

ESTRATEGIAS DE IMPLEMENTACIÓN DE LÍMITES INFERIORES PARA PANDEO DE TANQUES BAJO VIENTO

Rossana C. Jaca ^a, Eduardo M. Sosa ^b y Luis A. Godoy ^c

^a *Grupo de Métodos Numéricos y Experimentales, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires
1400, 8300 Neuquen, Argentina, rjaca@uncoma.edu.ar*

^b *Department of Mechanical and Aerospace Engineering, West Virginia University, Morgantown, WV,
USA, emsosa@mail.wvu.edu*

^c *Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba,
Argentina, lgodoy@com.uncor.edu*

Palabras Clave: Cáscaras, Elementos Finitos, Energía reducida, Pandeo, Viento.

Resumen. Este trabajo analiza el pandeo elástico y comportamiento poscrítico de tanques de almacenamiento de pared delgada con techo cónico que exhiben problemas de inestabilidad del equilibrio bajo la acción del viento. Este tipo de tanques están destinados al almacenamiento de petróleo, combustibles o agua. En el estudio se realizan simulaciones computacionales mediante un programa de propósitos múltiples (ABAQUS) usando elementos de cáscara. El análisis se realiza en base a la teoría de límites inferiores basada en el modelo de energía reducida de la cáscara, desarrollado originalmente por Croll y colaboradores. Esta metodología representa una manera alternativa de analizar la disminución de las cargas críticas en problemas que son sensibles a imperfecciones iniciales. Sobre modelos de tanques con diferentes relaciones geométricas se realizaron análisis clásicos de pandeo mediante autovalores y análisis no lineal con seguimiento de trayectorias más allá de la carga crítica considerando imperfecciones iniciales. Para las mismas estructuras, la evaluación de límites inferiores a cargas críticas se realiza por dos caminos diferentes: por un lado planteando la eliminación de las componentes de energía que resultan estabilizantes y por otro modificando la rigidez membranal por un coeficiente de reducción. Si bien ambas metodologías dan resultados adecuados para cargas axilsimétricas, al estar sometidas a cargas de viento (no axilsimétrica), la hipótesis de que el mismo modo que se computa en el análisis clásico es el que conduce a la inestabilidad con análisis no lineal deja de ser cierta.

1 INTRODUCCION

El pandeo es un fenómeno no-lineal en el que la estructura no puede tomar más carga con la misma geometría y cambia su forma para encontrar posiciones de equilibrio alternativas (Godoy, 2000). Las herramientas computacionales que se utilizan más frecuentemente en el pandeo de cáscaras son el análisis de autovalores (para identificar la bifurcación de trayectorias de equilibrio) y el análisis no-lineal (para seguir las trayectorias de equilibrio más allá del estado crítico). Además, el pandeo de cáscaras puede ser sensible a imperfecciones iniciales que producen una caída de la carga crítica (Koiter, 1945). Esta disminución puede ser moderada, como en cilindros cargados lateralmente y en cilíndricos rebajados, o severa, como en cilindros cargados axialmente y cáscaras esféricas presurizadas.

En las últimas décadas se han desarrollado diversas metodologías para tener en cuenta la sensibilidad ante imperfecciones, y uno de los enfoques más interesantes orientado al diseño de cáscaras es la teoría de límites inferiores, basada en modelos de energía reducida de la cáscara (también conocido como modelo de rigidez reducida) originalmente desarrollado por Croll y colaboradores (1975, 1995). En la teoría de energía reducida es necesario identificar las componentes de energía de la cáscara en el modo crítico clásico, incluyendo las componentes membranal, flexional y el potencial de las cargas. Dependiendo de la cáscara y del sistema de cargas, algunas de las contribuciones a la segunda variación de la energía potencial total son positivas y otras son negativas, indicando que son componentes estabilizantes o desestabilizantes. La hipótesis principal es que las componentes estabilizantes (positivas) pueden perderse debido a la presencia de imperfecciones. De manera que la aproximación de energía reducida usa una versión simplificada de la energía en la que algunas componentes estabilizantes se eliminan en el estado poscrítico inicial. Esta teoría de límites inferiores ha sido verificada para varios tipos de cáscaras y cargas, como se muestra en Croll y Batista (1981) y Croll y Ellinas (1983), entre otros.

En la mayoría de los problemas investigados en la literatura, se ha implementado una solución analítica o un programa para propósitos específicos; sin embargo, una aplicación más extensa de la aproximación para ingenieros solo será posible si se pueden usar códigos de elementos finitos para propósitos generales sin necesidad de desarrollar subrutinas especiales.

Este trabajo estudia la implementación computacional de límites inferiores para tanques con techo cónico de diversas relaciones geométricas bajo presión de viento. Para cubrir un rango de tanques típicos encontrados en el campo, se estudian seis modelos de tanques de techo cónico similares a aquellos analizados por Virella y Godoy (2006) y Sosa, Godoy y Croll (2006).

Los cálculos fueron divididos en cuatro fases: Primero, se calcularon las cargas críticas resolviendo el problema de autovalores clásico. Se presentan los resultados de esta primera fase en la Sección 3. Segundo, se describe una metodología propuesta de energía reducida y se implementa en los modelos de tanque de techo cónico. En la Sección 4 se describen los resultados de esta aplicación. Tercero, se llevó a cabo un análisis no lineal con imperfecciones geométricas para comparar los resultados con aquellos obtenidos en la fase dos y estos resultados se describen en la Sección 5. Por último se evalúan límites inferiores planteando la eliminación de las componentes de energía membranal que resultan estabilizantes. Estos resultados se presentan en la Sección 6. La aplicabilidad del método de energía reducida para cargas del viento se discute en la Sección 7 comparando los resultados con aquellos que surgen del análisis de sensibilidad ante imperfecciones y con los obtenidos a partir de la eliminación de las componentes estabilizantes de energía membranal. Finalmente, se presentan algunas conclusiones en la Sección 8.

2 DESCRIPCIÓN DE LA GEOMETRÍA Y CARGAS

Esta sección describe los tanques con techo cónico considerados para calcular los límites inferiores de las cargas de pandeo bajo la acción de cargas de viento. Los seis modelos (identificados como MC1, MC2, MC3, MC4, MC5 y MC6) elegidos para el análisis tienen el mismo diámetro de 30.48 m y se suponen contruidos usando virolas de acero de 2.438 m de altura. La parte cilíndrica de cada modelo tiene diferente altura con relaciones de aspecto altura del cilindro-diámetro (H/D) variando de 0.24 a 0.95, con un espesor de la cáscara cilíndrica reducido gradualmente mediante el método de un pie especificado en la Norma API 650 Sección 3.6.3 (1988). Los modelos MC2, MC4 y MC6 son iguales a aquellos analizados por Virella, Godoy y Suárez (2006) bajo cargas del sismo.

Todos los modelos tienen un techo fijo cónico reforzado por 32 vigas con una pendiente de techo de 3/16 y un espesor de 0.007m. El cilindro se considera empotrado en la base y cada modelo está aislado, por lo tanto no hay otros tanques o edificaciones que influyan en la distribución de las presiones de viento aplicadas en la cáscara y en el techo. La Tabla 1 resume los espesores adoptados para las diferentes virolas de todos los tanques estudiados, y la Figura 1 muestra la geometría de todos los modelos considerados en este estudio. El material constitutivo es acero con un módulo de elasticidad de $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m² y coeficiente de Poisson 0.3.

Virola	MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6
	t diseño [m]					
1	0.0095	0.0127	0.0175	0.0206	0.0254	0.0286
2	0.0079	0.0111	0.0159	0.0175	0.0222	0.0254
3	0.0079	0.0079	0.0127	0.0159	0.0206	0.0254
4		0.0079	0.0111	0.0127	0.0175	0.0222
5		0.0079	0.0095	0.0111	0.0159	0.0206
6			0.0079	0.0079	0.0127	0.0191
7			0.0079	0.0079	0.0111	0.0159
8				0.0079	0.0079	0.0127
9					0.0079	0.0111
10					0.0079	0.0079
11						0.0079
12						0.0079

Tabla 1: Espesores adoptados para cada modelo.

La variación espacial de presiones en la parte cilíndrica del tanque se supone constante en altura y variable alrededor de la circunferencia, como en otros trabajos de investigación en el campo. Para las presiones que actúan en el techo se considera una distribución de presiones obtenidas en ensayos de túnel de viento por Macdonald et al. (1988), que son similares a las presentadas por Portela y Godoy (2005). La presión máxima sobre la cáscara cilíndrica es de 1KPa actuando en el meridiano a barlovento. Para el análisis de estabilidad, los valores de las presiones que actúan en la cáscara completa se aumentan usando el parámetro de carga λ . Para la distribución circunferencial de las presiones se adopta la expresión (Rish 1967):

$$p = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \cos(i\theta) \quad (1)$$

con los siguientes coeficientes de Fourier: $c_0 = 0.387$, $c_1 = -0.338$, $c_2 = -0.533$, $c_3 = -0.471$, $c_4 = -0.166$, $c_5 = 0.066$, $c_6 = 0.055$, donde p es la presión externa del viento y θ es el ángulo con

respecto a la dirección del viento. La Figura 2(a) muestra la distribución de presión usada en el techo cónico y la Figura 2(b) muestra la distribución de presión de viento adoptada alrededor de la circunferencia de la cáscara cilíndrica.

