

DISEÑO DE UN FLEXOR DE PRECISIÓN PARA UN DISPOSITIVO GENERADOR DE ÁNGULOS PEQUEÑOS PARA APLICACIONES DE CALIBRACIÓN EN METROLOGÍA

Francisco Bottero^a, Martín A. Pucheta^{a,b} y Clemar A. Schurrer^c

^a*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina S/N, X5016ZAA Córdoba, Argentina, franciscobottero@hotmail.com, mpucheta@frc.utn.edu.ar, <http://cii.frc.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

^c*Centro de Metrología Dimensional (CEMETRO), Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Armada Argentina 4050, 5016 Córdoba, Argentina, cschurrer@cbasicas.frc.utn.edu.ar, <http://www.investigacion.frc.utn.edu.ar/cemetro>*

Palabras Clave: Mecanismos Flexibles, Flexores, Error Parasitario, Optimización.

Resumen. El diseño estructural de dispositivos de precisión tiene gran importancia en la etapa inicial del diseño conceptual de los mismos. En este trabajo se presenta el proceso de diseño conceptual de un mecanismo flexible para un generador de ángulos pequeños de un grado de libertad y se persigue obtener una precisión nanométrica y tener un rango de trabajo de un grado. Se propone estudiar las alternativas para diseñar el flexor principal del mecanismo flexible de una mesa de soporte de los instrumentos a calibrar angularmente (niveles, autocolimadores). En particular, se revisan las ecuaciones analíticas para dimensionar flexores circulares eligiendo las fórmulas más precisas entre las disponibles en la literatura. Mediante simulaciones de análisis estático lineal con el software SolidWorks Simulation(R) se evaluó el desplazamiento de localización del centro instantáneo de rotación del flexor y las tensiones máximas para diversos parámetros característicos. Se trabajó en forma iterativa para aumentar la flexibilidad del mecanismo en el sentido de los movimientos deseados, satisfaciendo restricciones de tensiones admisibles, y al mismo tiempo, se buscó incrementar la rigidez (reducir la flexibilidad) en el sentido de los movimientos parasitarios indeseados. Se concluye que el flexor circular óptimo es el de espesor mínimo y esto depende de la capacidad de manufactura. Se ilustran los estudios para los distintos parámetros geométricos de los flexores analizados.

1 INTRODUCCIÓN

En el diseño estructural de dispositivos de precisión tiene gran importancia la etapa inicial de diseño conceptual. Esta etapa se facilita si se emplean simulaciones computacionales utilizando el método de los elementos finitos y técnicas de optimización.

Particularmente en el campo de la metrología angular, autocolimadores y niveles electrónicos están calibrados mediante el uso de generadores de ángulos pequeños, mientras que instrumentos de medición de menor precisión, como ser polígonos, bloques angulares, reglas de senos, niveles convencionales, suelen calibrarse mediante el uso de tablas de índices.

Los diseños existentes de dispositivos para lograr ángulos pequeños consisten en mecanismos rígidos y cuerpos de contacto de precisión permiten obtener diseños de partida para aplicar técnicas de reemplazo de uniones flexibles conduciendo a obtener modelos pseudo-rígidos (Howell, 2001; Pucheta y Cardona, 2010; Howell et al., 2013). Las uniones flexibles tienen la ventaja de evitar superficies en contacto, eliminando la necesidad de lubricación y mantenimiento (Lobontiu, 2002). En contraposición, al reemplazar una unión rotativa por un flexor aparecen concentraciones de tensiones y desplazamientos indeseados de los centros instantáneos de rotación que se conocen como movimientos parasitarios. Estos dos problemas pueden reducirse eligiendo restricciones adecuadas. Existen dos laboratorios de metrología que recientemente desarrollaron sus propios generadores de ángulos pequeños basados en flexores de precisión, entre los que se pueden mencionar el del INRiM en Italia (Astrúa y Pisani, 2009) y el del UME en Turquía (Yandayan et al., 2012). El generador del INRiM está basado en un flexor circular de pequeños desplazamientos. El generador del UME tiene un flexor comercial basado en vigas cruzadas en X y posee baja precisión.

En el presente trabajo se realiza el diseño conceptual de un mecanismo generador de ángulos pequeños, cuyo rango de medición va desde 0° a 1° respecto a la horizontal, empleando una unión flexible de un grado de libertad (GDL). El objetivo a largo plazo es que este mecanismo de precisión brinde la posibilidad de calibrar y homologar una amplia variedad de instrumentos empleados actualmente en la industria y laboratorios de metrología para la medición de ángulos (inclinación), rectitud, planicidad, paralelismo y perpendicularidad, entre otros. El foco de esta investigación son los flexores de precisión. Para ello, se describen varias configuraciones existentes en la literatura especializada (Lobontiu, 2002; Howell et al., 2013) de donde se toman ecuaciones analíticas de flexores aceptada en la comunidad de ingeniería de precisión. Luego, se enfatiza el empleo de flexores circulares (Acer y Sabanovic, 2001; Yong et al., 2008) y se parametrizan los estudios con los parámetros principales de diseño.

Los resultados y los conjuntos de parámetros de diseño se estudiaron mediante simulaciones de análisis estático lineal empleando el método de los elementos finitos (MEF) implementado en el software SolidWorks® Simulation, con el objetivo de ampliar la información que proveen las ecuaciones analíticas y analizar con una mayor fidelidad el movimiento rotacional de la unión y por ende comprender cómo encarar estrategias de optimización para mejorar la precisión del instrumento de medición.

Con estas simulaciones preliminares se construirá un primer prototipo físico para caracterizar los errores reales del dispositivo. Por las condiciones de uso a temperatura controlada y en mesa antivibratoria activa, no se requiere analizar fenómenos de fatiga. A futuro, se realizarán simulaciones para diseñar un indicador flexible y hallar formas de compensar o corregir las indicaciones de dispositivo para distintos pesos del instrumento calibrado.

2 EL GENERADOR DE ÁNGULOS PEQUEÑOS

El instrumento que se muestra a modo esquemático en la [Figura 1](#) emplea mecanismos rígidos y cuerpos de contacto (unión deslizante) para la generación de ángulos pequeños.

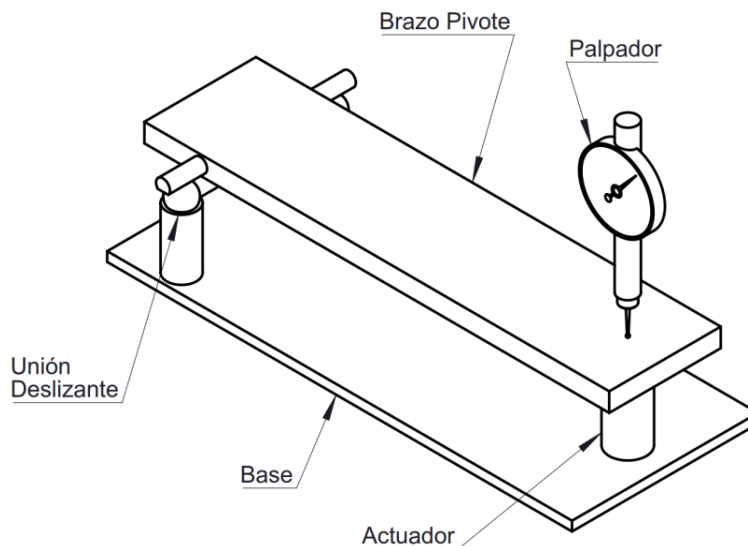


Figura 1: Esquema de un generador de ángulos pequeños con unión deslizante

Su funcionamiento consiste en un brazo pivote, diseñado de forma que resulte lo más rígido y liviano posible, el cual rota en torno a una unión deslizante, conformada por un par de esferas, apoyadas sobre conos unidos rígidamente a la base del instrumento, una superficie vertical restringe además su traslación. El brazo pivote es accionado mediante un actuador piezoeléctrico y por medio de un palpador/comparador se mide sobre su cara superior, la elevación y con el mismo se calcula el ángulo barrido por el brazo. Finalmente, se compara la medición obtenida con el palpador y la del instrumento que se desea calibrar y homologar. Por ejemplo, el dispositivo permite calibrar autocolimadores montando el espejo sobre el brazo pivotante como lo muestra la [Figura 2](#).

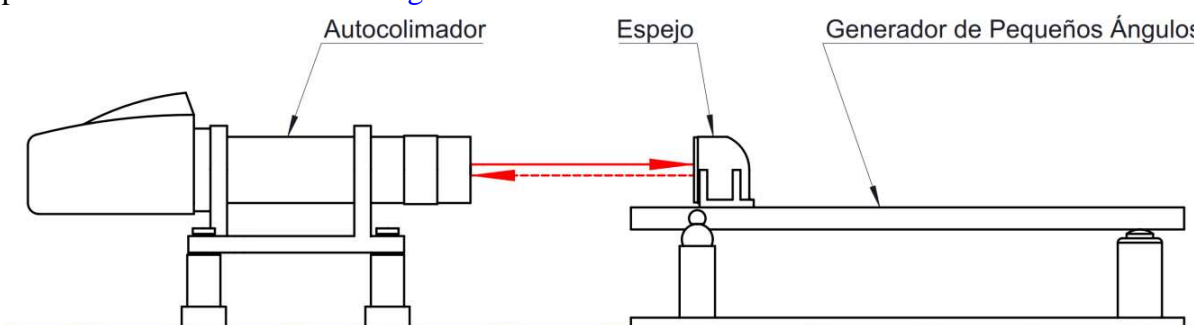


Figura 2: Medición en generador de pequeños ángulos con el instrumento a homologar (Autocolimador)

La desventaja de este modelo es que existen múltiples superficies de contacto con juegos pequeños que requieren de una compleja puesta a punto y recalibración. Este problema podría superarse mediante el empleo de uniones flexibles que no presenten deslizamientos de partes ni desgastes. En la [Figura 3](#), se aprecia a modo esquemático, un generador de ángulos pequeños que emplea un flexor circular, con idéntico procedimiento de calibración y homologación que para el generador de ángulos con unión deslizante. El flexor circular será el objeto de estudio de este trabajo.

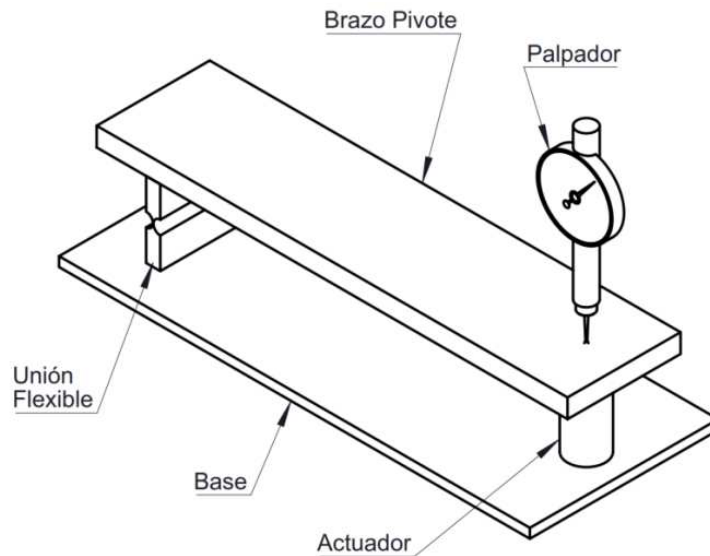


Figura 3: Esquema de un generador de ángulos pequeños con unión flexible

En comparación con el modelo rígido, este mecanismo basado en flexores tiene inconvenientes menores que deben considerarse en la etapa de diseño y son las concentraciones de tensiones, la capacidad de rotación limitada, la rotación impura debido al desplazamiento del centro instantáneo de rotación y la sensibilidad a la variación de la temperatura (Astrúa y Pisani, 2009). Por esto último, en la fabricación de estas uniones deben emplearse materiales que tengan bajo coeficiente de dilatación térmica, pero que además posean alta capacidad de carga vertical y sean flexibles. El material que, en general, se adapta a las exigencias requeridas es una aleación de Cobre-Berilio, cuyas principales propiedades se detallan en la Tabla 1.

