

ANÁLISE COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO EMPREGANDO O MODELO DE DANO DE MAZARS EM UMA SUB-ROTINA UMAT

Lahis S. Assis, Michèle C. R. Farage, Flávia S. Bastos e Pedro Henrique Garcia

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Rua José Lourenço Kelmer, s/n Juiz de Fora, Brasil, faragebr@gmail.com, <http://www.ufjf.br/mac>

Palavras Chave: Concreto, Dano de Mazars, UMAT, Abaqus, Sub-rotina.

Resumo. O concreto é atualmente um dos materiais mais amplamente empregados na indústria da construção civil, sobretudo no Brasil. Esta larga utilização pode ser justificada principalmente pela simplicidade de seus materiais constituintes – água, areia e cimento – e pela facilidade do processo de produção do material, que é amplamente difundido e dominado em todo o mundo. Em contrapartida, a previsão do comportamento deste material é bastante complicada, uma vez que, quando exposto a condições ambientais extremas – como elevadas temperaturas ou deslocamentos – o concreto sofre alterações em sua microestrutura interna, que implicam em modificações de suas propriedades macroscópicas. Buscando desenvolver um modelo capaz de representar o comportamento do concreto, implementou-se uma sub-rotina – chamada UMAT, em referência a *user material* – desenvolvida em FORTRAN, na qual o dano de Mazars é aplicado ao material para descrever a perda de resistência mecânica do mesmo quando submetido à situações extremas, como descrito anteriormente. Este modelo considera que uma estrutura começa a ser danificada quando a deformação positiva sofrida pela mesma supera um determinado valor limite, definido pelo ensaio de tração uniaxial. Ou seja, neste modelo, a degradação ocorre pela microfissuração da estrutura. A partir dessa hipótese, define-se o dano como uma variável escalar – que pode variar de 0 a 1 – e sua influência na deterioração do material como uma redução do módulo de Young do mesmo. As análises foram realizadas a partir do programa comercial de elementos finitos ABAQUS, que permite ao usuário descrever e modificar modelos constitutivos específicos. Os resultados obtidos foram satisfatórios, validando a sub-rotina desenvolvida.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com [Pedroso \(2009\)](#), o concreto é o material construtivo mais utilizado pelo homem. Constituído basicamente por uma mistura de cimento Portland, agregado graúdo e miúdo – geralmente brita e areia, respectivamente – e água, este material apresenta um custo relativamente baixo e uma técnica de execução simples, o que juntamente com suas propriedades características justifica o seu grande emprego nas obras de engenharia.

No entanto, apesar de ser um material simples, a previsão do comportamento de concretos é bastante complexa, principalmente quando o mesmo é submetido a situações extremas – como deslocamentos e elevadas temperaturas. Isso ocorre uma vez que em tais situações o material sofre alterações em sua microestrutura interna que afetam consideravelmente suas propriedades macroscópicas.

Cabe ressaltar que situações extremas podem ocorrer acidentalmente ou serem características do projeto no qual o concreto foi empregado. Em qualquer um dos casos, o conhecimento e a previsão de seus efeitos sobre as propriedades do material são de extrema importância para que se possa realizar um projeto executivo ou corretivo que considere, de fato, o comportamento do concreto.

Nesse contexto, surge o conceito de dano, que segundo [Álvares \(1993\)](#) descreve a evolução do processo de degradação de um material partindo de uma configuração inicial íntegra até um estado no qual podem ser observadas micro e microfissuras. Sobre tal conceito estará baseada toda a análise realizada no presente artigo, que trata da modelagem do comportamento mecânico do concreto considerando o Modelo de Dano de [Mazars \(1984\)](#).

Embora o concreto seja de uso muito difundido e com inúmeras observações experimentais que apontam para o seu comportamento não linear ([Manzoli, 2010](#)), existe uma lacuna para estudos de simulação numérica envolvendo essas leis constitutivas. Visando contribuir com esse cenário, trabalhos anteriores desenvolvidos no Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) buscaram aperfeiçoar a modelagem do concreto realizando análises termo-hídricas ([Ferreiral, 2011](#)) e termomecânica ([Amaral, 2014](#)) empregando o código computacional livre [Cast3m \(2000\)](#). Em vista das limitações encontradas no uso desse código livre e diante das vantagens proporcionadas por um programa comercial de elementos finitos muito utilizado em pesquisa, o [Abaqus \(2011\)](#), decidiu-se por realizar as análises neste ambiente. Dentre as vantagens citam-se a possibilidade de gerar e importar geometrias complexas, usar a extensa biblioteca com diferentes modelos de materiais, tipos de malha, incluindo remalhamento, esquemas de resolução numérica (implícita e explícita), e a sua versatilidade ao incorporar à análise modelos constitutivos não oferecidos pelo software ou modificar, de alguma forma, os modelos já existentes.