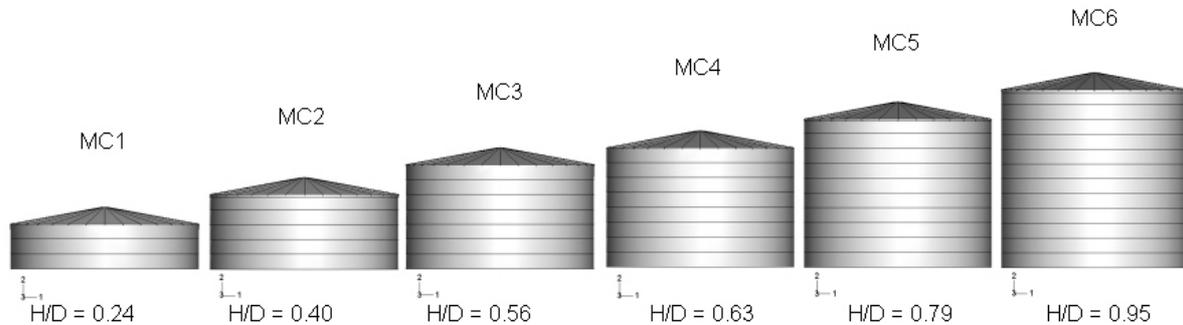


Figura 1: Geometría de los modelos con techo cónico.

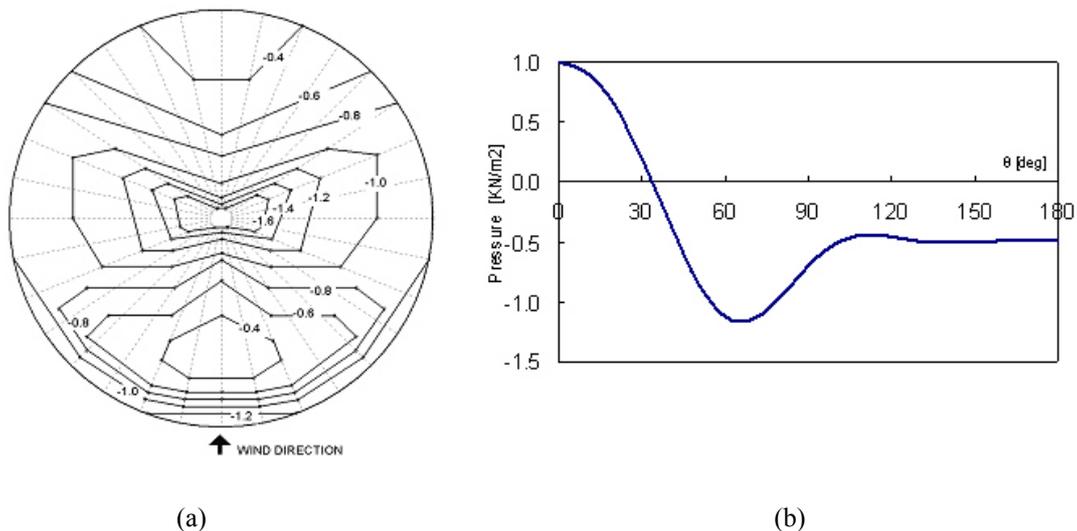


Figure 2: Distribución de presión de viento (a) en el techo cónico; (b) alrededor del cilindro.

3 MODELO COMPUTACIONAL

Todos los tanques fueron modelados por Elementos Finitos, mediante el programa de propósitos generales ABAQUS (2002) usando elementos de cáscaras triangulares y también por un programa de propósitos específicos, ALREF (Flores y Godoy, 1991), usando elementos semianalíticos que discretizan el meridiano con elementos curvos unidimensionales. En ambos casos se utilizan mallas lo suficientemente densas para asegurar la convergencia.

Los resultados del problema del autovalores clásico (Figura 3) muestran que los autovalores para el primer y segundo modo son casi el mismo para todos los modelos estudiados, hallándose buen acuerdo entre los valores hallados mediante los dos códigos usados. El modelo más corto parece ser más rígido y las cargas críticas clásicas para los modelos más altos tienden a un valor constante a medida que aumenta la relación H/D. Las cargas críticas clásicas para estos tanques dependen de los espesores adoptados en el diseño. Un cambio en el espesor, sobre todo en la zona con mayores desplazamientos en el modo

crítico o en la transición de espesores, produce una modificación en el autovalor.

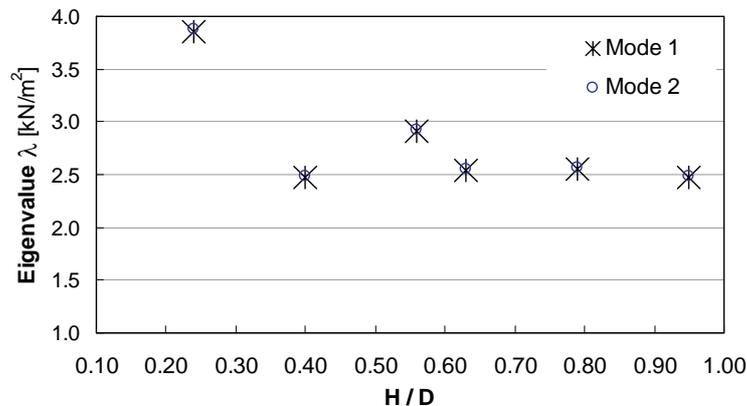


Figura 3: Autovalores para las configuraciones geométricas indicadas en Figura 1, obtenidos usando ABAQUS.

Las presiones críticas se relacionan con la velocidad del viento usando la norma ASCE-7-02 (2002):

$$p = 0.613 K_z K_{zt} K_d I V^2 \quad (2)$$

donde p es la presión del viento en (N/m^2), V es la velocidad básica de viento (m/s), K_z es el factor de la exposición, K_{zt} es el factor topográfico, K_d es el factor de direccionalidad e I es el factor de importancia. Se supone que los tanques están en terreno plano resultando $K_{zt} = 1$. Para una estructura de Categoría II el factor de importancia I resulta $I = 1$, el factor de direccionalidad es $K_d = 1$ y $K_z = 0.94$. Si la presión es conocida (por ejemplo, mediante el análisis del autovalores), entonces la velocidad está dada por:

$$V = \sqrt{p/0.576} \quad (3)$$

En la Figura 4 se muestran las velocidades de viento así calculadas para cada modelo. Del análisis de los modos puede verse que las formas de modo correspondientes al conjunto de tanques analizados tienen desplazamientos concentrados en la zona de presiones positivas a barlovento. Parece que las succiones (presiones negativas) en la zona de sotavento y en el techo cónico no tienen influencia fuerte en la forma del modo. Simulaciones numéricas realizadas sin las presiones de succión predicen casi las mismas cargas críticas. Sin embargo, para ser consistentes, todos los resultados presentados en este trabajo se calcularon con la totalidad de las presiones que actúan en la cáscara cilíndrica y en el techo cónico. La Figura 4 muestra el primer modo crítico para todos los modelos, obtenido mediante el código ABAQUS. Se observa en esta figura que en todos los modelos la zona pandeada se concentra en las virolas con menor espesor en el cilindro.

El primer y segundo modo son casi idénticos en su forma para todos los modelos estudiados. La diferencia entre los modos es que el primer modo es asimétrico y el segundo es simétrico con respecto a un eje vertical. La Figura 5 muestra una vista superior del primero y segundo modo que son iguales para todos los modelos estudiados.