Propiedades Aleación Cu-Be	
Módulo Elástico E	$1,15 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson ν	0,30
Modulo Cortante G	$5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Tensión de Ruptura σ_R	$4,83 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ó 483 N/mm^2 (MPa)
Tensión Límite Elástico σ_f	$2,21 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ó 221 N/mm^2 (MPa)
Conductividad Térmica α	118 W/m.K

Tabla 1: Propiedades aleación Cobre - Berilio

Nótese que este material posee baja constante elástica tomando al acero como referencia. Por tratarse de un material dúctil y considerando de que se trata de una pieza que está sometida a pequeñas rotaciones generadas lentamente y se pueden ignorar los efectos dinámicos, la tensión admisible del material σ_{adm} , se obtiene de afectar la tensión de fluencia del material σ_f por un coeficiente de seguridad n cuyo valor adoptado es de 1,5

$$\sigma_{Adm \text{ CuBe}} = \frac{\sigma_f \text{ CuBe}}{n} = \frac{221 \text{ N/mm}^2 \text{ (MPa)}}{1,5} = 147,3 \text{ MPa} \quad (1)$$

Habiendo definido el material, se centrarán los esfuerzos en cómo incrementar la precisión de esta unión flexible mediante el estudio de su geometría, sin superar la tensión admisible del material y dentro de las factibilidades técnicas de fabricación disponibles, que en nuestro caso es el corte por electroerosión, lo cual impone un espesor mínimo del flexor por restricción de

manufactura.

3 TEORIA DE FLEXORES

La geometría de los flexores y sus condiciones de borde impuestas por la forma en que se éstos se conectan a los cuerpos rígidos que se desean mover en forma relativa, es de vital importancia para lograr otros múltiples objetivos de diseño. Primero se describirán sus clasificaciones en base a parámetros globales como grados de libertad y posiciones relativas de ejes de movimiento, y luego se procederá a desarrollar las ecuaciones analíticas de la ecuación constitutiva de los flexores circulares.

3.1 Concepto y criterios de clasificación

Las uniones flexibles son miembros delgados que proveen una rotación relativa entre dos cuerpos rígidos tal como se observa en la Figura 4, en la cual se compara una junta rotacional convencional con una unión flexible.

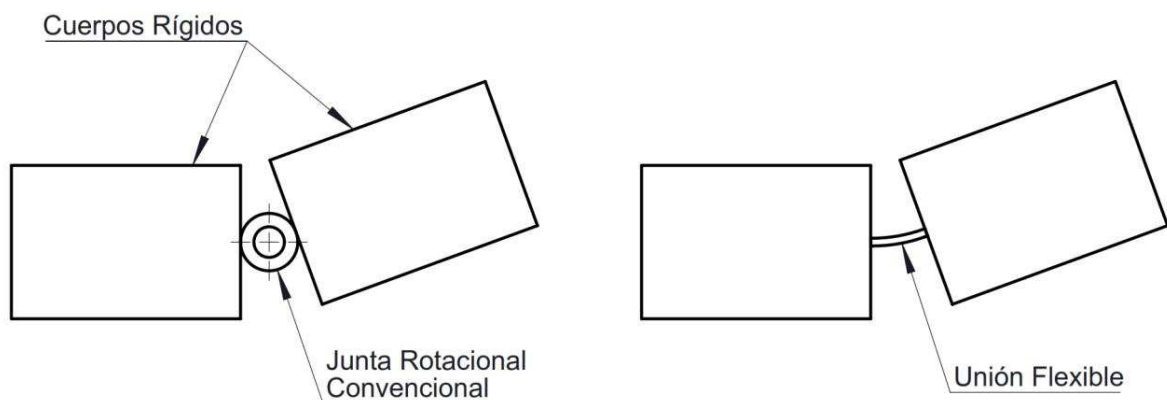


Figura 4: Junta rotacional convencional vs unión flexible

En las juntas convencionales, el movimiento de rotación se realiza debido al contacto entre las superficies cilíndricas del eje y la de su alojamiento, ambos concéntricos, y las superficies laterales que evitan su desplazamiento en dirección paralela al eje. Las uniones flexibles proveen una rotación similar con la única diferencia de que el centro ficticio de pivote de los elementos que proveen el movimiento ya no se encuentran exactamente en el punto medio del flexor y puede espacialmente, desplazarse aún afuera del mismo.

Estos flexores pueden fabricarse de dos formas muy usuales, (i) usando un miembro flexible independiente que se fija (se atornilla o suelda) entre dos cuerpos rígidos ó (ii) se obtiene mecanizando una entalla en una pieza, tal como indica la Figura 5.

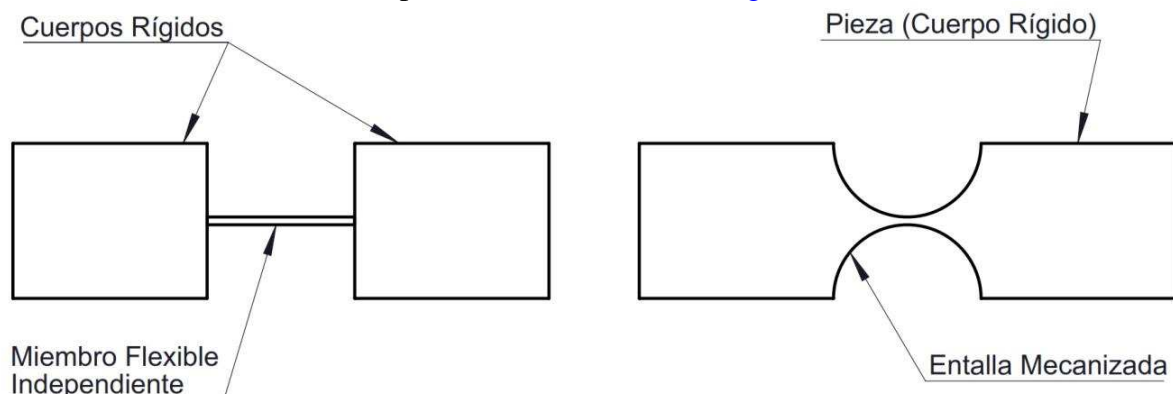


Figura 5: Clasificación de las uniones flexible según el método de fabricación

En el caso de los flexores obtenidos a partir de una entalla, ésta puede efectuarse de forma plana, parabólica, hiperbólica, elíptica o circular, en sus facetas simétricas o asimétricas con respecto a sus ejes x o y , como se muestra en la Figura 6.

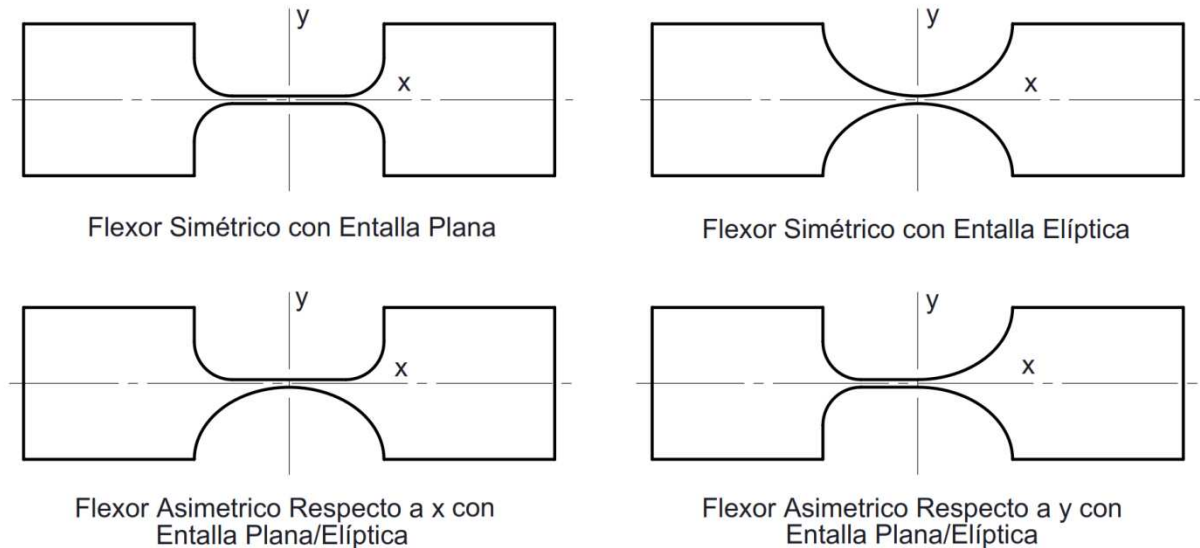


Figura 6: Clasificación de las uniones flexible según los tipos de entallas

Otra clasificación posible es en función de los grados de libertad (GDL) que estas uniones permitan entre los cuerpos que conectan. Se las clasifica en flexores de eje único, eje doble o eje múltiple, tal como se aprecia en la Figura 7.

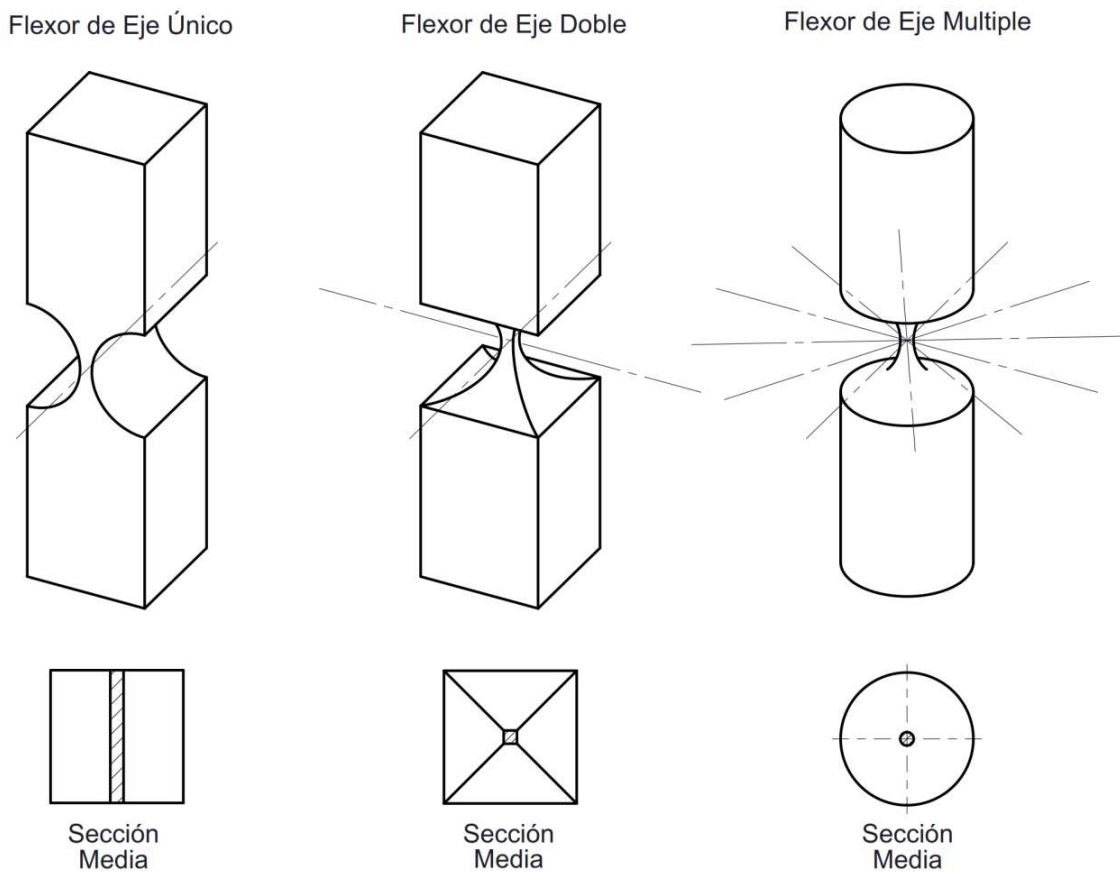


Figura 7: Clasificación de las uniones flexible según sus grados de libertad

3.2 Selección del flexor a emplear en el generador de ángulos

La configuración que mejor se adapta a los requerimientos del generador de ángulos pequeños es una unión flexible de entalla circular simétrica y un grado de libertad, tal como indica el croquis de la [Figura 8](#).