No entanto, para isso torna-se necessário o aprendizado da codificação das sub-rotinas definidas pelo usuário. Para a situação específica de modificação do modelo constitutivo de materiais emprega-se a sub-rotina denominada UMAT, como referência à *user material*. Neste caso, optou-se pela implementação de um modelo simples, bem como uma aplicação simples para a sua verificação, com a consciência de que, após o sucesso da etapa de aprendizado, outros modelos mais sofisticados poderão ser incorporados.

2 OBJETIVOS

Este artigo pretende simular o dano de um elemento de concreto, empregando o Modelo de Dano de [Mazars \(1984\)](#) clássico e simplificado em um programa de elementos finitos.

3 A MECÂNICA DO DANO

A teoria do dano considera que a degradação do material está diretamente relacionada à quantificação de sua densidade de defeitos. No que se refere especificamente ao concreto temos modelos mais simples – que consideram o material isotrópico – e mais complexos – que consideram o material anisotrópico.

Mazars (1984) apresentou um modelo bastante simples, no qual a degradação do material é quantificada por uma variável escalar calculada com base nas deformações principais positivas. Mais tarde, Brekelmans (1992) propôs um novo modelo com as mesmas bases definidas anteriormente por Mazars (1984).

A partir desses modelos iniciais de dano escalar foram desenvolvidos vários outros trabalhos buscando aperfeiçoá-los, como por exemplo: Chow (1987), de Vree (1995), Ghrib (1995), Lee (1997), Pituba (1998), Cauvin (1999), Alves et al. (2000), de Borst (2002), Scotta (2002), Pituba (2003) e Junior (2007).

Nos modelos de dano escalar, a variável dano (D) varia de 0 a 1 e pode ser definida a partir da área disponível em um determinado elemento do material, como na Fig. 1.

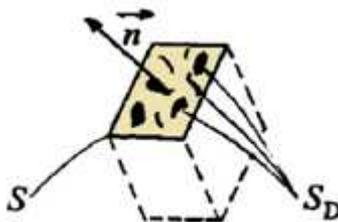


Figura 1: Elemento danificado (Amaral, 2014)

Sendo (S) a área da seção íntegra de um elemento de volume do material e (S_E) a área efetiva que resiste aos esforços, temos que a área danificada (S_D) é definida como:

$$S_D = S - S_E. \quad (1)$$

Por definição, segue que:

$$D = \frac{S_D}{S}. \quad (2)$$

Observando as Eq. (1) e Eq. (2), pode-se dizer que quanto maior o dano ao qual o material está submetido maior a sua área danificada e, dessa forma, menor a sua área efetiva.

A partir da lei de Hooke e da definição apresentada de área específica, pode ser observado na Eq. (3) como o dano afeta a equação constitutiva do material:

$$\sigma = (1 - D)E \cdot \epsilon. \quad (3)$$

A Eq. (3) mostra que um aumento contínuo da variável dano acarreta uma redução também contínua do módulo de Young do material até um momento limite em que o mesmo se rompe.

4 O MODELO DE DANO DE MAZARS

Como já mencionado, neste trabalho será adotado o Modelo de Dano proposto por Mazars (1984). Tal modelo foi escolhido sobretudo por sua simplicidade – uma vez que o dano é associado a uma variável escalar. Além disso, os parâmetros do modelo (A_t , B_t , A_c , B_c e ϵ_{d0})

são determinados facilmente através das curvas tensão-deformação do concreto – à tração e à compressão.

Para que esse modelo seja válido algumas hipóteses precisam ser consideradas:

- as deformações plásticas serão desprezadas, considerando-se assim apenas o regime elástico. Neste modelo, tais deformações serão substituídas por uma perda de rigidez do material através da redução do seu módulo de Young pela variável dano.
- admite-se que o dano é isotrópico. No entanto, considera-se o diferente comportamento do concreto quando submetido à tração e à compressão.
- o dano é representado por uma variável escalar e começa a ocorrer quando um determinado valor limite da deformação equivalente ($\tilde{\epsilon}$) é atingido.

