2011.

- Lorentz E. y Kazymyrenko K. Application of a nonlocal damage law to model concrete fracture. En *Computational Modelling of Concrete Structures - Proceedings of EURO-C 2014*, volumen 1, páginas 209–217. 2014.
- Lubarda V., Krajcinovic D., y Mastilovic S. Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. *Engineering Fracture Mechanics*, 49(5):681–697, 1994.
- Lubliner J., Oliver J., Oller S., y Oñate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299–326, 1989.
- Luege M., Lucero J., Torrijos C., y Orlando A. Coupled mechanical and fluid flow analysis in fractured saturated porous media using the xfem. *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8):4480–4504, 2016.
- Mazars J. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):729–737, 1986.
- Nedjar B. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 38(30-31):5421–5451, 2001.
- Nedjar B. A theoretical and computational setting for a geometrically nonlinear gradient damage modelling framework. *Computational Mechanics*, 30(1):65–80, 2002.
- Pietruszczak Stanislaw Haghghat E. Modeling of fracture propagation in concrete structures using a constitutive relation with embedded discontinuity. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 36(4), 2015.
- Verhoosel C.V., Remmers J.J.C., y Gutiérrez M.A. A dissipation-based arc-length method for robust simulation of brittle and ductile failure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(9):1290–1321, 2009.