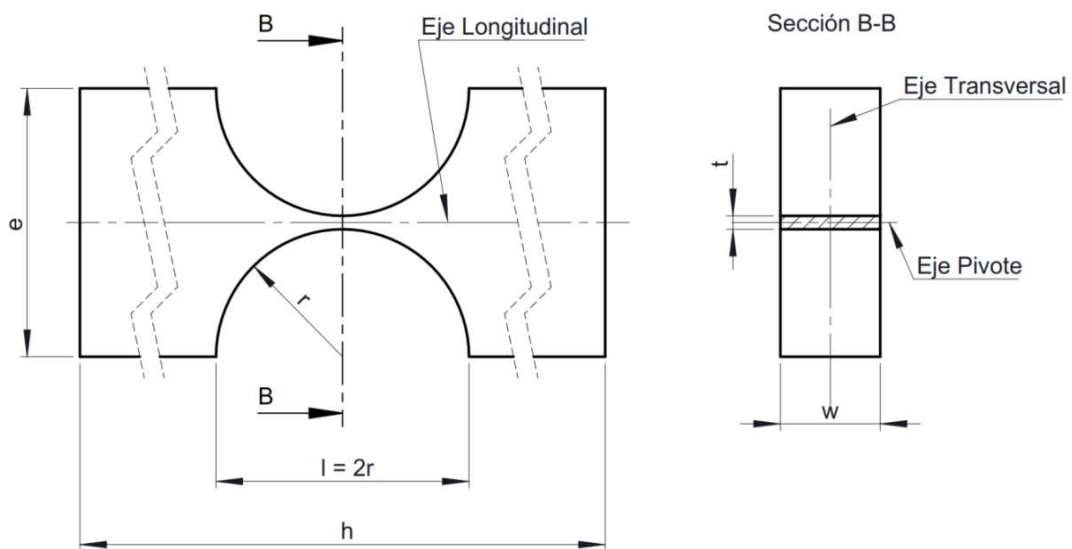


Figura 8: Unión flexible de entalla circular simétrica y 1 GDL

Donde h , w y e son respectivamente el alto, el ancho y el espesor del flexor, mientras que l , r y t son el alto, el radio y el espesor de la entalla. Este flexor de un solo grado de libertad permite la rotación en torno un único eje, mientras que restringe los demás movimientos, ya sean de rotación como de traslación. A estos movimientos, no deseados, se los conoce con el nombre de *movimientos parasitarios*.

Cabe destacar que para lograr un aumento de la precisión del flexor se debe incrementar la capacidad de rotación deseada en torno a su eje pivote, y reducir las rotaciones y desplazamientos respecto a los ejes longitudinal y transversal. Dicho en otras palabras, se debe incrementar la flexibilidad a la rotación deseada y reducir la flexibilidad en direcciones restringidas o parasitarias (o lo que es lo mismo incrementar la rigidez a la tracción y al corte).

La elección del flexor con entalla circular simétrica no es arbitraria, para hacerlo se realizaron una serie de simulaciones por elementos finitos mediante el empleo del software SolidWorks Simulation, en la cual, todos los análisis se realizaron bajo las mismas condiciones de contorno y se utilizó el mismo espesor en el plano medio.

En la [Tabla 2](#) y su correspondiente [Figura 9](#), pueden observarse los resultados obtenidos para diversas entallas; ordenadas según desplazamientos resultantes decrecientes, mientras que en las imágenes de la [Figura 10](#) se muestra el estado tensional de estas entallas, en escala deformada de 10.

Tipo de Entalla		σ_{Max} MPa	¿Verifica?	δ_x μm	δ_y μm	δ_{Res} μm
a	Simétrica plana	26,7	SI	-15,48	0,54	15,49
b	Simétrica elíptica vertical	99,9	SI	-3,514	0,24	3,52
c	Asimétrica respecto a x elíptica/circular	177,5	NO	-3,24	0,18	3,24
d	Simétrica circular	144,2	SI	-2,35	0,17	2,36
e	Asimétrica respecto a y elíptica/circular	195,8	NO	-1,73	0,22	1,74
f	Asimétrica respecto a y circular/elíptica	201,1	NO	-1,51	0,11	1,51
g	Simétrica elíptica horizontal	239,3	NO	-1,33	0,12	1,34
h	Asimétrica respecto a x circular/elíptica	179,2	NO	-1,31	0,15	1,32

Tabla 2: Tensiones máximas y desplazamientos en función del tipo de entalla

Donde σ_{Max} es la tensión máxima de Von Mises, δ_x el desplazamiento en x , δ_y el desplazamiento en y y δ_{Res} el desplazamiento resultante.

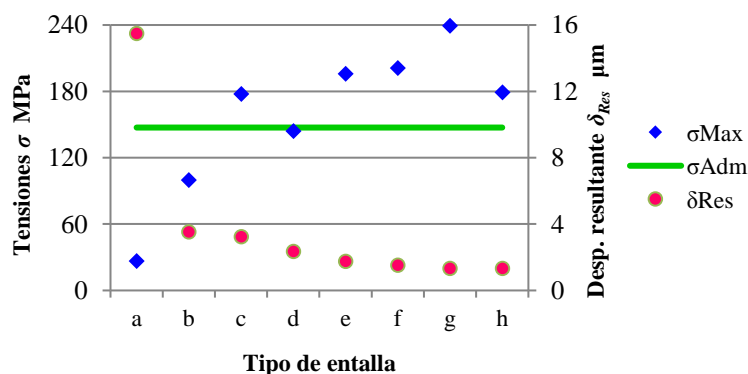


Figura 9: Tensiones máximas, admisibles σ_{Max} , σ_{Adm} y desplazamientos resultantes δ_{Res} en función del tipo de entalla

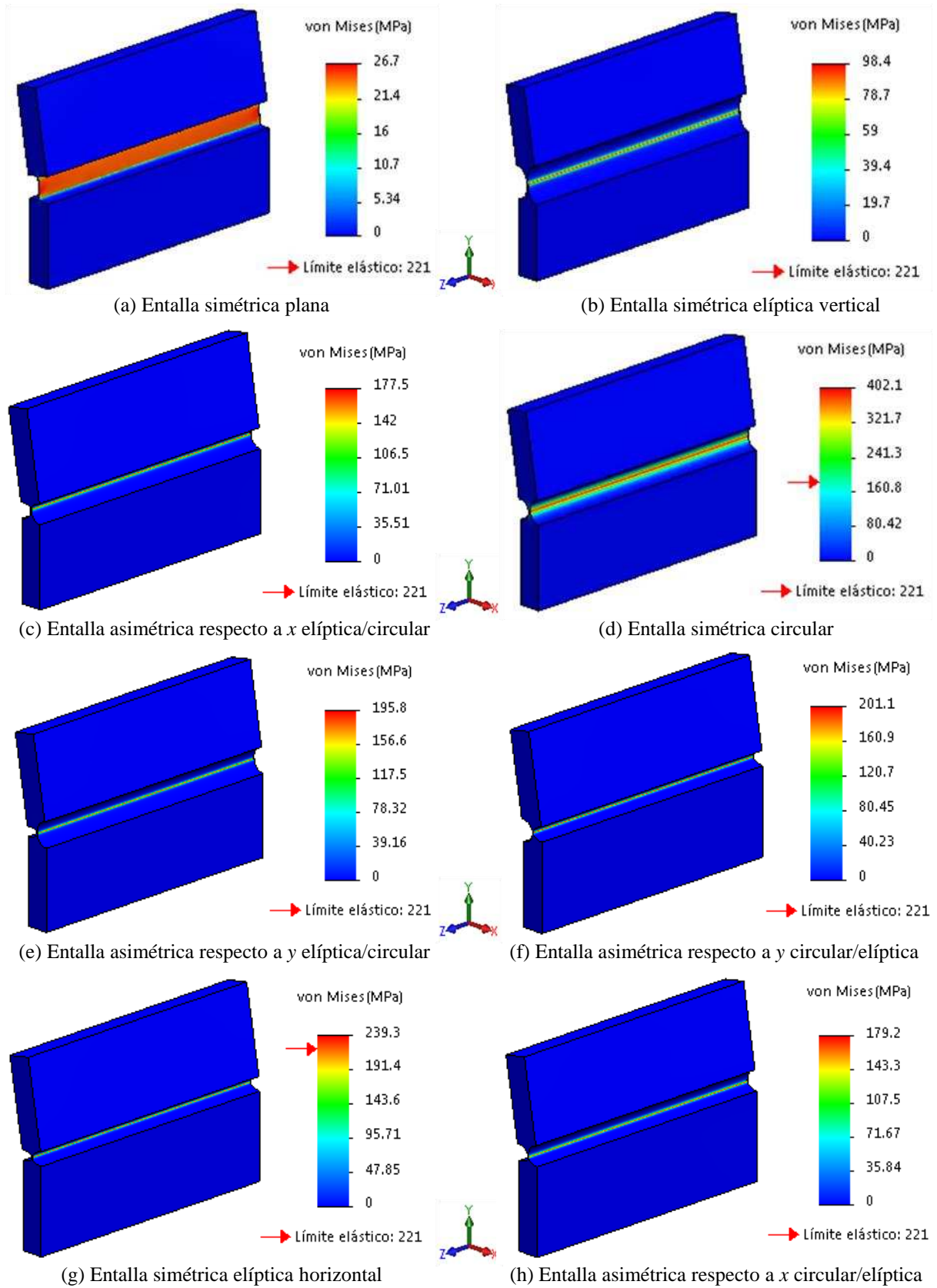


Figura 10: Tensiones de Von Mises para distintos tipos de entallas

Debe destacarse que para todos los modelos bajo estudio se adoptó el mismo espesor de flexor mínimo de un valor igual a 0,1mm. Además, no se reporta el desplazamiento en sentido del eje z por ser de valores muy pequeños, alrededor de los $0,05 \mu\text{m}$. Puede apreciarse que a medida que la tensión máxima incrementa, el desplazamiento resultante del eje pivote disminuye, para corroborar que este desplazamiento sea realmente el del eje se realizaron mediciones en los puntos extremos del flexor, tal como indica la Figura 11, y como resultaron ser valores muy próximos se adoptó un promedio de ambas mediciones.

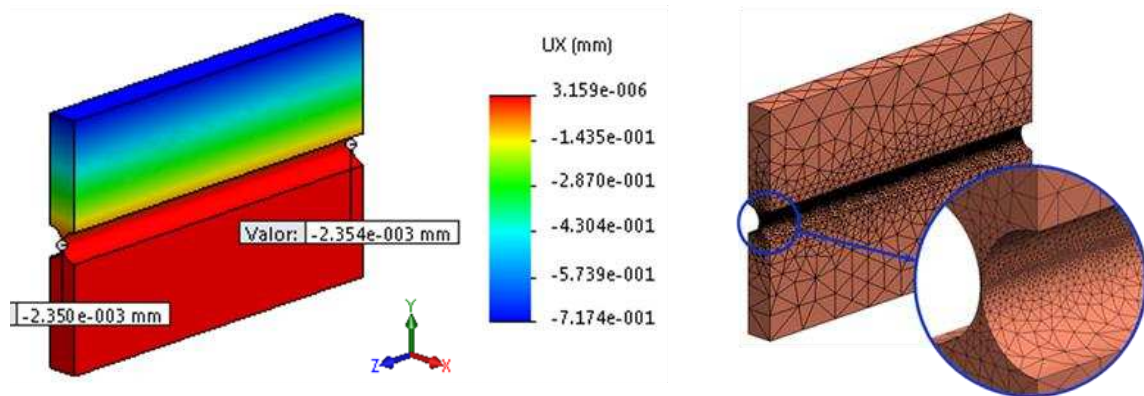


Figura 11: Desplazamiento de eje pivote en x (izq.) y malla de elementos finitos (der.)

En este estudio se muestra que este flexor con *entalla circular simétrica* es el que presenta menor desplazamiento del centro instantáneo de rotación entre diversos flexores que se compararon para un mismo espesor de entalla, t , y el mismo material, y además presenta valores de tensiones máximas dentro de las admisibles para una aleación Cobre-Berilio.

3.3 Fórmulas que rigen el comportamiento del flexor

Para el análisis del comportamiento de este flexor se recurrió al libro *Diseño de Uniones Flexibles* (“Design of Flexure Hinges”) de Lobontiu (2002), en donde se deducen expresiones analíticas para el comportamiento elástico de los flexores.