O Modelo de Dano de Mazars (1984) considera que uma estrutura começa a ser danificada quando a deformação equivalente ($\tilde{\epsilon}$) – definida na equação Eq. (4) – sofrida pela mesma atinge um determinado valor limite (ϵ_{d0}), que é considerado um parâmetro do modelo.

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt[2]{(\epsilon_1)_+^2 + (\epsilon_2)_+^2 + (\epsilon_3)_+^2} \quad (4)$$

Em outras palavras, neste modelo a degradação ocorre pela microfissuração da estrutura, causada basicamente por tensões de tração. Apesar de considerar o material isotrópico, o Modelo de Dano de Mazars (1984) considera o distinto comportamento do concreto quando o mesmo é submetido a esforços de tração e de compressão, como mencionado nas hipóteses do modelo. Sendo assim, temos uma variável dano relativa à tração e uma variável dano relativa à compressão, como mostram as Eq. (5) e Eq. (6), respectivamente.

$$D_t = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_t)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]} \quad (5)$$

$$D_c = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_c)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]} \quad (6)$$

Dessa forma, a variável dano é uma combinação linear de uma parcela referente à tração e outra à compressão, como mostra a Eq. (7).

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad \text{sendo} \quad \alpha_t^\beta + \alpha_c^\beta = 1 \quad (7)$$

O parâmetro β é utilizado para melhorar o comportamento ao cisalhamento do modelo e seu valor sugerido pela literatura é 1.06 (Amaral, 2014), para o concreto.

Os valores α_t e α_c são obtidos a partir de Eq. (8) e Eq. (9), respectivamente,

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^n H_i \frac{\epsilon_{(i)}^t [\epsilon_{(i)}^t + \epsilon_{(i)}^c]}{\tilde{\epsilon}^2} \quad (8)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^n H_i \frac{\epsilon_{(i)}^c [\epsilon_{(i)}^c + \epsilon_{(i)}^t]}{\tilde{\epsilon}^2} \quad (9)$$

sendo que $H_i = 1$ se $\epsilon_{(i)} = \epsilon_{(i)}^t + \epsilon_{(i)}^c \geq 0$ e, caso contrário, $H_i = 0$.

O modelo apresentado até aqui trata-se da forma clássica proposta por Mazars (1984). No entanto, o mesmo autor propôs uma variação deste modelo inicial denominado Modelo de Dano Isotrópico de Mazars (1984) Simplificado.

Neste modelo simplificado, adota-se apenas a medida de deformação equivalente do modelo tradicional e, então, calcula-se o dano somente pelo comportamento a tração. Para isso, utiliza-se uma função de dano mais simples que a proposta para o modelo clássico, como mostra a Eq. (10).

$$D = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_t)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{\epsilon_{d0} \cdot A_t}{\tilde{\epsilon} \cdot \exp[B_t(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]} \quad (10)$$

5 METODOLOGIA

5.1 O Abaqus

Abaqus (2011) é um *software* para análise de problemas de engenharia via Método dos Elementos Finitos (MEF), comercializado pela SIMULIA, marca da Dassalt Systemes S.A.. Tal programa pode resolver quase todos os problemas, desde a análise linear simples até simulações mais complexas. Além disso, possui uma extensa biblioteca de elementos finitos que possibilita a modelagem de praticamente qualquer geometria e também uma grande variedade de modelos que permitem simular o comportamento da maioria dos materiais, sendo por isso empregado em diferentes áreas da engenharia.

O Abaqus (2011) oferece também a possibilidade do uso de sub-rotinas, empregadas para modificar modelos constitutivos já oferecidos pela biblioteca ou ainda incluir novos modelos, permitindo assim a análise dos mais diversos e complexos problemas e dando maior liberdade ao usuário.

De forma geral, a análise de problemas no Abaqus (2011) funciona segundo o esquema mostrado na Fig. 2.

No pré-processamento são definidas todas as características do problema, tais como: a geometria a ser considerada, o tipo de material utilizado, as condições de contorno e o carregamento imposto.

Na processamento, são realizados os cálculos necessários para a resolução do modelo. Caso a modelagem envolva a utilização de uma sub-rotina é nessa fase que essa informação será passada ao *software*.