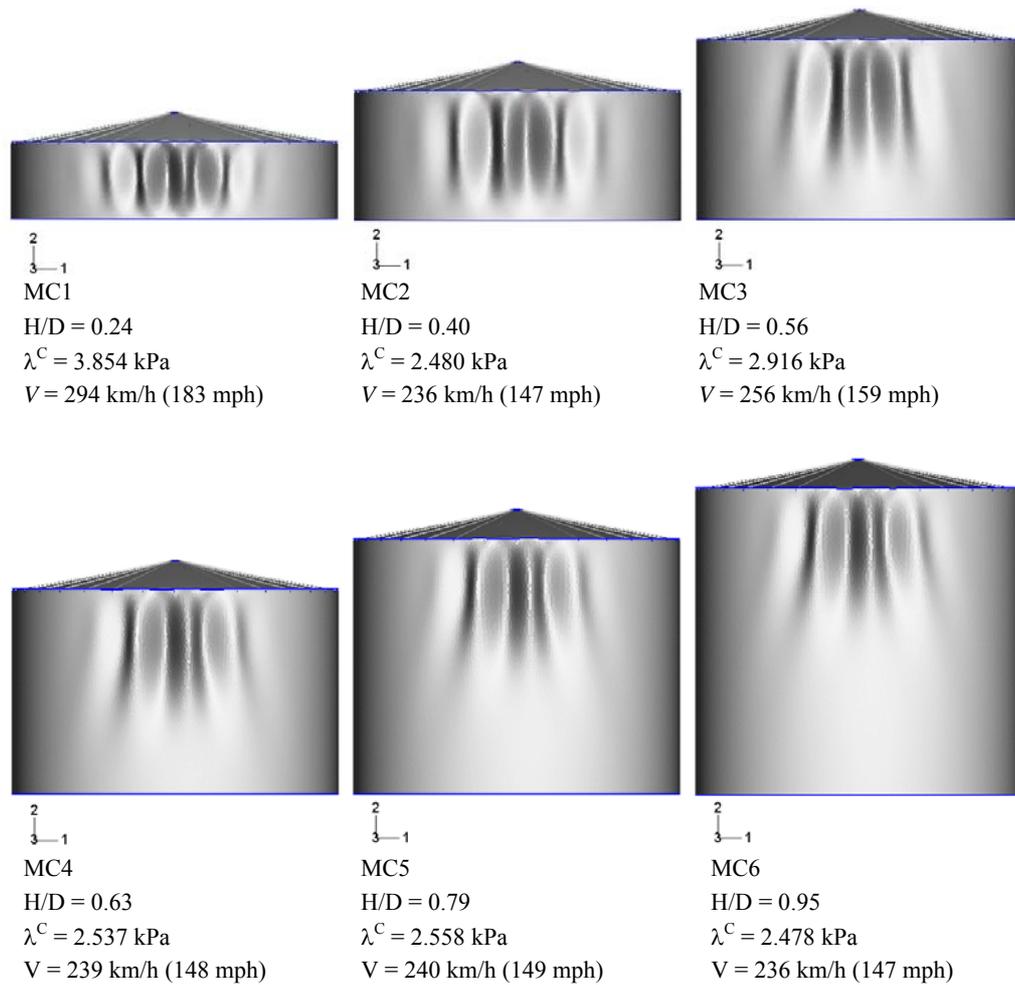


Figura 4: Primer modo de pandeo de todos los modelos estudiados.

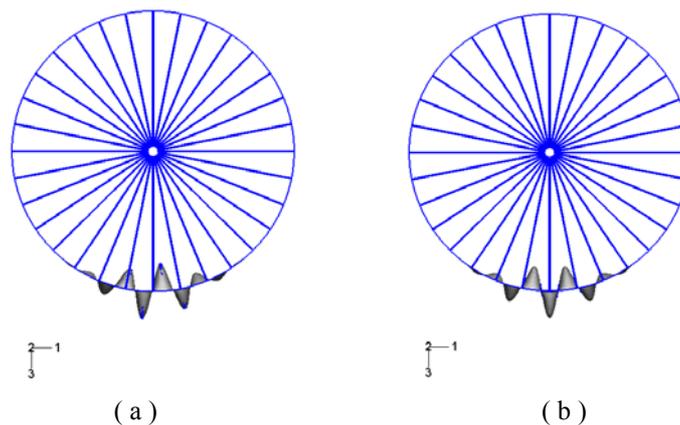


Figura 5: Vista superior del (a) primer y (b) segundo modo.

Los resultados obtenidos con el código ALREF son consistentes con los hallados con ABAQUS, en la Tabla 2 se muestran los valores de las cargas críticas para todos los modelos estudiados y en la Figura 6 la forma de modo hallada para el modelo identificado como MC4, que resulta similar a la hallada para los restantes tanques.

	MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6
λ^C [kPa]	3.885	2.551	2.921	2.512	2.542	2.497

Tabla 2: Cargas críticas halladas con código ALREF.

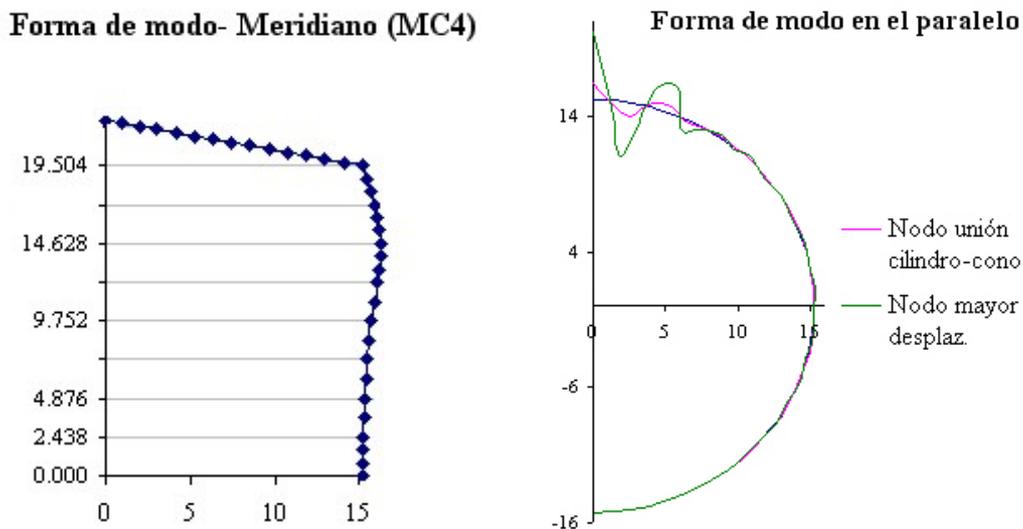


Figura 6: Forma de modo de modelo MC4 ($\lambda^C=2.512$ kPa)

4 ANALISIS DE ENERGÍA REDUCIDA

4.1 Formulación general

Para calcular el límite inferior de la carga crítica (λ^*) en cilindros con presión lateral, Croll y colaboradores usan un factor de reducción (η) que afecta la carga crítica clásica (λ^C), según:

$$\lambda^* = \eta \lambda^C \quad \text{y} \quad \eta = \frac{U^b}{U^b + U^m} \tag{4}$$

donde U^b es la segunda variación de la energía de deformación flexional en el modo crítico y U^m es la segunda variación de la energía de deformación membranar. Sin embargo, esa expresión tan simple incorpora una hipótesis muy importante sobre igualdad de modos, cuya validez es cuestionable para problemas de cáscaras bajo cargas no axisimétricas como viento. Este trabajo intenta poner de manifiesto el origen y consecuencia de las aproximaciones de la ecuación (4).

Para derivar la aproximación de rigidez reducida y energía reducida se puede calcular la energía en función de la matriz de rigidez lineal de la cáscara K , que puede escribirse como la suma de dos contribuciones, una rigidez membranar K^m y otra rigidez flexional K^b . El problema de autovalores clásico puede obtenerse de la expresión:

$$\Phi^T \left[(K^m + K^b) - \lambda^C K^G(N^F) \right] \Phi = 0 \tag{5}$$

donde la matriz geométrica o de tensión inicial K^G se ensambla con las contribuciones de los elementos conteniendo las tensiones iniciales y rotaciones (N^F). El parámetro escalar λ^C es el autovalor (la carga crítica del problema) y el vector Φ es el autovector (el modo crítico o la

deformada asociada a λ^C). Para el modelo de energía reducida en el que la energía membranal se ha erosionado, se puede escribir:

$$\Phi'^T \left[\left(\frac{\mathbf{K}^m}{\alpha} + \mathbf{K}^b \right) - \lambda^C \mathbf{K}^G(N^F) \right] \Phi' = 0 \quad (6)$$

En el límite, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^b - \lambda^* \mathbf{K}^G(N^F) \right] \Phi^* = 0 \quad (7)$$

Las ecuaciones (5) y (7) se pueden escribir como:

$$\Phi^T \left[\left(\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right) \right] \Phi = \lambda^C \Phi^T \left[\mathbf{K}^G(N^F) \right] \Phi \quad (8)$$

$$\Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^b \right] \Phi^* = \lambda^* \Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^G(N^F) \right] \Phi^* \quad (9)$$

Para los casos en los cuales el autovector tiene una forma similar al modo de pandeo encontrado en ensayos o en el análisis no lineal, se puede suponer que $\Phi^* = \Phi$. Si $\alpha \rightarrow \infty$, entonces \mathbf{K}^m desaparece. Dividiendo la ecuación (8) por (9), se obtiene:

$$\frac{\Phi^{*T} \left[\mathbf{K}^b \right] \Phi^*}{\Phi^T \left[\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right] \Phi} = \frac{\lambda^*}{\lambda^C} = \eta \quad (10)$$

donde en el denominador se puede distinguir las componentes de energía como:

$$U^m = \Phi^T \mathbf{K}^m \Phi \quad (11)$$

$$U^b = \Phi^T \mathbf{K}^b \Phi \quad (12)$$

Introduciendo las ecuaciones (11) y (12) en la Ecuación (10) se puede obtener la misma relación definida en la ecuación (4).