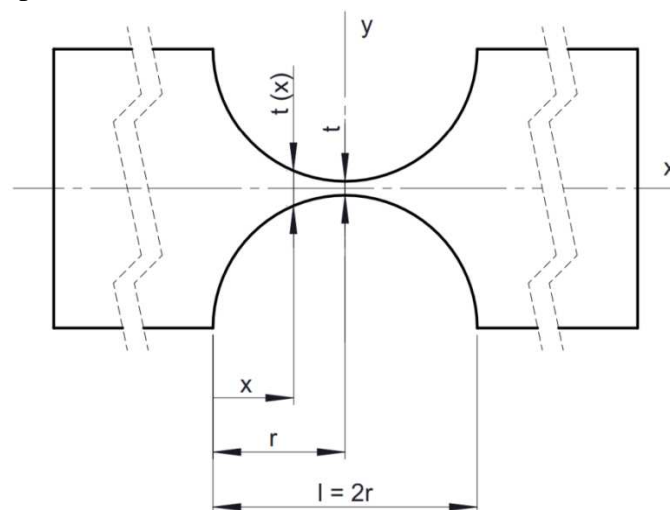


Figura 12: Variación del espesor del flexor en función de x

La variación del espesor del flexor de la Figura 12 responde a la ecuación

$$t(x) = t + 2 \left[r - \sqrt{x(2r - x)} \right] \quad (2)$$

Valuando esta función en cualquiera de sus extremos $t(0)$ ó $t(2r)$ se obtiene como resultado el espesor original de la pieza e a la cual se le realizó la entalla:

$$t(0) = t + 2 \left[r - \sqrt{0(2r - 0)} \right] = t + 2r = e \quad (3)$$

$$t(2r) = t + 2 \left[r - \sqrt{2r(2r - 2r)} \right] = t + 2 \left[r - \sqrt{2r(0)} \right] = t + 2r = e \quad (4)$$

Mientras que valuando para un valor de $x = r$, se obtiene el espesor mínimo del flexor o espesor de entalla t el cual a posterior se reemplazará en las fórmulas analíticas de la flexibilidad

$$t(r) = t + 2 \left[r - \sqrt{r(2r - r)} \right] = t + 2[r - r] = t \quad (5)$$

Lobontiu (2002) resuelve para un flexor de entalla circular simétrica las flexibilidades a la rotación como

$$C_{\theta} = \frac{24r}{Ewt^3(2r+t)(4r+t)^3} \left[t(4r+t)(6r^2 + 4rt + t^2) + 6r(2r+t)^2 \sqrt{t(4r+t)} \arctan \sqrt{1 + \frac{4r}{t}} \right] \quad (6)$$

a la tracción como

$$C_x = \frac{1}{Ew} \left[\frac{2(2r+t)}{\sqrt{t(4r+t)}} \arctan \sqrt{1 + \frac{4r}{t}} - \frac{\pi}{2} \right] \quad (7)$$

y al corte como

$$C_y = \frac{3}{4Ew(2r+t)} \left\{ 2(2+\pi)r + \pi t + \frac{8r^3(44r^2 + 28rt + 5t^2)}{t^2(4r+t)^2} + \frac{(2r+t)\sqrt{t(4r+t)}[-80r^4 + 24r^3t + 8(3+2\pi)r^2t^2 + 4(1+2\pi)rt^3 + \pi t^4]}{\sqrt{t^5(4r+t)^5}} - \frac{8(2r+t)^4(-6r^2 + 4rt + t^2)}{\sqrt{t^5(4r+t)^5}} \arctan \sqrt{1 + \frac{4r}{t}} \right\} \quad (8)$$

Siendo w , t y r las dimensiones indicadas en las Figuras 8 y 12 y E el módulo de Young (o Elástico) del material, estas flexibilidades permiten calcular los desplazamientos para estados de carga coplanares a xy despejando de sus expresiones que ignoran efectos cruzados

$$C_{\theta} = \frac{\theta_z}{M_z}; \quad C_x = \frac{\delta_x}{F_x}; \quad \text{y} \quad C_y = \frac{\delta_y}{F_y} \quad (9)$$

En cuanto a la tensión máxima, se la calcula como una función lineal con el momento flector, a través del inverso del módulo resistente de la sección mínima, de dimensiones w por t . Esta “regla del espejo M/W ” asume que se cumple la Ley de Hooke (ley lineal entre tensión y deformación) y la hipótesis de Navier (secciones planas se mantienen planas ante la flexión), y veremos más adelante que no tendrá completa validez.

$$\sigma_{Max} = \frac{M_f}{W_{Min}} \quad (10)$$

Donde:

$$\theta = M_f \cdot C_\theta \quad \rightarrow \quad M_f = \frac{\theta}{C_\theta} \quad (11)$$

Y se asume que la tensión máxima acontece en la línea más alejada en el plano transversal medio del flexor a una distancia $t/2$

$$W_{Min} = \frac{w \cdot t^3}{12(t/2)} = \frac{w \cdot t^2}{6} \quad (12)$$

Siendo θ el ángulo rotado que adopta un valor ángulo máximo de $\pi/180$ (1°), se reemplaza (11) y (12) en la ecuación (10)

$$\sigma_{Max} = \frac{6 \cdot \theta}{C_\theta \cdot w \cdot t^2} \quad (13)$$

4 MODELADO DEL FLEXOR

Se comienza esta sección realizando algunas consideraciones acerca de la geometría del flexor, con el objetivo de simplificar el problema, para ello se deberán tener en cuenta las dimensiones del flexor definidas en la [Figura 8](#).

La altura del flexor h puede variar en función del montaje, y debido a que su valor no afecta al comportamiento del objeto bajo estudio, se la considera como una constante $h=cte$. Por otro lado, se decidió asignar al ancho del flexor w un valor de 120mm y al espesor e de 10mm, en función de las dimensiones de generadores de ángulos pequeños ya existentes y de las dimensiones de los objetos que debe soportar la mesa principal.

De este modo, sólo queda como variable independiente el espesor mínimo de la entalla t , el cual puede adoptar valores que van desde el espesor del flexor e , hasta 0,1mm, ya que por razones constructivas nos sería imposible obtener menores espesores. Una vez fijada esta variable, junto con el espesor del flexor e nos determinan el valor del radio r y alto l de la entalla (variables dependientes). Esto puede deducirse de la [Ecuación 3](#).

$$e = t + 2r \quad \rightarrow \quad r(e, t) = \frac{e - t}{2} \quad ; \quad l = 2r \quad (14)$$

$$r_{min} = \frac{e - t_{max}}{2} = \frac{10 \text{ mm} - 10 \text{ mm}}{2} = 0 \text{ mm} \quad (15)$$

$$r_{max} = \frac{e - t_{min}}{2} = \frac{10 \text{ mm} - 0,1 \text{ mm}}{2} = 4,95 \text{ mm} \quad (16)$$

Por lo tanto, las fronteras de las variables del diseño son:

$$0,1 \text{ mm} \leq t \leq 10 \text{ mm} = e \quad (17)$$

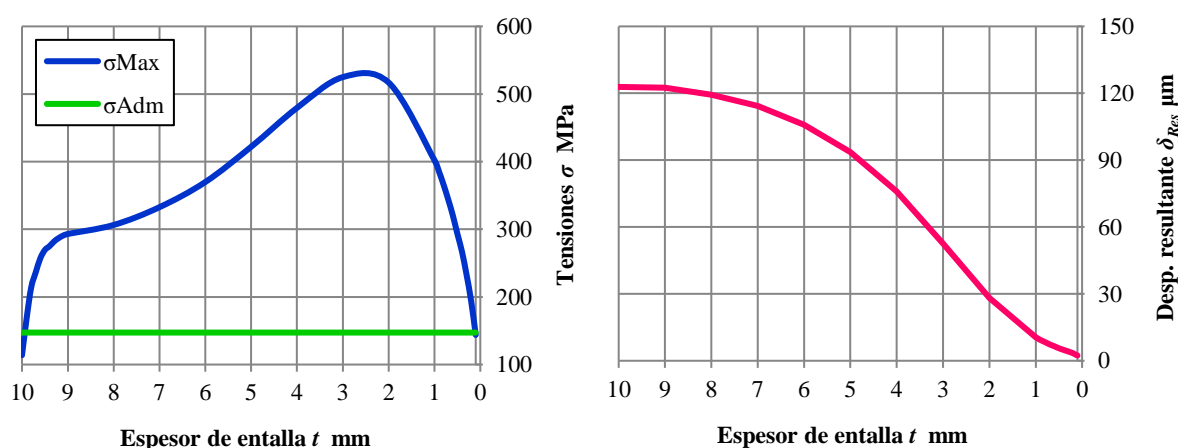
$$0 \text{ mm} \leq r \leq 4,95 \text{ mm} \quad (18)$$

Antes de proponer algoritmos de optimización automática y viendo la alta no linealidad de las flexibilidades que deben optimizarse como objetivos contrapuestos, maximizar C_θ y minimizar las flexibilidades en C_x y C_y , sujeto a la restricción de tensiones admisibles, se realizaron experimentos para conocer el espacio de diseño mediante una serie de estudios por elementos finitos.

Para llegar a la geometría final del flexor, se analizó cómo las variaciones del espesor de entalla t afectaban al modelo. En la **Tabla 3** puede observarse un resumen de los resultados obtenidos, acompañada con los gráficos de la **Figura 13** donde se muestran las tensiones y desplazamientos resultantes en función del espesor de entalla.

t [mm]	r [mm]	σ_{Max} [MPa]	¿Verifica?	δ_x [μm]	δ_y [μm]	δ_{Res} [μm]	Comportamiento
10	0,00	113,8	SI	-122,85	-0,01	122,85	Viga
9	0,50	293,1	NO	-122,45	-0,01	122,45	Viga
8	1,00	306,4	NO	-119,35	-0,01	119,35	Viga
7	1,50	332,7	NO	-114,35	0,00	114,35	Viga
6	2,00	369,9	NO	-105,85	0,01	105,85	Viga
5	2,50	422,0	NO	-93,69	0,01	93,69	Viga
4	3,00	479,5	NO	-75,93	0,03	75,93	Viga
3	3,50	525,0	NO	-52,63	0,04	52,63	Viga
2	4,00	517,0	NO	-28,22	0,06	28,22	Flexor/Viga
1	4,50	402,1	NO	-10,56	0,08	10,56	Flexor
0,9	4,55	385,0	NO	-9,36	0,08	9,36	Flexor
0,8	4,60	365,6	NO	-8,31	0,09	8,31	Flexor
0,7	4,65	344,0	NO	-7,32	0,08	7,32	Flexor
0,6	4,70	320,6	NO	-6,47	0,09	6,47	Flexor
0,5	4,75	293,2	NO	-5,65	0,10	5,66	Flexor
0,4	4,80	266,9	NO	-4,90	0,10	4,90	Flexor
0,3	4,85	232,7	NO	-4,19	0,11	4,19	Flexor
0,2	4,90	193,9	NO	-3,52	0,14	3,52	Flexor
0,1	4,95	143,8	SI	-2,35	0,16	2,36	Flexor

Tabla 3: Tensiones máximas y desplazamientos en función del espesor de entalla



(a) Tensiones $\sigma_{Max}(t)$, $\sigma_{Adm}(t)$

(b) Desplazamiento resultante $\delta_{Res}(t)$

Figura 13: Tensiones máximas, admisibles σ_{Max} , σ_{Adm} y desplazamientos resultantes δ_{Res} en función del espesor de entalla t

En las imágenes de la **Figura 14** pueden apreciarse, en escala deformada de 10, la distribución de tensiones en algunas de las piezas analizadas (aquellas indicadas en negrita en la **Tabla 3**).