Por último, tem-se o pós-processamento, onde é possível analisar os resultados obtidos a partir das variáveis de saída e dos gráficos de resultado gerados.

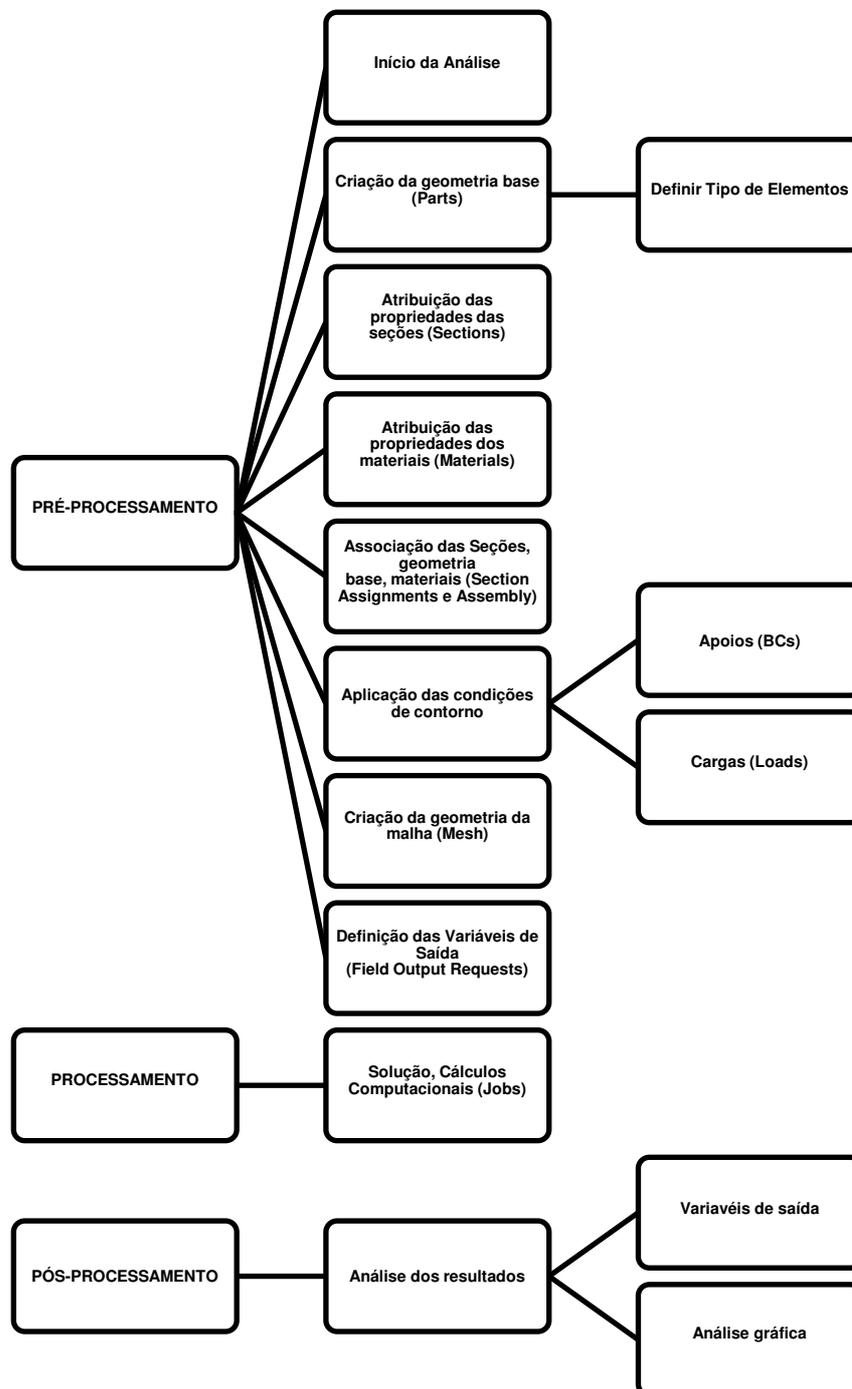


Figura 2: Esquema de funcionamento do [Abaqus](#) (2011)

5.2 A Sub-rotina UMAT

Como já mencionado, o [Abaqus \(2011\)](#) oferece o recurso da utilização das sub-rotinas, que são utilizadas para incorporar à análise modelos constitutivos não oferecidos pelo software ou modificar, de alguma forma, os modelos que ele oferece.