4.2 Metodología computacional para análisis de límites inferiores

La implementación de este procedimiento se puede hacer como se indica a continuación: Primero, se resuelve el problema de autovalores clásico usando la formulación clásica con las cargas o presiones originales para obtener el autovector clásico Φ y el autovalor λ^C . Segundo, el autovector Φ se usa como un campo de desplazamientos inicial, en lugar de la carga externa, y se calcula la energía de deformación total:

$$\Phi^T \left[\mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right] \Phi = U^m + U^b \quad (13)$$

Esta es la energía completa movilizada por la cáscara para deformarse según la forma de modo Φ . Tercero, el autovector Φ se usa como un desplazamiento inicial en la ecuación (13), pero con el factor de la reducción α afectando la rigidez membranal:

$$\Phi^T \left[\frac{1}{\alpha} \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^b \right] \Phi = \frac{1}{\alpha} U^m + U^b \quad (14)$$

Al aumentar α , la contribución membranal tiende a desaparecer y la contribución flexional

restante se usa para calcular el factor de reducción η con la ecuación (4). Se adoptan valores crecientes del factor de reducción calculado con la ecuación (14) hasta que converja a un valor constante, que posteriormente se usa para encontrar la carga crítica reducida λ^* . Debe advertirse que estos cálculos indirectos son necesarios porque los programas de propósitos generales, como ABAQUS, no permiten calcular en forma separada la energía membranal y flexional. Además, no todos los elementos de cáscara disponibles permiten la aplicación de este procedimiento. El elemento de cáscara STRI3 produjo los resultados más confiables. Esta metodología propuesta fue implementada con éxito por los autores para encontrar límites inferiores de cargas de pandeo para cilindros bajo presión uniforme, como se ha informado en Sosa y Godoy (2005).

4.3 Modelo computacional para análisis de energía reducida

En esta etapa se implementa el método de energía reducida para analizar los tanques planteados bajo la acción de cargas de viento. En este paso, se usa el primer modo del análisis de autovalores clásico como un patrón de desplazamientos impuesto. Cada parte de la cáscara que forma el cilindro entero (todas las virolas) se someten a reducciones simultáneas en la rigidez membranal mientras que el modo crítico se impone como un desplazamiento inicial prescrito. Con esa configuración, se calcula la energía usada por la estructura para alcanzar esa configuración deformada. Con la energía calculada para cada factor α disminuyendo la rigidez membranal, y habiendo calculado la energía sin reducción en su rigidez para las mismas condiciones de carga, es posible determinar la pérdida de la capacidad de pandeo para resistir cargas adicionales. El factor de reducción η , como fue definido previamente, es la relación entre la energía computada para los diferentes niveles de reducción de rigidez membranal y la energía calculada con toda la rigidez membranal, es decir $\eta = U^b / (U^m + U^b)$.

Esa metodología se aplicó a los modelos especificados en la Sección 2 y se encontró que el factor de reducción η tiende a un valor constante cuando el factor α aumenta. Se muestran los resultados de estos cálculos en la Figura 6 para un desplazamiento inicial impuesto según el primer modo. Observando esta figura parece que el factor de reducción tiene poca dependencia con la relación H/D. Todos los modelos muestran una tendencia similar y las diferencias de η entre los modelos más cortos y más altos es de sólo 4%.

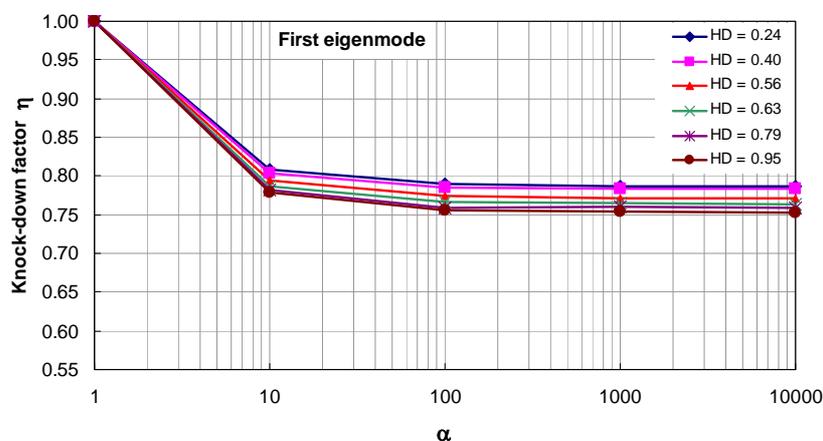


Figure 7: Variación del factor de reducción calculado con el primer modo en el método de energía reducida.

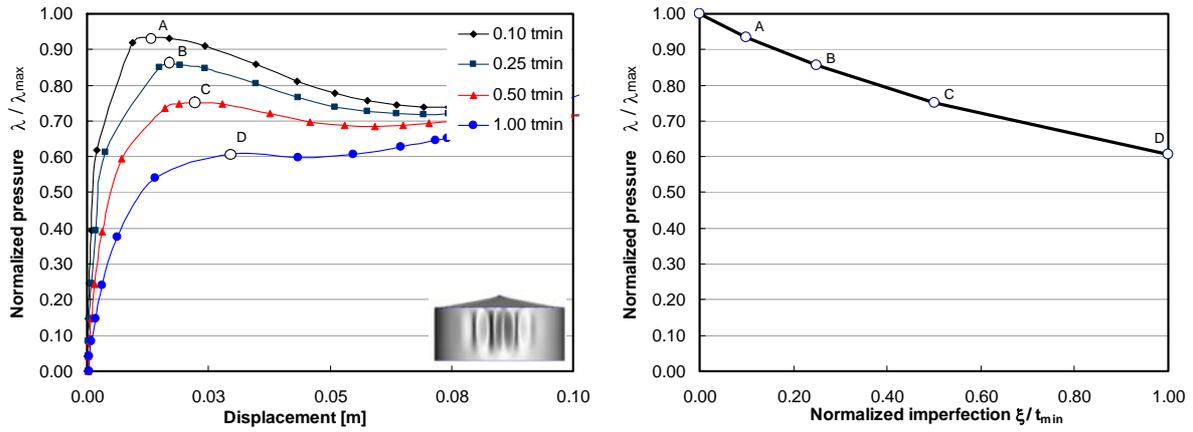
5 LÍMITE INFERIOR MEDIANTE ANÁLISIS NO LINEAL DE SENSIBILIDAD ANTE IMPERFECCIONES

Un análisis no lineal de sensibilidad ante imperfecciones se llevó a cabo para comparar los límites inferiores con los obtenidos en la sección anterior. Para este estudio, todos los modelos se analizaron incluyendo imperfecciones de pequeña amplitud según la forma del primer autovector. Las amplitudes de las imperfecciones varían de $0.10 t_{\min}$ a $1.0 t_{\min}$ donde el t_{\min} es el menor espesor de la cáscara cilíndrica en cada caso. Para cada imperfección se calcularon las trayectorias de equilibrio no lineal usando el método de Riks (1972, 1979) mediante ABAQUS, de manera que la estructura pueda exhibir su comportamiento poscrítico. Para las imperfecciones de pequeña amplitud, por ejemplo $0.10 t_{\min}$, la trayectoria poscrítica no lineal es inestable. Esto significa que la cáscara puede resistir la carga máxima para un desplazamiento relativamente pequeño. Más allá de ese máximo, la cáscara no puede tomar cargas adicionales y presenta grandes deformaciones.