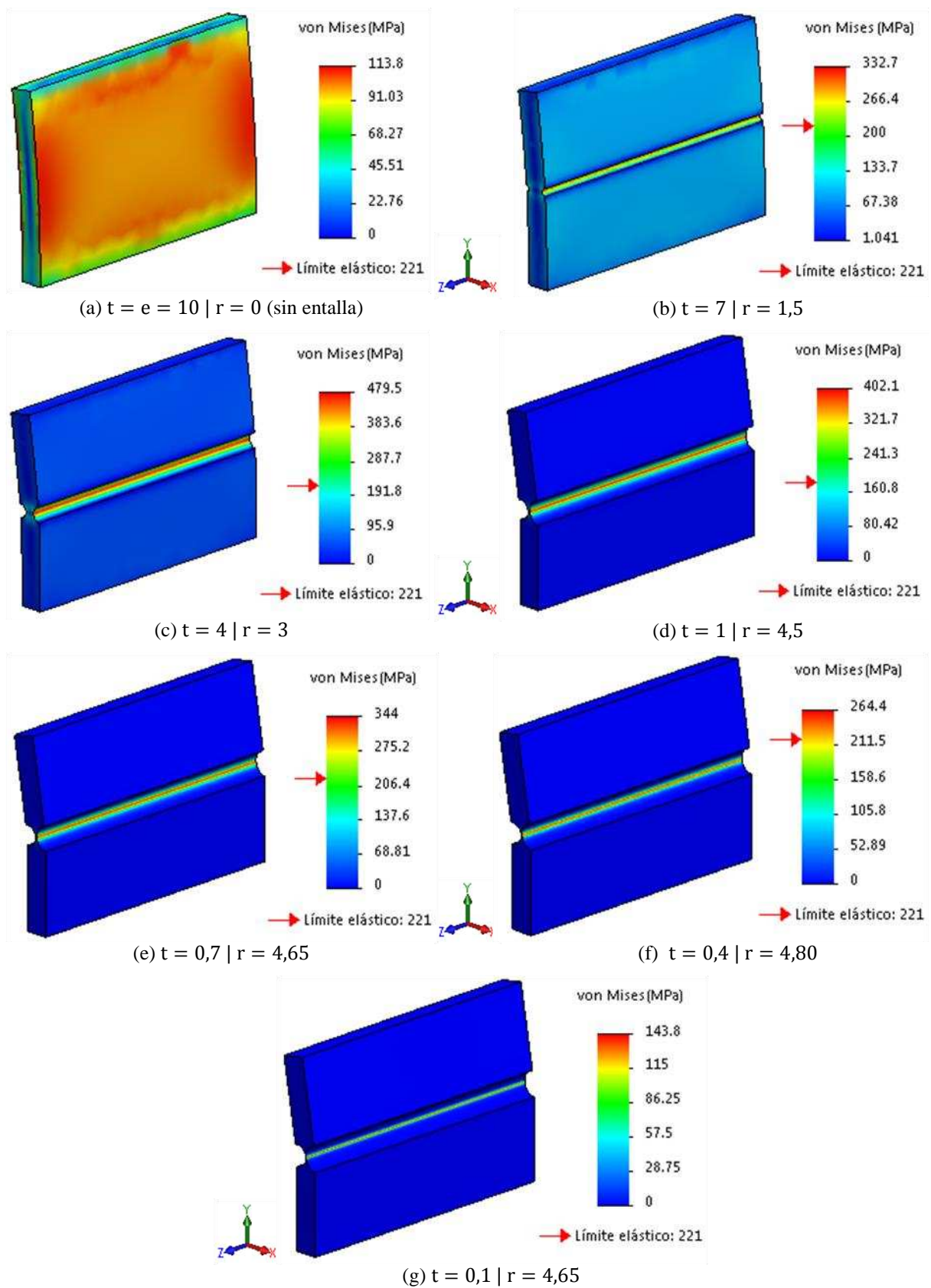


Figura 14: Tensiones de Von Mises para diversos anchos y radios de entalla.

Como conclusión importante de estos análisis debe destacarse que en un principio, en los casos de las Figura 14 (b) y (c), la pieza se comporta como una viga empotrada en su base (entre los valores de $e/t=1$ hasta $e/t=10/3$) que concentra tensiones en su zona media a causa de la entalla mecanizada, siendo estas tensiones mayores a mayor tamaño de entalla y decrecen aproximadamente en forma lineal con el incremento de espesor como se muestra en la Figura 13 (a) en el rango $t \geq 3$, reproduciendo lo esperable por resistencia de materiales, a menor sección resistente mayor tensión a igual fuerza.

Sin embargo, se llega a un punto en el cual a medida que la entalla se torna más pronunciada, las tensiones máximas son menores. Este fenómeno se debe a que la pieza deja de comportarse como una viga empotrada para pasar a comportarse como una unión flexible.

Además otro beneficio poco intuitivo es en cuanto a los desplazamientos totales, éstos resultan decrecientes a medida que disminuye el espesor de la entalla.

Puede afirmarse entonces, que la única limitación para la obtención de un flexor más preciso es constructiva y no está relacionada con la resistencia propia del material, en el caso de los autores, se definió que el límite mínimo a mecanizar de la entalla es de 0,1mm, pero puede reducirse utilizando otras tecnologías de fabricación.

Entonces, se concluye que *“para un espesor de flexor, existe una geometría de entalla que es la transición de trabajar como viga a trabajar como flexor, en donde favorablemente, un menor espesor de entalla reduce las tensiones máximas y los desplazamientos resultantes”*.

4.1 Empleo de ecuaciones analíticas de flexibilidad

Con esta base de conocimiento basada en estudios por elementos finitos, se comenzó a investigar sobre qué expresiones analíticas tenían validez en el rango de diseño de interés. En una revisión relativamente reciente realizada por Yong *et al.*, (2008), se compararon simulaciones por elementos finitos del flexor con entalla circular con expresiones analíticas de flexibilidades en función de la relación radio sobre espesor de entalla. En esos estudios se tomó a la simulación como referencia y se determinó que la de menor error eran las fórmulas de Lobontiu (2002). Por ello, en el presente trabajo, se verificaron los resultados obtenidos mediante la creación de un script en Matlab basado en dichas ecuaciones. La ejecución de este script arroja como resultado una representación gráfica de las flexibilidades a la rotación C_θ , tracción C_x y corte C_y y las tensiones máximas σ_{Max} y admisibles σ_{Adm} en función de los espesores de entalla t según las ecuaciones (6), (7), (8) y (13), como se muestra en la Figura 15. Se optó por representar gráficamente estas ecuaciones hasta un espesor máximo de entalla de 4mm, ya que para espesores mayores, como veremos en los párrafos siguientes, los resultados del cómputo de las tensiones pierden validez.

De estos gráficos y en concordancia con las fórmulas analíticas, puede deducirse que las flexibilidades a la rotación, tracción y corte crecen con la disminución del espesor t ó lo que es lo mismo con el incremento del radio r . Sin embargo, considerando espesores de entalla inferiores a 0,5mm, la flexibilidad a la rotación es de 8 órdenes superior a la flexibilidad a la tracción y 4 órdenes superior a la flexibilidad al corte, combinación que da como resultado una reducción de los desplazamientos resultantes (movimientos no deseados ó parasitarios). Con esto se puede afirmar que una mayor precisión de la unión flexible se obtendrá para el punto que maximiza la flexibilidad a la rotación, ya que por más que las rigideces a la tracción y corte disminuyan para dicho punto, esta disminución de la rigidez es despreciable frente a la ganancia en flexibilidad a la rotación obtenida. Entonces, en las implementaciones de optimización, los objetivos de maximizar las rigideces a la tracción y al corte pueden desconsiderarse.

En cuanto a las tensiones máximas, graficadas en la Figura 15 (d), éstas resultan decrecientes en todo momento respecto al espesor de la entalla. Siendo el punto que maximiza la flexibilidad

a la rotación el que en simultáneo minimiza la tensión máxima, satisfaciendo la tensión admisible.

Claramente, las figuras muestran que “a medida que el espesor de la entalla disminuye, aumentan las flexibilidades y se reducen las tensiones máximas”.

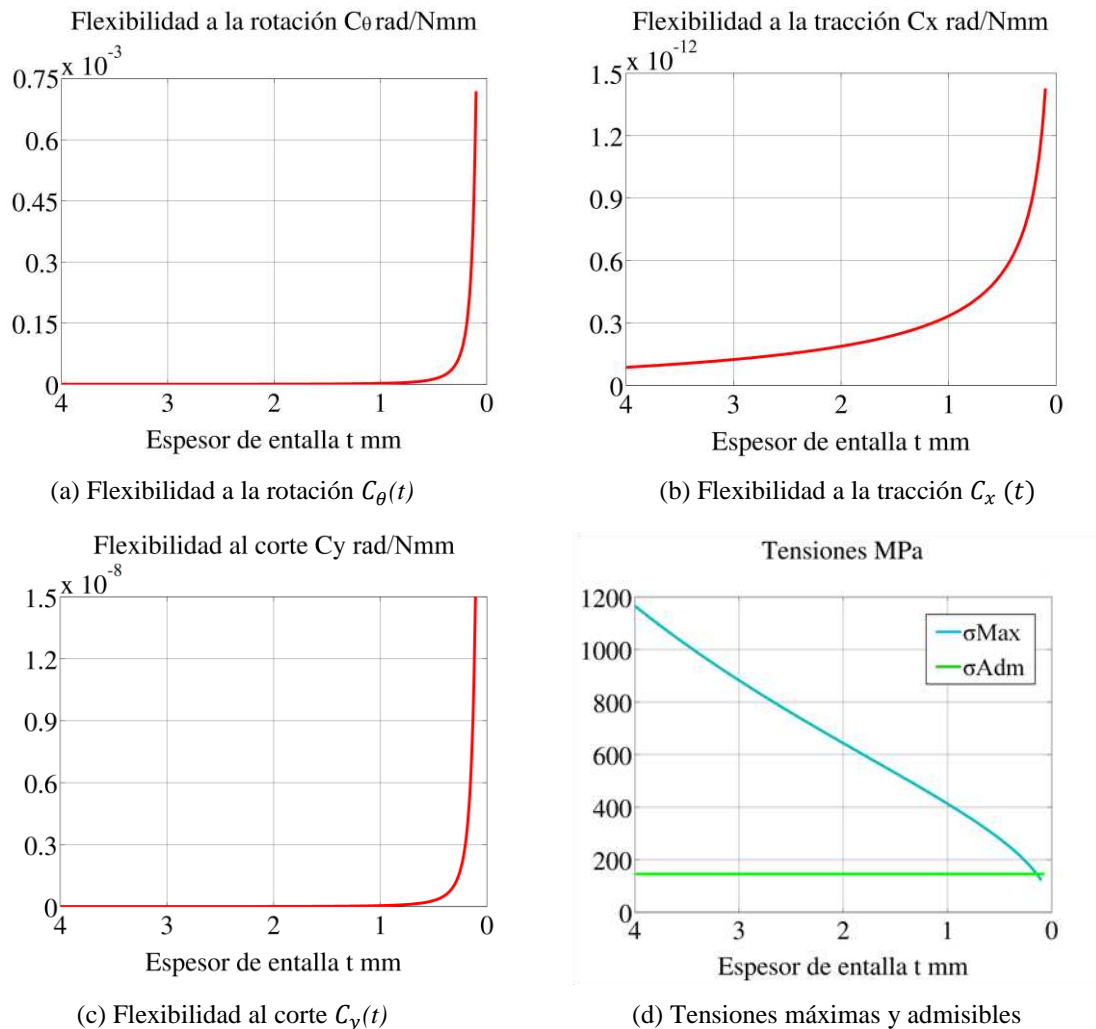


Figura 15: Flexibilidades C_{θ} , C_x y C_y , tensiones máximas y admisibles σ_{Max} , σ_{Adm} en función del espesor de entalla t

Para confirmar que la pieza se comporta efectivamente como una unión flexible para espesores de entalla menores a 2mm, se realizaron estudios adicionales para determinar las tensiones y que se denominarán MEF y M/W, donde M/W es el correspondiente a utilizar las ecuaciones de Lobontiu (2002) seguida de la ecuación (13) para determinar las tensiones.