No caso específico deste trabalho, foi utilizada a sub-rotina chamada UMAT, como referência à *User Material*, que remete ao fato da definição de um material com propriedades específicas para ser empregado na análise.

De maneira geral, para utilizar uma sub-rotina no [Abaqus \(2011\)](#) são necessários alguns *softwares* adicionais, com versões compatíveis entre si. Neste trabalho foram utilizados:

- Abaqus 6.11;
- Microsoft Visual Studio 2008;
- Intel Visual Fortran Compiler 10.1.030.

Para que o [Abaqus \(2011\)](#) entenda que uma UMAT será utilizada, alguns procedimentos são necessários. A primeira forma de passar essa informação ao *software* é através da definição do material, escolhendo-se a opção *User Material*, como mostra a Fig. 3.

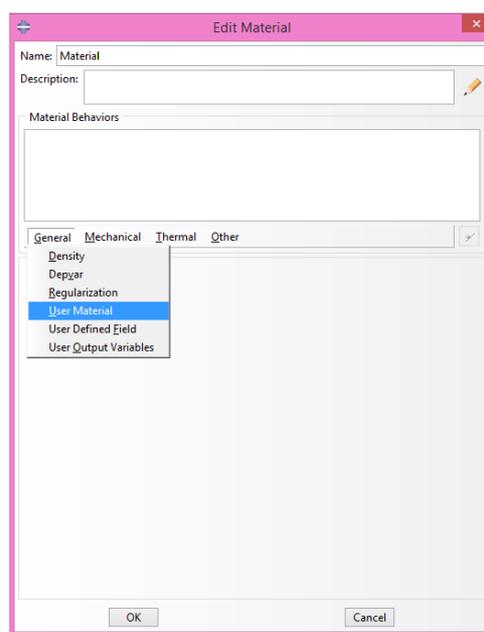


Figura 3: Definição do material

Além disso, outro procedimento importante é informar ao [Abaqus \(2011\)](#) quantas variáveis de estado serão utilizadas, como mostra a 4. Tais variáveis são armazenadas em um vetor chamado *DEPVAR* e são aquelas que serão atualizadas dentro da sub-rotina.

Por último, para dizer ao [Abaqus \(2011\)](#) qual sub-rotina será utilizada basta mostrar, no *JOB*, na opção *User subroutine file*, a UMAT que será empregada como mostra a 5.

A UMAT aqui utilizada tem por objetivo modificar o comportamento elástico do concreto, introduzindo ao mesmo os efeitos o dano. O fluxograma da sub-rotina empregada no presente trabalho pode ser vista na 6.

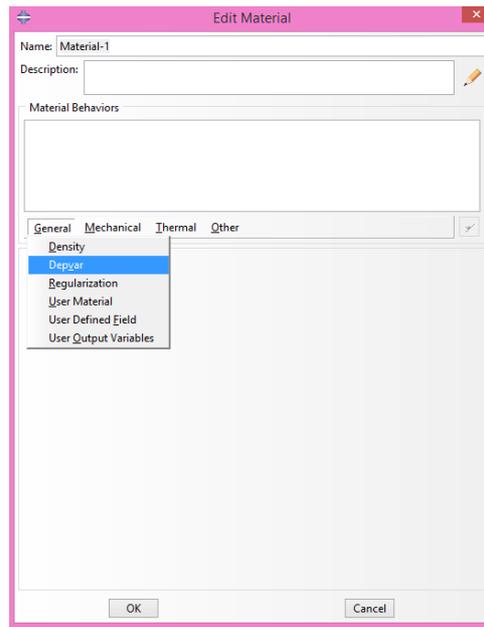


Figura 4: Definição do número de variáveis de estado

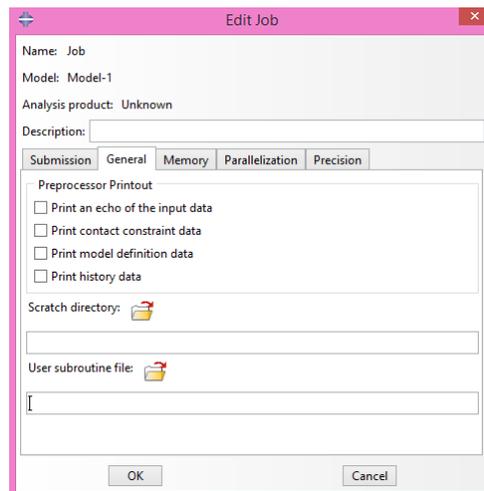


Figura 5: Definição da sub-rotina



Figura 6: Fluxograma da sub-rotina

Inicialmente são definidas as propriedades do material a ser considerado. Em geral, essa definição é feita no próprio *Abaqus* (2011), como mostra a Fig. 3. Sendo assim, a sub-rotina extrai essas informações do *software* para utilizá-las nos cálculos.