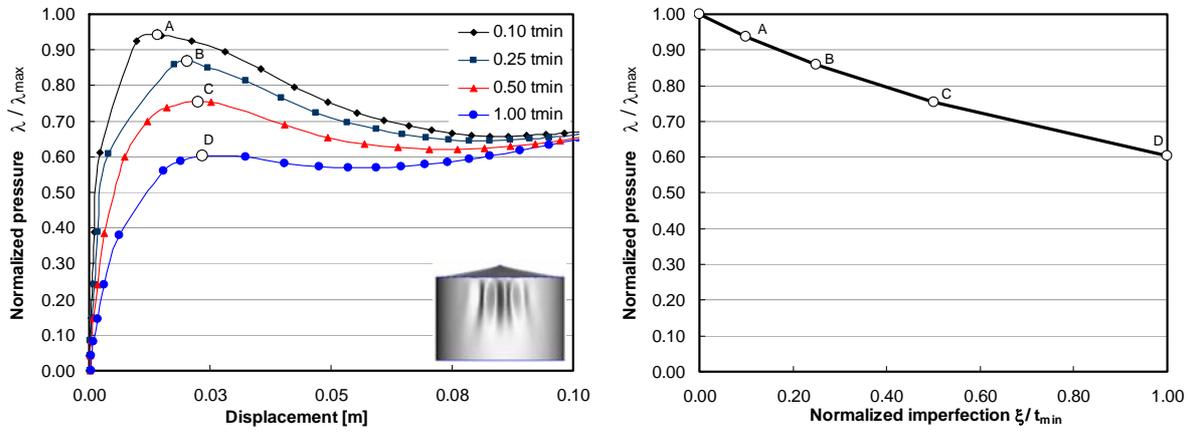
Para las amplitudes de imperfección más grandes que $1.0 t_{\min}$, la trayectoria de equilibrio presenta deformaciones muy grandes y se convierte en estable y monótona creciente. Éste es un indicio que la forma de la cáscara ha cambiado tanto que el comportamiento es bastante diferente del que corresponde a la cáscara perfecta original. Este nivel de imperfección establece un límite inferior a las cargas que la estructura puede soportar con desplazamientos pequeños de su forma original. Después de ese límite, la estructura deformada se comporta de una manera diferente.

En la Figura 8 se muestran trayectorias de equilibrio no lineales típicas para los niveles mencionados de imperfecciones, correspondientes los modelos MC2, MC4 y MC6. Las curvas de sensibilidad ante imperfecciones mostradas en el lado derecho de la Figura 8 fueron generadas graficando la carga crítica normalizada λ/λ_{\max} para cada nivel de imperfección en función de la amplitud de imperfección adimensionalizada ξ/t_{\min} . La Figura 9 resume todas esas curvas para todos los modelos analizados y muestra el límite inferior al que las cargas aplicadas tienden cuando los niveles de imperfección aumentan. De esta manera, el factor de reducción $\eta = \lambda/\lambda_{\max}$ es directamente comparable con los resultados obtenidos usando el método de energía reducida.

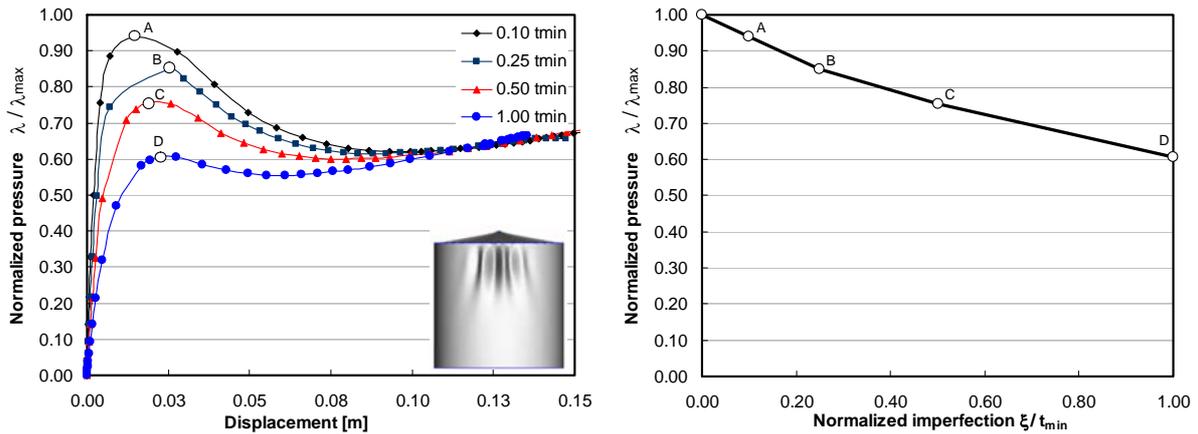
En la Figura 8 es posible observar que la sensibilidad ante imperfecciones es prácticamente la misma para todos los modelos. Esta característica puede justificarse por el hecho de que en todos los modelos las deformaciones del modo de pandeo se concentran en la zona de menores espesores de la cáscara. Ese espesor es el mínimo requerido para el diseño en todos los modelos y al menos las últimas tres virolas en la parte superior del cilindro tienen el espesor mínimo. Probablemente por eso los autovalores clásicos mostrados en la Figura 3 tienen pequeñas variaciones cuando la relación H/D aumenta.



(a) MC2 (H/D=0.4); Forma de la imperfección: primer modo.



(b) MC4 (H/D=0.63); Forma de la imperfección: primer modo.



(c) MC6 (H/D=0.95); Forma de la imperfección: primer modo.

Figura 8: Trayectorias de equilibrio no lineal y curvas de sensibilidad ante imperfecciones.

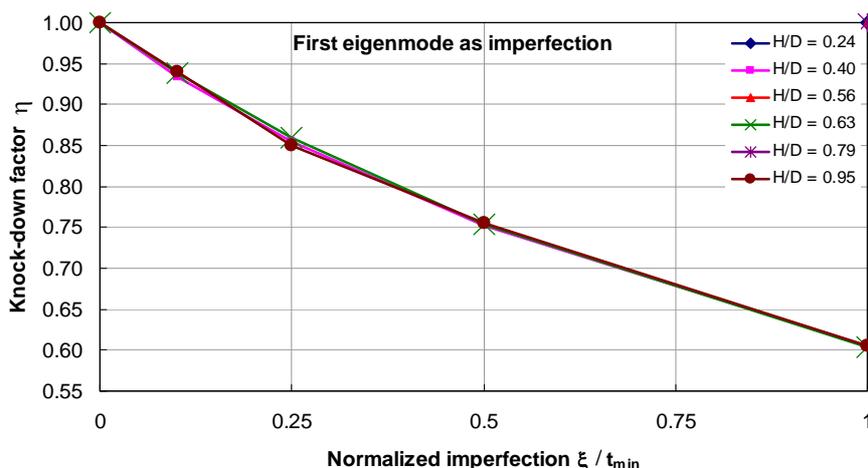


Figura 9: Factor de reducción calculado con análisis de sensibilidad ante imperfecciones no lineal.

6 ANALISIS DE RIGIDEZ REDUCIDA

6.1 Componentes individuales de energía

El planteo de la energía potencial total (V) involucra el aporte de la energía membranal, flexional y el potencial de las cargas, asociado al campo de esfuerzos membranales y flexionales (N_{ij} y M_{ij}) y al de deformaciones membranales y flexionales (ε_{ij} y χ_{ij}), que se puede expresar a partir de la trayectoria fundamental $(-)^F$ más la contribución lineal $(-)^'$ y no lineal $(-)^{''}$ como se muestra en las ecuaciones (15) y (16).

$$V = \frac{1}{2} \int (N_{ij} \varepsilon_{ij} + M_{ij} \chi_{ij}) dA - \psi = U^m + U^b - \psi \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \lambda N_{ij}^F + N'_{ij} + N''_{ij} & ; & & \varepsilon_{ij} &= \lambda \varepsilon_{ij}^F + \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} \\ M_{ij} &= \lambda M_{ij}^F + M'_{ij} & ; & & \chi_{ij} &= \lambda \chi_{ij}^F + \chi'_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

Al reemplazar las ecuaciones (16) en la expresión de la energía (15), se plantea la condición necesaria y suficiente de equilibrio indicada en (17) y la condición de punto crítico expresada en (18):

$$\delta V = \frac{1}{2} \int (N^F_{ij} \varepsilon'_{ij} + N'_{ij} \varepsilon^F_{ij} + M^F_{ij} \chi'_{ij} + M'_{ij} \chi^F_{ij}) dA - \psi' = 0 \quad (17)$$

$$\delta^2 V = \frac{1}{2} \int \left[(N'_{ij} \varepsilon'_{ij} + M'_{ij} \chi'_{ij}) + \lambda (N^F_{ij} \varepsilon''_{ij} + N''_{ij} \varepsilon^F_{ij}) \right] dA = 0 \quad (18)$$

La condición planteada en (18) corresponde al problema clásico de autovalores y autovectores, donde el primer paréntesis conduce a la matriz de rigidez del sistema (K) y el segundo a la matriz carga-geometría (K^G) como se mencionó en la Sección 4 a través de la ecuación 5. Aquí se pueden identificar tres contribuciones separadas: la que surge de la energía membranal lineal (U^m) que tiene en cuenta la parte lineal de esfuerzos y deformaciones membranales, la energía flexional lineal (U^b) que considera los momentos flectores y curvaturas lineales y la energía de deformación "linealizada" que incluye la parte no lineal de esfuerzos y deformaciones membranales (V_2) como se indica en (19).