4.2 Estudio de la validez del cálculo de las tensiones

Esto puede apreciarse en la Tabla 4 y su correspondiente Figura 16 al comparar las tensiones máximas obtenidas por los estudios de elementos finitos versus la M/W, allí se ve claramente cómo para espesores de entalla mayores a 2mm las tensiones máximas obtenidas partiendo de las ecuaciones crecen indefinidamente, esto se debe a que las mismas son válidas solamente para uniones flexibles. Dicho en otras palabras, lo que sucede es que al aumentar el espesor de entalla, se reduce notablemente la flexibilidad a la rotación, es decir, aumenta la rigidez en el

sentido del movimiento deseado, lo que resulta perjudicial para la precisión del instrumento, y esto a su vez trae aparejado elevadas tensiones máximas.

t[mm]	r [mm]	$\sigma_{\text{Max(MEF)}} [\text{MPa}]$	$\sigma_{\text{Max(M/W)}} [\text{MPa}]$	¿Verifica?	Comportamiento
4	3,0	479,5	1166,4	NO	Viga
3	3,5	525,0	882,6	NO	Viga
2	4,0	517,0	643,5	NO	Flexor/Viga
1	4,5	402,1	413,4	NO	Flexor
0,9	4,6	385,0	388,7	NO	Flexor
0,8	4,6	365,6	363,3	NO	Flexor
0,7	4,7	344,0	337,0	NO	Flexor
0,6	4,7	320,6	309,4	NO	Flexor
0,5	4,8	293,2	280,1	NO	Flexor
0,4	4,8	266,9	248,5	NO	Flexor
0,3	4,9	232,7	213,5	NO	Flexor
0,2	4,9	193,9	173,0	NO	Flexor
0,1	5,0	143,8	121,4	SI	Flexor

Tabla 4: Comparación tensiones máximas obtenidas por MEF vs analíticas de Lobontiu (2002) seguida de la M/W

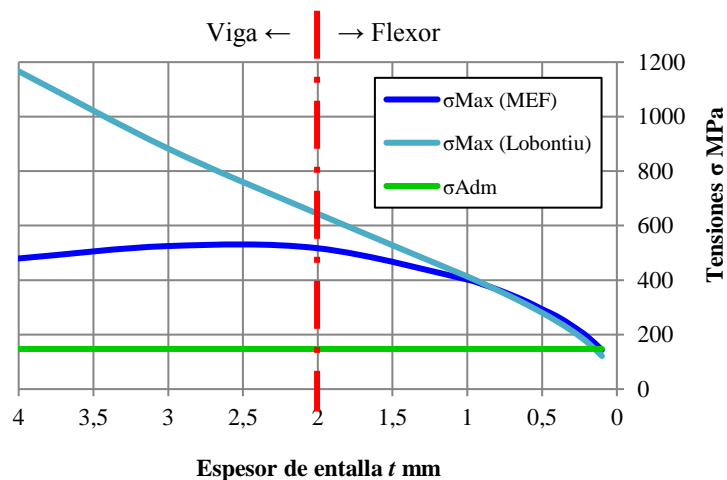


Figura 16: Comparación tensiones máximas obtenidas por MEF vs derivadas de Lobontiu + M/W

Como conclusión de lo que se observa en la figura [Figura 16](#), es claro que la simplificación del cálculo de tensiones provisto por la regla M/W da un buen ajuste en la zona de interés para el diseño de flexores, con espesores menores a 1 mm, lo cual permitiría utilizar esa aproximación de la tensión admisible en posteriores optimizaciones.

4.3 Estudio del ancho del flexor empleando formulas analíticas

Finalmente, se decidió analizar cómo afectaba la variación del ancho del flexor en el modelo. Para ello se modificó el script realizado en Matlab, para que arrojará, según muestra la [Figura 17](#) gráficos en función de dos variables: los espesores de entalla t y el ancho del flexor w . Se trazaron los gráficos de las flexibilidades a la rotación C_θ , tracción C_x y corte C_y y las tensiones máximas σ_{Max} y admisibles σ_{Adm} para espesores de entalla variable entre 0,1 mm a 2 mm y un

ancho variable desde 20mm a 200mm.

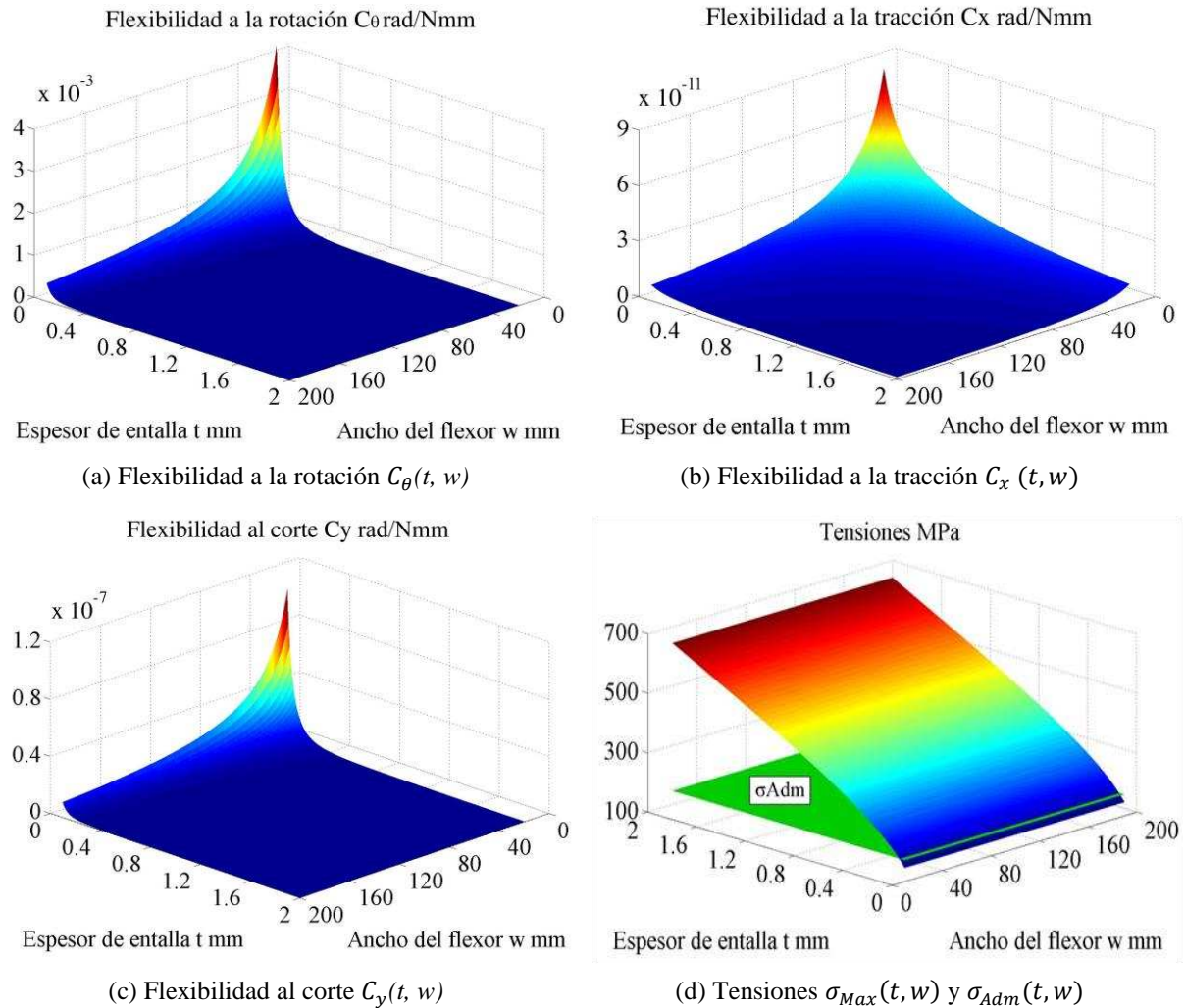


Figura 17: Flexibilidades C_θ , C_x y C_y , tensiones máximas y admisibles σ_{Max} , σ_{Adm} en función del espesor de entalla t y ancho del flexor w

Como puede observarse, de acuerdo a las fórmulas de Lobontiu (2002), al reducir el ancho del flexor se ven incrementadas las flexibilidades a la rotación, tracción y corte, en primera instancia y hasta un ancho de alrededor de los 60mm el incremento es poco notorio, mientras que para anchos aún menores, las flexibilidades crecen rápidamente. En cuanto a las tensiones máximas, las mismas se mantienen constantes al variar el ancho del flexor.

Entonces el efecto de reducir el ancho y sus costos asociados, produce un incremento de las flexibilidades y su variación no afecta el valor de las tensiones máximas.

4.4 Estudio del ancho del flexor empleando MEF

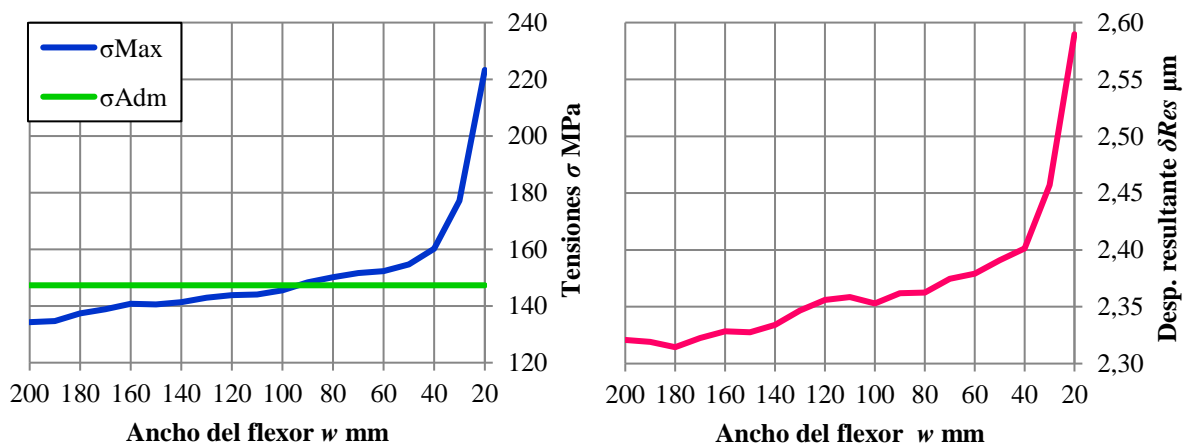
Debido a los resultados poco intuitivos obtenidos analíticamente, se procedió a analizar por elementos finitos cómo variaba la tensión máxima en relación el ancho del flexor. Estos estudios se elaboraron para flexores de espesor de entalla de 0,1mm (valor, que como se vio es el óptimo alcanzable) y diferentes anchos.

En la Tabla 5 puede observarse un resumen de los resultados obtenidos, acompañada con los gráficos de tensiones y desplazamientos resultantes en función del ancho del flexor mostrados en la Figura 18. A posterior, en las imágenes de la Figura 19 pueden apreciarse, en escala

deformada de 10, la distribución de tensiones en algunas de las piezas analizadas (aquellas indicadas en negrita en la [Tabla 5](#)).

w [mm]	σ_{Max} [MPa]	¿Verifica?	δ_x [μ m]	δ_y [μ m]	δ_{Res} [μ m]
20	223,3	NO	-2,38	1,03	2,59
30	177,1	NO	-2,37	0,64	2,46
40	160,2	NO	-2,36	0,46	2,40
50	154,7	NO	-2,36	0,37	2,39
60	152,3	NO	-2,36	0,31	2,38
70	151,6	NO	-2,36	0,28	2,37
80	150,2	NO	-2,35	0,24	2,36
90	148,3	NO	-2,35	0,21	2,36
100	145,5	SI	-2,35	0,19	2,35
110	144,1	SI	-2,35	0,18	2,36
120	143,8	SI	-2,35	0,16	2,36
130	142,9	SI	-2,34	0,15	2,35
140	141,3	SI	-2,33	0,14	2,33
150	140,5	SI	-2,32	0,12	2,33
160	140,8	SI	-2,33	0,11	2,33
170	138,9	SI	-2,32	0,10	2,32
180	137,4	SI	-2,31	0,08	2,31
190	134,7	SI	-2,32	0,07	2,32
200	134,3	SI	-2,32	0,08	2,32

Tabla 5: Tensiones máximas y desplazamientos en función del ancho del flexor



(a) Tensiones $\sigma_{Max}(t)$, $\sigma_{Adm}(t)$

(b) Desplazamiento resultante $\delta_{Res}(t)$

Figura 18: Tensiones máximas y admisibles σ_{Max} , σ_{Adm} y desplazamientos resultantes δ_{Res} en función del ancho del flexor w