Após as informações do material, prossegue-se para a definição da matriz constitutiva do modelo que, no nosso caso, é a própria matriz elástica, já que uma das considerações do modelo é considerar apenas o regime elástico.

Em seguida, são definidos os parâmetros a serem utilizados no modelo, quais sejam A_t , B_t ,

A_c , B_c e ϵ_{d0} para o modelo tradicional e A_t , B_t e ϵ_{d0} para o modelo simplificado.

Passa-se então para o cálculo da deformação equivalente, mostrada na Eq. (4), pois é ela que irá definir o início da ocorrência do dano. Caso o dano tenha iniciado, prossegue-se ao seu cálculo de acordo com o modelo de dano considerado e, em seguida, à atualização do módulo de Young para, então, passar para o próximo incremento.

6 APLICAÇÕES

Embora o modelo de dano de Mazars (1984) não seja inédito, este trabalho trata de uma implementação nova realizada num programa comercial de elementos finitos, e para tanto, foi selecionado um exemplo de aplicação simples (tração uniaxial) para a sua verificação. Futuramente serão testados exemplos mais elaborados em que os campos de tensão e deformação sejam não homogêneos.

Neste contexto, a configuração geométrica analisada neste trabalho – assim como os parâmetros do modelo – foi a mesma proposta por Penna (2011). Foram analisados o caso em que se considera o Modelo de Dano de Mazars (1984), o Modelo de Dano Isotrópico de Mazars (1984) Simplificado e, por último, uma situação em que não se considera o efeito do dano.

A geometria considerada, que é uma chapa em estado plano de tensão, pode ser vista na Fig. 7.

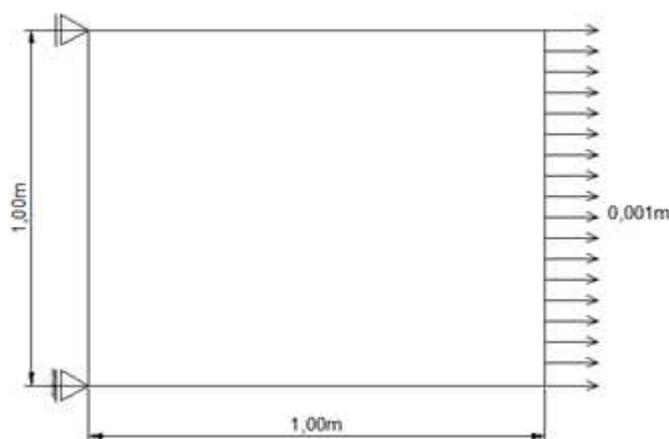


Figura 7: Geometria analisada

Em relação às condições de contorno, na borda esquerda o deslocamento na vertical e na horizontal foi restringido. Já na borda direita foi aplicado um deslocamento de 0.001m, que corresponde ao máximo deslocamento avaliado por (Penna, 2011). As condições de contorno podem ser vistas na Fig. 8.

A geometria proposta foi discretizada em 32 elementos triangulares planos de 3 nós, como mostra a Fig. 9.

Como parâmetros do material foram adotados módulo de Young de 20000MPa e coeficiente de Poisson de 0.2.

6.1 Modelo de Dano de Mazars

Para as análises considerando o Modelo de Dano de Mazars (1984) adotou-se os parâmetros mostrados na Tabela 1.