$$\begin{aligned}
 U^m &= \frac{1}{2} \int N'_{ij} \varepsilon'_{ij} dA \\
 U^b &= \frac{1}{2} \int M'_{ij} \chi'_{ij} dA \\
 \lambda V_2 &= \frac{1}{2} \int \left(N^F_{ij} \varepsilon''_{ij} + N^F_{ij} \varepsilon^F_{ij} \right) dA
 \end{aligned} \tag{19}$$

En una modelización por elementos finitos, la ecuación (18) conduce al problema clásico de autovalores, donde K se obtiene a partir de la matriz B_0 que contiene las funciones de interpolación y la matriz constitutiva D incluyendo el aporte membranar y flexional, según se muestra en (20). La matriz K^G tiene en cuenta las componentes no lineales del campo de deformaciones a través de la matriz G que vincula los giros con los desplazamientos y también incluye las tensiones iniciales en la trayectoria fundamental mediante N^F .

$$\begin{aligned}
 & \left[K - \lambda^C K^G(N^F) \right] \Phi = 0 \\
 K &= K^m + K^b \\
 K &= \int (B_0^T D B_0) dA \quad K^G = \int (G^T N^F G) dA
 \end{aligned} \tag{20}$$

En el planteo de energía reducida usando ABAQUS se modifica la matriz constitutiva D considerando un material laminado de manera de afectar con el factor α los coeficientes de la matriz D asociados a los esfuerzos membranarales, mientras que en el planteo de rigidez reducida usando un programa como ALREF se modifica la matriz B_0 eliminando las componentes asociadas al campo de deformaciones membranarales.

6.2 Problema modificado de autovalores

Los trabajos de Croll (1981, 1989) y Yamada y Croll (1993, 1999) han puesto de manifiesto la importancia del aporte de la energía membranaral en el fenómeno de pandeo de cáscaras bajo presión lateral uniforme. Los postulados en los que se fundamenta la teoría de rigidez o energía reducida plantean que el comportamiento no lineal poscrítico con grandes deformaciones aparece por reducciones significativas en la resistencia membranaral.

Como se mencionó anteriormente, la metodología para implementar la teoría de rigidez reducida consiste en eliminar la contribución de las componentes estabilizantes de energía en el problema de autovalores planteado en la ecuación (20), previo análisis de la distribución de las mismas. A partir de una evaluación de la energía potencial total del sistema es posible individualizar aquellas componentes de energía membranaral que se pueden erosionar durante el proceso de pandeo. De esta manera, en el método de límites inferiores se realiza un análisis de autovalores para el mismo sistema pero con las componentes apropiadas de energía membranaral descartadas.

Esta eliminación debe hacerse en el cálculo del punto crítico de manera que la energía potencial total no cuente con el aporte de estas componentes estabilizantes. Así, el nuevo punto crítico hallado representa un límite inferior ya que las componentes que aportaban al equilibrio en forma estabilizante no son tenidas en cuenta. Este planteo afecta al primer término en la ecuación (20), es decir a la matriz K , en lo que corresponde al aporte de la parte lineal del campo de tensiones y deformaciones pero no introduce modificaciones en K^G que

tiene en cuenta las tensiones previas al punto crítico que son evaluadas con la energía potencial con todas sus componentes.

La ecuación de equilibrio se resuelve sin modificaciones obteniendo el estado tensional correspondiente al punto crítico para usar en el cálculo de K^G en la ecuación (20) pero se introducen cambios en el cálculo de K correspondiente a la misma ecuación eliminando los términos correspondientes a las energías membranales estabilizantes. Así, se resuelve un problema de autovalores modificado:

$$\left[(K_b) - \lambda^* K^G(N^F) \right] \Phi^* = 0 \quad (21)$$

donde λ^* y Φ^* son el nuevo autovalor y autovector del problema de rigidez reducida.

Con el objeto de identificar aquellas componentes estabilizantes, se evalúan las contribuciones membranales y flexionales con los esfuerzos y deformaciones correspondientes al punto crítico. La energía membranar se separa en la componente meridional (U_{mss}), la componente circunferencial (U_{mtt}) y la componente torsional (U_{mst}), mientras que en la energía flexional se individualiza la componente meridional (U_{bss}), la componente circunferencial (U_{btt}) y la componente torsional (U_{bst}) según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} U_m &= U_{mss} + U_{mtt} + U_{mst} & U_b &= U_{bss} + U_{btt} + U_{bst} \\ U_{mss} &= \frac{1}{2} \int N'_{ss} \epsilon'_{ss} dA & U_{bss} &= \frac{1}{2} \int M'_{ss} \chi'_{ss} dA \\ U_{mtt} &= \frac{1}{2} \int N'_{tt} \epsilon'_{tt} dA & U_{btt} &= \frac{1}{2} \int M'_{tt} \chi'_{tt} dA \\ U_{mst} &= \frac{1}{2} \int N'_{st} \epsilon'_{st} dA & U_{bst} &= \frac{1}{2} \int M'_{st} \chi'_{st} dA \end{aligned} \quad (22)$$

6.3 Modelo numérico para análisis de rigidez reducida

Esta implementación de rigidez reducida vía elementos finitos se hace mediante el programa de propósitos específicos ALREF en el que se incluyeron modificaciones que permiten evaluar las componentes de energía y resolver el problema de autovalores con la energía reducida. Con estas modificaciones, en un trabajo anterior se analizaron tanques cilíndricos con buenos resultados (Jaca, Godoy y Flores, 2005). El código discretiza la cáscara en el sentido del meridiano con elementos curvos unidimensionales y representa el comportamiento en el paralelo mediante series de Fourier, permitiendo evaluar cáscaras de revolución bajo cargas axilsimétricas y no axilsimétricas.

En el caso de cargas no axilsimétricas como las de viento se produce un acoplamiento de modos en el cálculo de autovalores que genera la necesidad de especificar el rango de armónicas que deben ser usadas en el problema de autovalores, tanto para calcular la carga crítica como para la evaluación de las componentes de energía. Por ello en una primera etapa se analizan los modelos bajo la acción de carga radial uniforme unitaria, en cuyo caso el cálculo resulta desacoplado para las distintas armónicas.

La modelización de la cáscara cilíndrica se plantea densificando los elementos en la zona que presenta mayores desplazamientos en el modo crítico, dividiendo en partes iguales los tramos de igual espesor. Se adopta un espesor del techo cónico de 0.015 m, mayor que el real ya que las vigas rigidizadoras no fueron incluidas en el modelo.

La Figura 10 muestra el espectro de cargas críticas para diferentes armónicas en los diferentes modelos de tanques estudiados. Como todos los casos estudiados están compuestos por dos cáscaras simples, cilindro y cono, se obtiene un espectro que no presenta un único mínimo como en el caso de cáscaras simples. Se observa que al aumentar la relación de aspecto H/D la distribución de cargas críticas halladas tiende a un comportamiento más semejante al de un cilindro simple reduciéndose la influencia del cono, de tal manera que la respuesta de los tanques con mayor relación de aspecto es prácticamente la misma.

Para estos casos estudiados se hace una evaluación de las componentes de energía bajo carga axilsimétrica, las distribuciones obtenidas se muestran en la Figura 11. Se observa que la curva de energía total no presenta un único mínimo debido a la interacción en el comportamiento de las dos cáscaras. A medida que aumenta la relación H/D la curva que representa la distribución de energía total de la estructura compuesta por dos cáscaras simples se comporta como la superposición de las correspondientes a cada una de las cáscaras simples, como se observa para los modelos identificados como MC3, MC4, MC5 y MC6 con comportamiento similar al mostrado en la Figura 11(c).