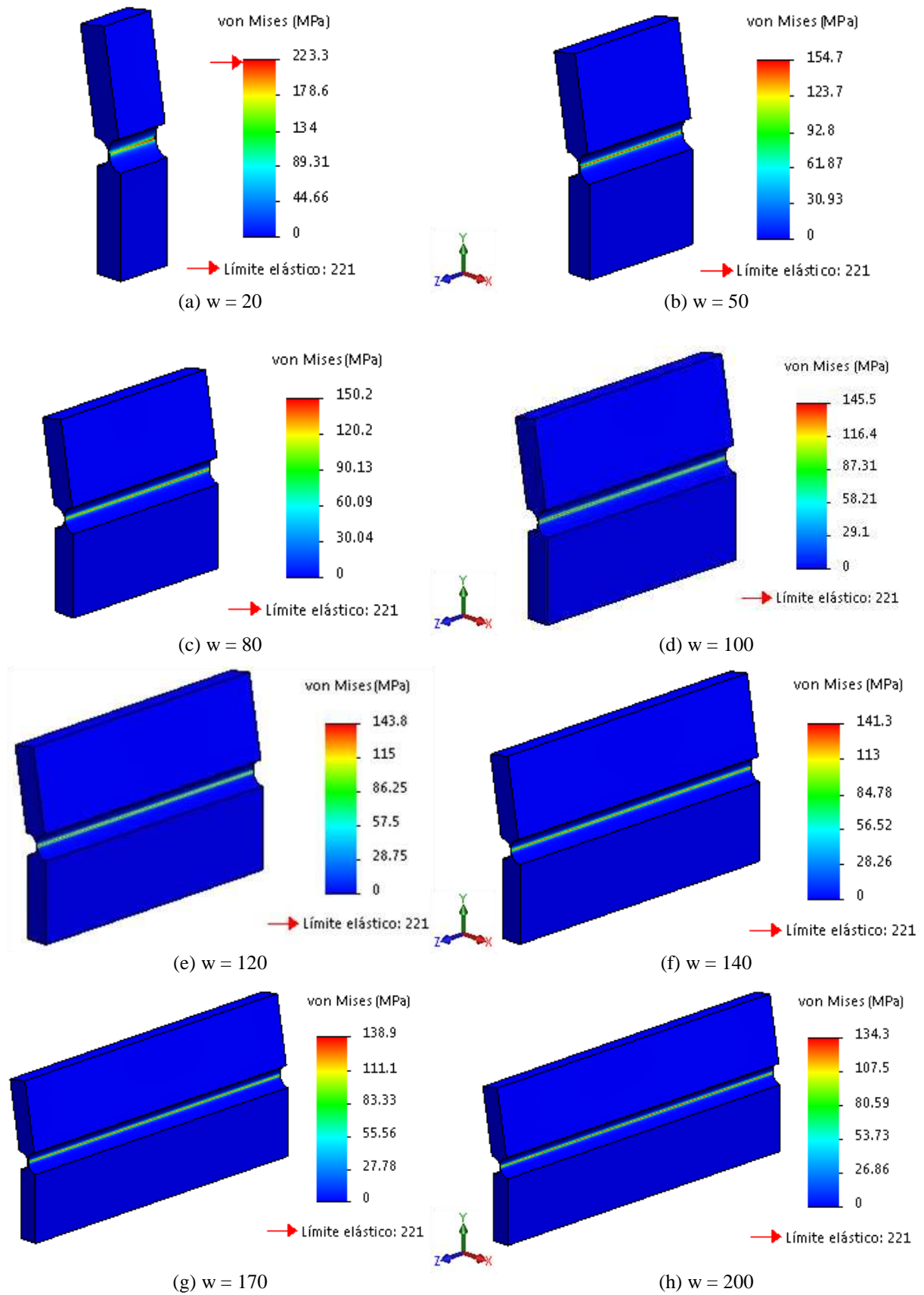


Figura 19: Tensiones de Von Mises para diferentes anchos del área resistente del flexor.

Estos resultados permiten concluir, que si bien las tensiones máximas y los desplazamientos crecen al reducir el espesor del flexor, lo hacen con una pendiente no muy pronunciada, exceptuando espesores de flexor muy pequeños (menores a 40mm) donde éstas crecen exponencialmente. De esta forma queda demostrado, que las tensiones máximas no son constantes, sino más bien levemente crecientes con la reducción del espesor del flexor.

Resumiendo, la reducción del ancho del flexor conduce a un aumento de las tensiones máximas y de los desplazamientos resultantes del eje instantáneo de rotación.

Este tipo de crecimiento de las tensiones con el ancho no se encuentra en la literatura y se estudiará a futuro realizando regresiones con los datos experimentales para determinar si es de tipo hiperbólico, polinómico o exponencial. En nuestro caso, lo intuitivo es que el mayor ancho del flexor provee mayor área resistente a la compresión ante el peso de los instrumentos medidos y a la vez provee de estabilidad y rigidez ante giros alrededor de eje longitudinal de la mesa o barra de medición.

Por otro lado, como se analizó con anterioridad a medida que el ancho del flexor disminuye se produce un incremento de las flexibilidades a la rotación, tracción y corte. Sin embargo, los desplazamientos resultantes aumentan. Esto sucede ya que al volverse cada vez más angosto el flexor, la asimetría en malla produce que flexione más en un extremo que en el otro. El eje pivote del flexor tiende a cruzarse en lugar de mantenerse normal al plano xy , dejando de ser válida la consideración de los desplazamientos nulos en z . Un claro ejemplo de esto puede verse en la [Figura 19](#) para el caso de un flexor de 20mm de ancho provocando una concentración de las tensiones máximas e incrementando los desplazamientos en dicho extremo, esto debería poder corregirse con una correcta elección de las condiciones de simetría en el mallado que se realizará en trabajos futuros.

En última instancia, se decidió evaluar una alternativa de diseño que implica el empleo de una unión flexible con un alivianamiento en su zona media como se empleó en el flexor del INRiM ([Astrúa y Pisani, 2009](#)), de modo en que se muestra en la [Figura 20](#).

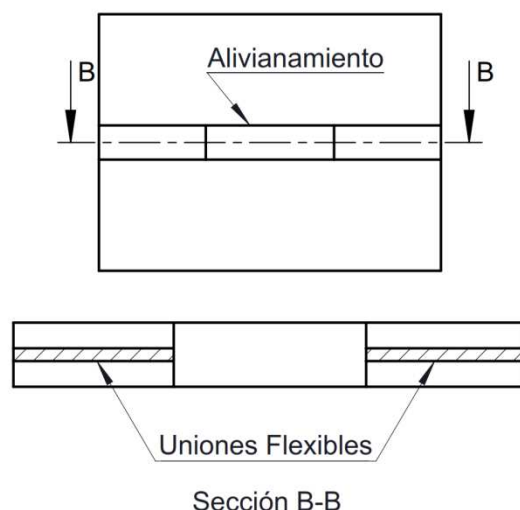


Figura 20: Flexor con alivianamiento en su zona media

Se realizaron análisis por elementos finitos y se compararon los resultados obtenidos en los estudios de flexores con alivianamientos y flexores sin alivianamientos. Para poder realizar esta comparación se empleó un parámetro denominado ancho equivalente del flexor w_{Eq} cuya fórmula responde a las siguientes ecuaciones:

Para piezas con alivianamiento “ c/A ”:

$$w_{Eq} = w - a \quad (19)$$

Para piezas sin alivianamiento “s/A”:

$$w_{Eq} = w \quad (20)$$

Siendo w el ancho total del flexor sin alivianamiento y a el ancho del alivianamiento.

Los estudios se realizaron para flexores de espesor de entalla de 0,1mm (valor, que como se vio es el óptimo alcanzable) y diferentes anchos equivalentes, partiendo de una pieza de 120mm de ancho total. En la **Tabla 6** puede observarse un resumen de los resultados obtenidos, acompañada con la **Figura 21** con los gráficos de tensiones máximas y desplazamientos resultantes en función del ancho equivalente del flexor. A continuación, en las imágenes de la **Figura 22** pueden apreciarse, en escala deformada de 10, la distribución de tensiones en algunas de las piezas analizadas (aquellas indicadas en **negrita** en la **Tabla 6**).

a [mm]	w_{Eq} [mm]	$\sigma_{Max\ c/A}$ [MPa]	$\sigma_{Max\ s/A}$ [MPa]	¿Verifica?	$\delta_{Res\ c/A}$ [μ m]	$\delta_{Res\ s/A}$ [μ m]
100	20	207,8	204,2	NO	2,53	2,59
90	30	180,1	177,1	NO	2,44	2,46
80	40	163,5	160,2	NO	2,41	2,40
70	50	160,3	154,7	NO	2,38	2,39
60	60	155,4	152,3	NO	2,38	2,38
50	70	153,1	151,6	NO	2,38	2,37
40	80	150,5	150,2	NO	2,38	2,36
30	90	148,3	148,3	NO	2,38	2,36
20	100	145,5	145,5	SI	2,37	2,35
10	110	144,8	144,1	SI	2,37	2,36
0	120	143,8	144,1	SI	2,36	2,36

Tabla 6: Tensiones máximas y desplazamientos en flexores con y sin alivianamientos para igual ancho equivalente w_{Eq}

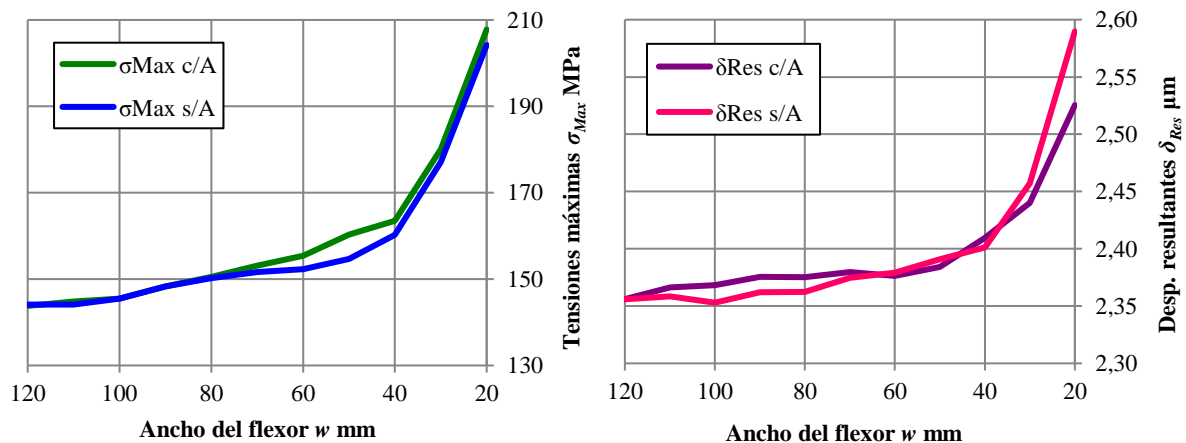


Figura 21: Tensiones máximas σ_{Max} (izquierda) y desplazamientos resultantes δ_{Res} (derecha) en flexores con y sin alivianamientos para igual ancho equivalente w_{Eq}