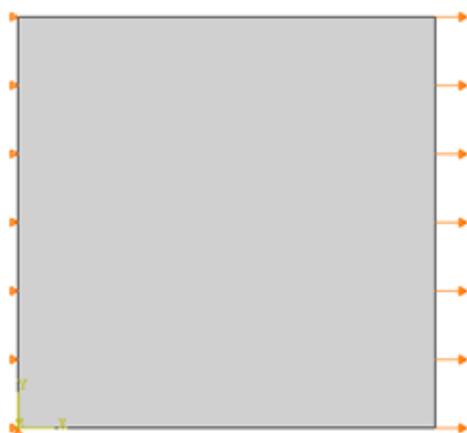


Figura 8: Condições de contorno

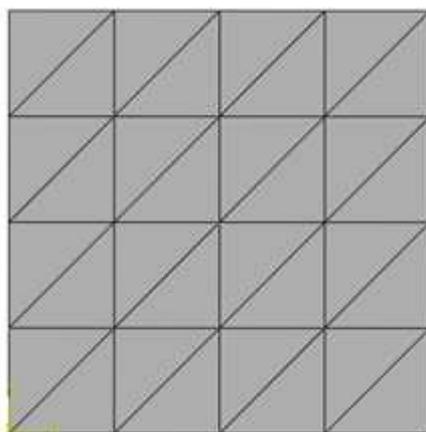


Figura 9: Discretização proposta

Parâmetro	Valor adotado
A_t	0.95
B_t	10000.00
A_c	1.00
B_c	3000.00
ϵ_{d0}	0.0001

Tabela 1: Parâmetros do Modelo de Dano de Mazars.

Primeiramente analisou-se a relação entre o fator de carga – que é definido como uma relação entre a carga gerada pelo deslocamento imposto e uma determinada carga de referência – e o deslocamento horizontal da extremidade. Espera-se que essa relação seja linear até o momento em que o material começa a sofrer dano. Os resultados encontrados por Penna (2011) e os resultados obtidos neste trabalho podem ser vistos na Fig. 10.

Outros parâmetros a serem avaliados foram a relação entre o dano e a deformação e entre a integridade e a deformação. Espera-se que com o aumento do dano – ou com a diminuição da integridade – as deformações aumentem de forma cada vez mais rápida. Os resultados encontrados por Penna (2011) e os resultados obtidos neste trabalho podem ser vistos ser vistos

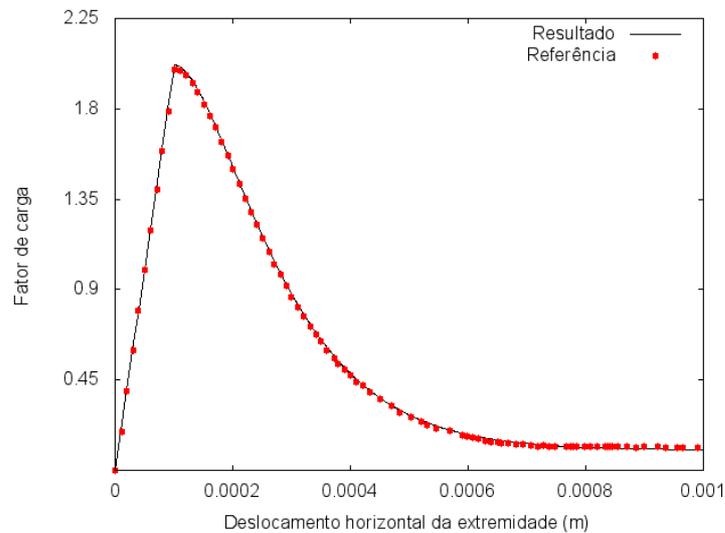


Figura 10: Curvas Fator de Carga X Deslocamento

na Fig. 11. Cabe ressaltar que a integridade pode ser definida como o inverso do dano, isto é, dizer que uma estrutura está danificada equivale a afirmar que ela não se encontra íntegra.