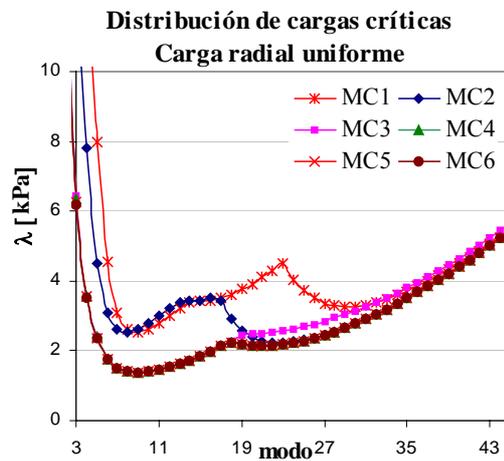
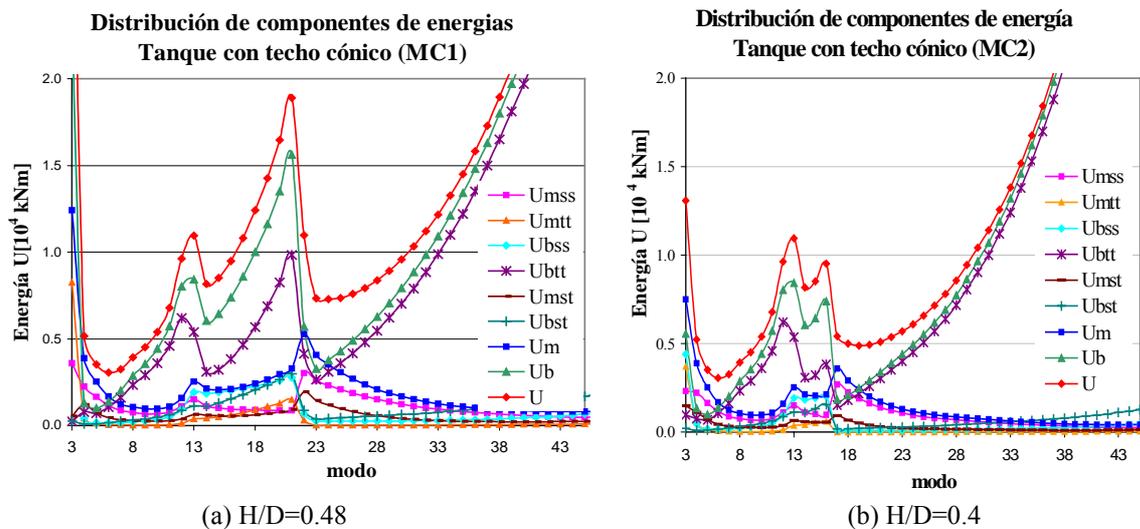
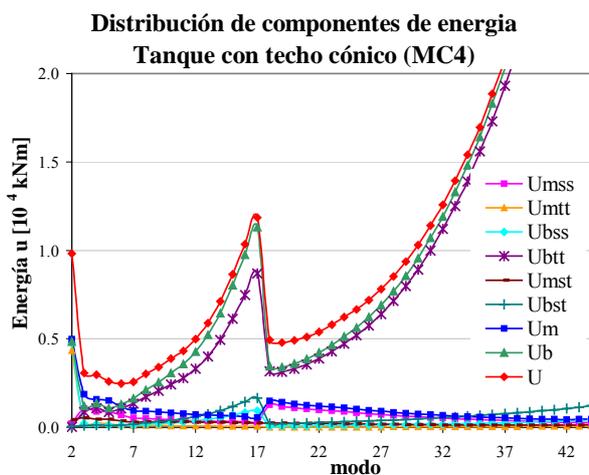


Figura 10: Espectro de cargas críticas para los diferentes modelos.





(c) H/D = 0.63

Figura 11: Distribución de componentes de energía.

Para los modos cortos hay predominio de componentes membranales que decaen rápidamente con un comportamiento similar al presentado en cilindros en cantilever con aumento de las componentes flexionales que originan la presencia del primer mínimo en las curvas de energía total. Posteriormente se presenta un aumento de las componentes membranales y disminución de las flexionales entre los modos 16 a 22 debida a una rigidización por la presencia del techo cónico generando un nuevo mínimo en la distribución de energía total.

Los tanques fueron analizados bajo la acción de viento, expresando la carga actuante a través de Serie de Fourier tanto sobre el cilindro como sobre el techo, según lo expresado en (1). La carga sobre el techo se divide en tres tramos diferentes, resultando los coeficientes indicados en la Figura 12.

Carga	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇
1	1.419	0.063	-0.203	0.03	-0.026	0.008	-0.0016	0.0009
2	0.607	0.034	-0.172	-0.043	0.031	-0.011	0.015	-0.013
3	0.755	0.035	-0.036	-0.008	0.021	-0.020	-0.0005	0.015

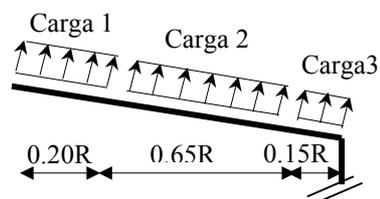


Figura 12: Cargas de viento sobre techo cónico

Para evaluar la carga crítica bajo la acción del viento se tomaron una cierta cantidad de armónicas consecutivas (entre 20 y 30 armónicas) para tener en cuenta el acoplamiento de modos que se presenta bajo la acción de cargas no axilimétricas. En la Tabla 3 se muestran los valores de carga crítica hallados para cada modelo analizado, la distribución de componentes de energía correspondiente al punto crítico. También se ha computado el factor de reducción η hallado a través de la relación U_b/U como fue planteado en la Sección 4, resultando menores que los hallados anteriormente y presentados en la Figura 7. Se observa que la componente membranal circunferencial (U_{mtt}) es desestabilizante en todos los casos mientras que la componentes meridional (U_{mss}) y torsional (U_{mst}) son estabilizantes.

	λ^c [N/m ²]	Energía [kNm]									η
		U_{mss}	U_{mtt}	U_{bss}	U_{btt}	U_{mst}	U_{bst}	U_m	U_b	U	
MC1	3885	13400	-65.4	3340	58800	5360	5400	18700	67600	86300	0.78
MC2	2551	9610	-74.9	1080	38700	2230	2620	11800	42400	54200	0.78

MC3	2921	10800	-73.8	959	38500	2180	2220	12900	41700	54600	0.76
MC4	2512	9430	-74.2	721	31700	1860	2010	11200	34400	45600	0.75
MC5	2542	9470	-70.3	658	30600	1870	1900	11300	33100	44400	0.74
MC6	2497	9460	-65.2	646	30400	1920	1910	11300	33000	40300	0.74

Tabla 3: Cargas críticas y componentes de energía en el punto crítico

Dado que la componente circunferencial (U_{mtt}) es desestabilizante en todos los casos estudiados, se plantea suprimir en el análisis de energía reducida solamente las componentes meridional (U_{mss}) y torsional (U_{mst}) y realizar nuevamente el análisis de autovalores con la energía reducida. Para eliminar las componentes de energía estabilizantes, en el cálculo de B_0 que relaciona el campo de desplazamientos con el de deformaciones, se anulan los coeficientes que aportan a ε_{ss} y ε_{st} , respectivamente, en forma acumulativa para evaluar cómo varían las cargas críticas al eliminar las componentes de energía membranal asociadas a esas deformaciones específicas. El cálculo de K^G , que relaciona los giros con los desplazamientos, se realiza con la matriz N^F obtenida en base al análisis estático para el estado precrítico. De esta manera se obtienen las cargas críticas con la energía reducida (λ^*). La Tabla 4 muestra los valores hallados eliminando por un lado solamente la componente circunferencial y también los resultados obtenidos anulando las dos componentes membranales que son estabilizantes. En ambos casos se indica el factor de reducción η planteado en la ecuación (4) como la relación entre λ^* y λ^C .

	Um completa	Um-U _{mss}		Um-U _{mss} -U _{mst}	
	λ^C [kPa]	λ^* [kPa]	η	λ^* [kPa]	η
MC1	3.885	1.942	0.50	1.994	0.51
MC2	2.551	1.485	0.58	1.320	0.52
MC3	2.921	1.772	0.61	1.612	0.55
MC4	2.512	1.593	0.63	1.443	0.57
MC5	2.542	1.649	0.64	1.358	0.53
MC6	2.497	1.730	0.69	1.479	0.59

Tabla 4: Cargas críticas con energía reducida.

En la Tabla 4 se puede observar que los valores de reducción de carga crítica obtenidos eliminando las dos componentes membranales estabilizantes establecen un límite inferior para las cargas críticas, si se lo compara con los obtenidos en los procedimientos de energía reducida o seguimiento de trayectoria. En estos casos se obtuvieron resultados del orden de 0.75, en el análisis de energía reducida, o valores de 0.6 para el factor de reducción en el proceso de seguimiento de trayectoria con imperfecciones geométricas, como se muestra en las Figuras 7 y 9 respectivamente.

7 DISCUSIÓN

Comparando los resultados presentados en las Figuras 7 y 9, el método de energía reducida predice un límite más alto que el análisis de sensibilidad ante imperfecciones que resulta más exacto. Al cotejar las tres metodologías presentadas, el método de rigidez reducida es el que predice los valores de carga crítica más bajos. En el método de energía reducida, las curvas tienden a valores de η que van de $\eta = 0.758$ a $\eta = 0.785$, mientras en el método de análisis no lineal, para la amplitud de imperfección máxima considerada ($\xi/t_{\min} = 1.00$), el límite inferior parece estar próximo a $\eta = 0.6$. En el método de rigidez reducida, los valores del

factor de reducción varían desde $\eta = 0.51$ a $\eta = 0.69$ al eliminar solamente la componente meridional (U_{mss}) mientras que al reducir ambas componentes, meridional y torsional, los valores oscilan entre $\eta = 0.5$ y $\eta = 0.59$. La Figura 13 muestra los factores de reducción hallados por las diferentes metodologías implementadas.