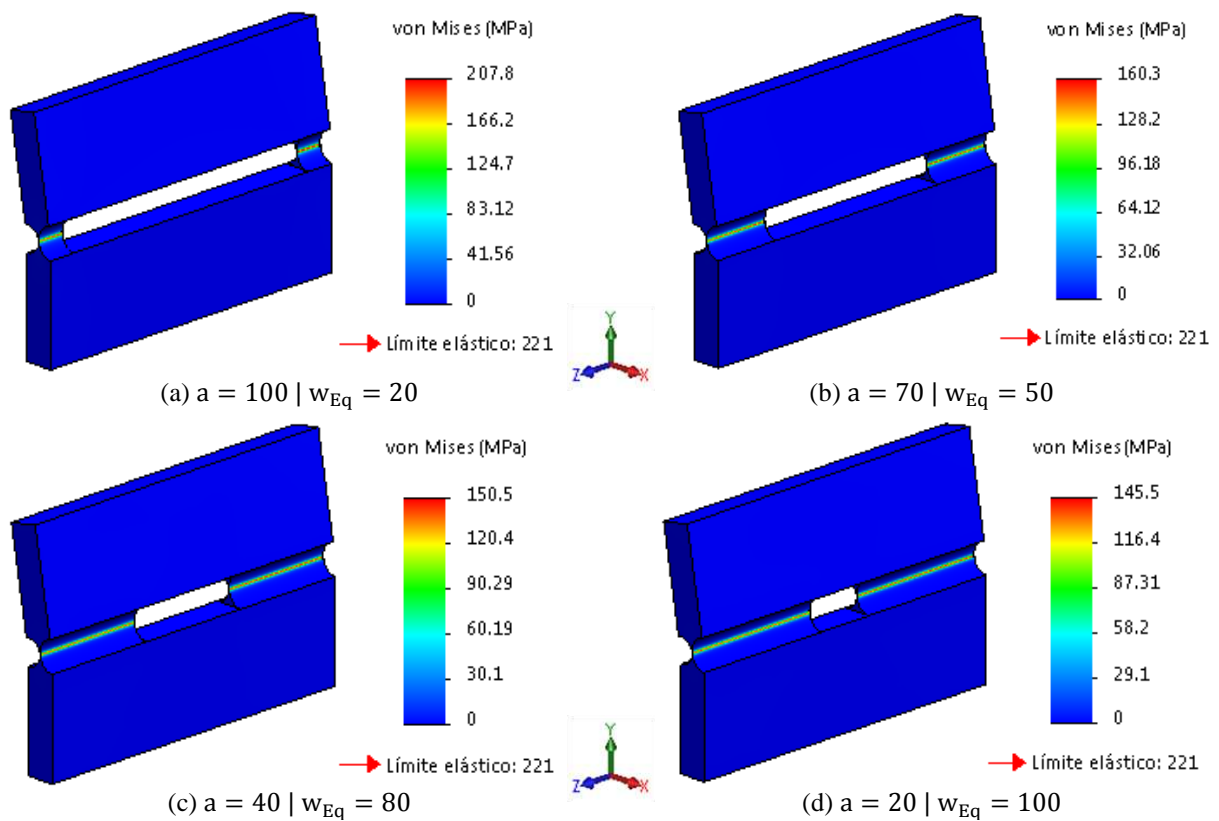


Figura 22: Tensiones de Von Mises para flexores con alivianamiento interior

Hay que destacar, que si bien se adoptó como pieza base para realizar los alivianamientos un flexor de 120mm de ancho total, se pueden generalizar los resultados obtenidos para flexores de diferentes anchos.

Puede observarse que a igual ancho equivalente del flexor, aquellas uniones flexibles que tienen un alivianamiento experimentan tensiones máximas levemente superiores que los flexores que no las poseen.

Respecto a los desplazamientos, en promedio son muy similares, sin embargo al realizar mediciones en los extremos libres del flexor con alivianamiento, por ejemplo, como lo indica la Figura 23, las variaciones para estos casos se tornan más notorias que para un flexor sin alivianamiento, a pesar de esto y para poder realizar una comparación entre ambos casos efectuó un promedio de todos los valores, adoptando el resultado obtenido como el desplazamiento del eje pivote.

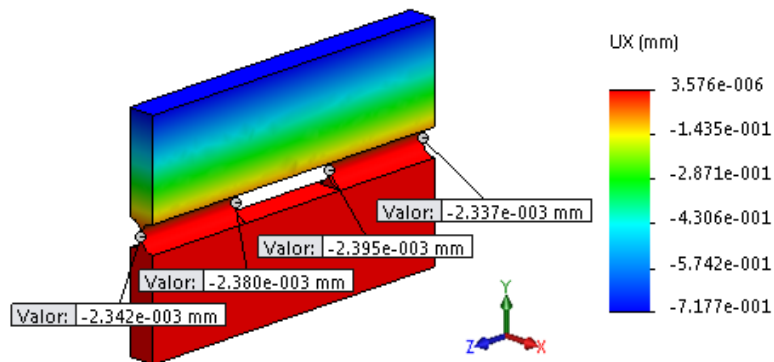


Figura 23: Desplazamiento de eje pivote en x

4.5 Criterios de selección del flexor óptimo

En base a los estudios realizados se pueden enunciar los siguientes criterios de selección:

1. Espesor de entalla: En lo que respecta a la variación del espesor de entalla, los resultados obtenidos de aplicar por un lado, el método de los elementos finitos, y por el otro, las fórmulas analíticas, concuerdan e indican que *la condición óptima se alcanza con el mínimo espesor de entalla impuesto por la capacidad de manufactura*, que en este caso es de 0,1mm. Esto se debe que a medida que se reduce el espesor de entalla, en simultáneo se están reduciendo las tensiones máximas a valores por debajo de la tensión admisible, reduciendo los desplazamientos resultantes e incrementando la flexibilidad a la rotación.

2. Influencia del ancho del flexor y alivianamientos: *El ancho óptimo es aquel en que el flexor no supera las tensiones máximas admisibles, posee el menor desplazamiento resultante y mayor flexibilidad a la rotación.* Esto se da para un valor de 100mm, para flexores de anchos mayores disminuyen las tensiones máximas (lo cual no trae beneficio alguno, ya que las tensiones están dentro del rango admisible para un espesor de 100mm), mientras que los desplazamientos resultantes se mantienen prácticamente constantes entre los 80mm y 130mm de ancho, comienzan a disminuir a partir de espesores superiores, resultando para un ancho de 200mm el 1,7% menores que para un ancho de 100mm. Para flexores de anchos menores a 100mm las tensiones máximas superan a las admisibles.

En base a estos criterios de selección, se determinó el diseño sub óptimo mostrado en la [Figura 24](#) donde se observar un croquis del flexor óptimo con todas las dimensiones deducidas a lo largo del trabajo.

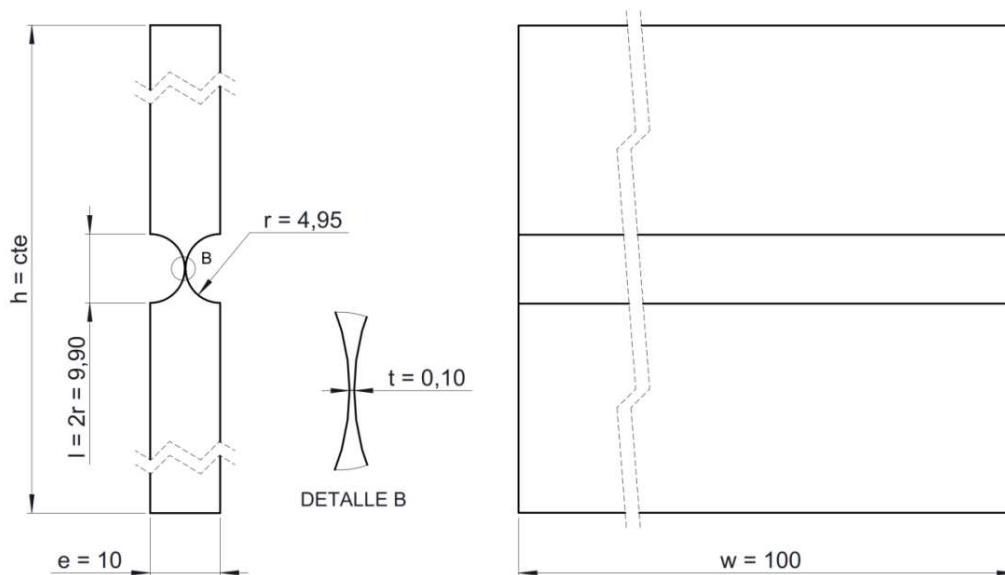


Figura 24 : Croquis unión flexible óptima $t = 0,10$ | $w = 100$

Finalmente, debe destacarse que el empleo de flexores con alivianamientos no es recomendable, ya que como se vio con anterioridad, experimentan tensiones máximas levemente superiores y desplazamientos de naturaleza más imprevista que los flexores que no las poseen, como si estos intentaran rotar en torno a dos ejes pivotes independientes, uno por cada unión flexible, tal como se esquematiza la [Figura 25](#) en escala de deformación ampliada.

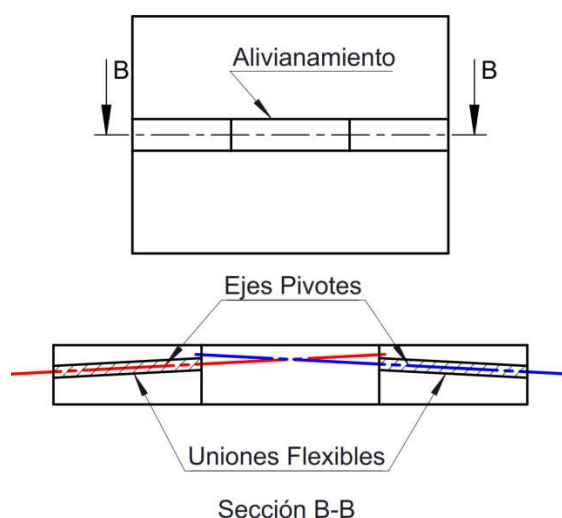


Figura 25 : Desplazamientos en flexores con alivianamiento en su zona media

5 CONCLUSIONES

Mediante ecuaciones analíticas de grandes desplazamientos y simulaciones por elementos finitos se estudiaron los parámetros para diseñar flexores circulares simétricos como componentes de un mecanismo generador de ángulos pequeños para utilizar en un dispositivo metrológico de precisión. Se estudiaron diversos parámetros de diseño y se mostraron ejemplos prácticos en cada caso.

Como principales hallazgos del estudio, que se profundizarán a futuro, se determinó que (i) el espesor óptimo de entalla es el mínimo capaz de ser mecanizado, (ii) la ecuación del cálculo de tensiones en flexión utilizando la hipótesis de Navier es útil para aproximar a las tensiones máximas en el diseño de flexores, (iii) el ancho óptimo es aquel en que el flexor no supera las tensiones máximas admisibles, posee el menor desplazamiento resultante y mayor flexibilidad a la rotación.

Con estos criterios se determinó un flexor óptimo para el caso de diseño satisfaciendo los objetivos y restricciones. El diseño es sub óptimo y se puede optimizar combinando técnicas sin derivadas y técnicas de gradiente.

Como trabajo a futuro, se volverán a hacer las simulaciones aplicando condiciones de simetría adecuadas para eliminar el efecto de los cruces de ejes que pueden deberse a malas consideraciones sobre el mallado, dado que el problema es simétrico. Esto podría redundar en menores tensiones y en un cálculo más exacto del flexor.

Como objetivo a largo plazo, se implementará un sistema de software para el diseño óptimo de flexores que combine ecuaciones analíticas, análisis automático mediante el método de los elementos finitos, técnicas de optimización sin derivadas y técnicas de regresión para hallar las funciones que describan el comportamiento de cada parámetro de diseño del flexor, para desarrollar funciones de evaluación rápida.

Agradecimientos

Se agradece al apoyo financiero de la Universidad Tecnológica Nacional a través de los proyectos PID-UTN 3935 y PID-UTN 2128 (25/E185), de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica PICT-2013-2894 y del CONICET. Se agradece a los revisores por las sugerencias de trabajos a futuro sobre el mallado correcto para este problema.

REFERENCIAS

- Acer, M., y Sabanovic, A. Comparison of Circular Flexure Hinge Compliance Modeling Methods, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Mechatronics*, April 13-15, 2011, Istanbul, Turkey.
- Astrúa, M. y Pisani, M., The new INRiM nanoangle generator, *Metrologia*, **46**: 674–681, 2009.
- Howell, L. L., Magleby, S. P., y Olsen, B. M., *Handbook of Compliant Mechanisms*, Wiley, 2013.
- Howell, L. L. *Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- Lobontiu, N., *Design of Flexure Hinges*, CRC Press, 2002.
- Pucheta, M.A. y Cardona, A., Design of Bistable Compliant Mechanisms using Precision-Position and Rigid-body Replacement Methods, *Mechanism and Machine Theory*, **45**(2):304-326, 2010.
- Yandayan, T., Ozgur, B., Karaboce, N. y Yaman, O. High precision small angle generator for realization of the SI unit of plane angle and calibration of high precision autocollimators, *Meas. Sci. Technol.* **23**: 094006, 2012.
- Yong, Y. K., Lu, T.-F., Handley, D.C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations, *Precision Engineering* **32**:63–70, 2008.