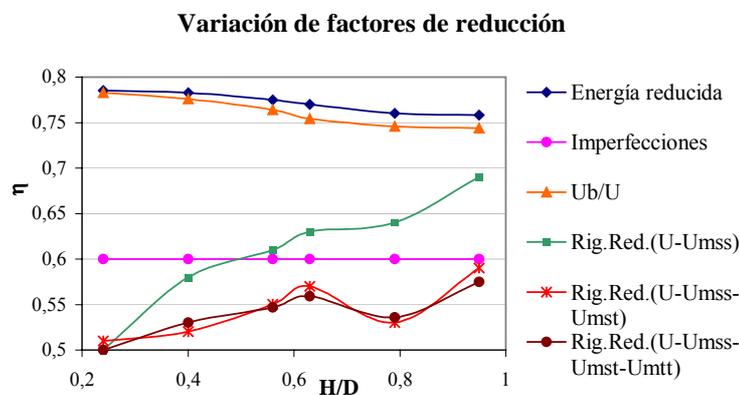


Figura 13: Comparación de Factores de reducción.

Claramente, los valores obtenidos por el método de energía reducida propuesto no pueden ser considerados un límite inferior seguro para las presiones del viento. La razón principal para la diferencia parece estar asociada a los diferentes modos de deformación obtenidos en el análisis de autovalores clásico y el estado crítico computado mediante análisis no lineal. El modo obtenido en el problema del autovalores clásico (y posteriormente usado en el método de energía reducida) no es realmente igual al modo encontrado en el análisis no lineal con imperfecciones. Esta diferencia afecta lo asumido previamente en la Sección 4.1 y por consiguiente a la exactitud en los cálculos.

Considerando estas observaciones, se intentó una manera alternativa de mejorar la aplicación del método usando el código como ABAQUS y se encontró que hace falta por lo menos una condición adicional para hallar un factor de reducción adecuado. Sin embargo, tal condición no está disponible en la formulación propuesta o requiere cálculos adicionales que son útiles para entender las diferencias en los resultados, pero que están más allá del propósito de aplicar de una manera simple el método de energía reducida para cargas del viento.

Con el método de rigidez reducida se predice de manera confiable un límite inferior para las cargas críticas en el caso de cargas de viento, obteniéndose formas de modo que no son similares a las obtenidas en el análisis de autovalores clásico con la energía completa. Esto muestra que efectivamente se produce un cambio de la geometría en el comportamiento poscrítico que también se observa en el análisis no lineal. Para obtener estos resultados fue necesario recurrir a un programa de propósitos específicos, no siendo suficiente el código general. Estudios posteriores deben ser realizados para analizar en qué caso se predice mejor la deformada obtenida en el análisis no lineal con la forma de modo hallada con la energía reducida, si eliminando todas las componentes estabilizantes o solo alguna de ellas.

8 CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos usando un código de elementos finitos de propósito general y la formulación de límites inferiores, es posible delinear una conclusión preliminar: La metodología de energía reducida propuesta no puede estimar un límite inferior para presiones del viento. El análisis no lineal de sensibilidad ante imperfecciones muestra resultados similares para todos los modelos, pero con cargas críticas menores que las estimadas por el

método de energía reducida. Aunque las diferencias en el factor de reducción no son demasiado grandes (aproximadamente 15%), el límite inferior calculado por el método de energía reducida es inseguro para el diseño.

La principal causa de las diferencias parece ser la forma del modo usada en los cálculos de la energía. Esta característica fue verificada en el análisis no lineal con seguimiento de trayectoria, y se observan cambios de la forma de modo entre la configuración de rigidez membranal completa y la configuración membranal reducida. Esto también se comprueba en el método de energía reducida. Tal cambio en los modos críticos era casi inexistente bajo presiones uniformes, como ya fue analizado por Sosa y Godoy (2005), pero sí fue observado en los casos estudiados para cargas de viento presentadas en este trabajo.

Este cambio en las formas de modo invalida la presunción que el modo crítico en el límite inferior es igual al correspondiente a la energía membranal completa. Esto invalida la ecuación (4).

La investigación presente ha mostrado que es posible implementar el método de energía reducida para estimar límites inferiores para presiones en tanques usando un código de elementos finitos de propósito general. Sin embargo, se necesitan cálculos adicionales para mejorar la metodología de energía reducida propuesta tendiente a aumentar la exactitud en el cálculo numérico de la carga límite inferior para las cáscaras sometidas a presiones no uniformes.

El método de rigidez reducida implementado en un código de propósitos específicos arrojó resultados confiables para predecir los límites inferiores de las cargas críticas bajo la acción de cargas no axilimétricas, como las de viento.

Agradecimientos: Esta investigación fue llevada a cabo mediante el apoyo de subsidios de la Universidad Nacional del Comahue y CONICET. Los autores agradecen al Dr. Fernando G. Flores, quien desarrolló la versión original del programa ALREF que fue adaptado para los cálculos de la última parte de este trabajo, y al Prof. James G. A. Croll, por las discusiones sobre límites inferiores. L.A. Godoy es miembro de la carrera del investigador de CONICET, Argentina.

REFERENCIAS

- Abaqus, *User's Manuals, Version 6.3*, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. Rhode Island, 2002.
- API Standard 650, *Welded steel tanks for oil storage*, American Petroleum Institute, Washington, D.C., 1988.
- ASCE-7-02, *Minimum Design Loads for Buildings and other Structures*, ASCE, Reston, Virginia. 2002.
- J.G.A. Croll, "Towards simple estimates of shell buckling loads," *Der Stahlbau, Part I, Heft, August; Part II Heft September*. 1975
- J.G.A. Croll, "Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology," *Thin Walled Structures*, vol. 23, 67-84, 1995.
- J.G.A. Croll y R. Batista, "Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 23, 333-343, 1981.
- J.G.A. Croll y C.P. Ellinas, "Reduced stiffness axial buckling of cylinders," *International Journal of Solid Structures*, vol. 19 (No 5), 461-477, 1983.
- F.G. Flores y L.A. Godoy, "Instability of shells of revolution using ALREF: Studies for wind loaded shells", In: *Buckling of Shells in Land, in the Sea and in the Air*, Elsevier Applied Science, Oxford, 213-222, 1991.

- L.A. Godoy, *Theory of Elastic Stability: Analysis and Sensitivity*, Taylor and Francis, Philadelphia, 2000.
- R.C. Jaca, L.A. Godoy y F.G. Flores, "Límites inferiores para cáscaras cilíndricas bajo cargas no axilimétricas", *Mecánica Computacional* vol. 24, 1723-1740, 2005.
- W.T. Koiter, "On the Stability of Elastic Equilibrium," *Ph.D. Thesis, Delft (in Dutch with English summary)*. H.J. Paris, Amsterdam, (1945).
- P.A. Macdonald, K.C.S. Kwok y J.D. Holmes, "Wind loads on circular storage bins and tanks: I. Point pressure measurements on isolated structures," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 31, 165-188, 1988.
- G. Portela y L.A. Godoy, "Wind pressures and buckling of cylindrical steel tanks with conical roof," *Journal of Construction Steel Research*, vol. 61, No. 6, 786-807, 2005.
- E. Riks, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, 1060-1065, 1972.
- E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, 529-551, 1979.
- R.F. Rish, "Forces in cylindrical shells due to wind," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 36, 791-803, 1967.
- E.M. Sosa, "Computational Buckling Analysis of Cylindrical Thin-Walled Aboveground Tanks," *Ph.D. Thesis, University of Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico*, 2005.
- E.M. Sosa y L.A. Godoy, "Computation of lower-bound buckling loads using general-purpose finite element codes", *Proceedings of 3rd International Conference on Structural Stability and Dynamics*, held at Kissimmee, Florida, 2005.
- E.M. Sosa, L.A. Godoy y J.G.A. Croll. "Computation of lower-bound buckling loads using general-purpose finite element codes," *Computers and Structures*, under review, 2006.
- J.C. Virella, L.A. Godoy y L.E. Suárez, "Dynamic buckling of anchored steel tanks subjected to horizontal earthquake loadings," *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62, 521-531, 2006.
- S. Yamada y J.G.A. Croll, "Buckling behavior pressure loaded cylindrical panels," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 115(2), 327-344, 1989.
- S. Yamada y J.G.A. Croll, "Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, vol. 60, 290-299, 1993.
- S. Yamada y J.G.A. Croll, "Contributions to understanding the behavior of axially compressed cylinders," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, vol. 66, 299-309, 1999.