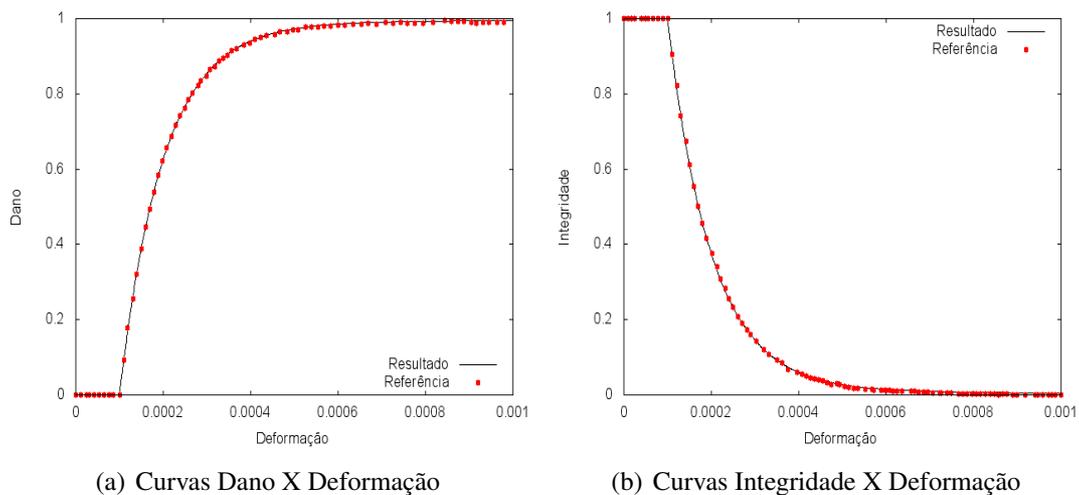


Figura 11: Dano, integridade e deformação

Além desses parâmetros verificou-se também a relação linear entre o dano e a área efetiva - hipótese expressa pela Eq. 2 - de modo a comprovar que os mesmos se relacionam indiretamente uma vez que com a degradação do material surgem microfissuras que tornam a área efetiva menor, como mostra a Fig. 12.

Avaliou-se, por último, a relação entre o módulo de Young e a variável dano, para mostrar que estes se relacionam indiretamente, isto é, o aumento do dano implica em uma redução da rigidez do material. Essa relação pode ser vista na Fig. 13.

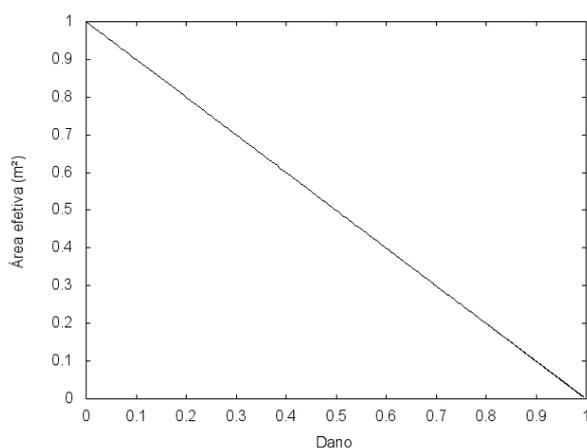


Figura 12: Curva Área Efetiva X Dano

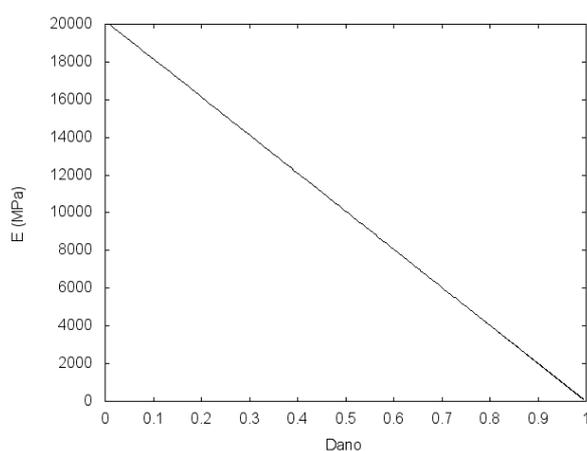


Figura 13: Curva Módulo de Young X Dano

6.2 Modelo de Dano Isotrópico de Mazars Simplificado

Para as análises considerando o Modelo de Dano Isotrópico de [Mazars \(1984\)](#) Simplificado adotou-se os parâmetros mostrados na Tabela 2.

Parâmetro	Valor adotado
A	0.999
B	1789.00
ϵ_{d0}	0.0001

Tabela 2: Parâmetros do Modelo de Dano Isotrópico de Mazars Simplificado.

Como no caso anterior, analisou-se inicialmente a relação entre o fator de carga e o deslocamento horizontal da extremidade. Os resultados encontrados por [Penna \(2011\)](#) bem como os obtidos nesse trabalho são mostrados na Fig. 14.

Comparando o resultado obtido para o modelo tradicional, mostrado na Fig. 10, ao encontrado aqui, para o modelo simplificado, pode-se perceber que neste último o ramo descendente é mais acentuado, caracterizando a função de dano empregada.

Ainda como na aplicação anterior avaliou-se também a relação entre o dano e a deformação

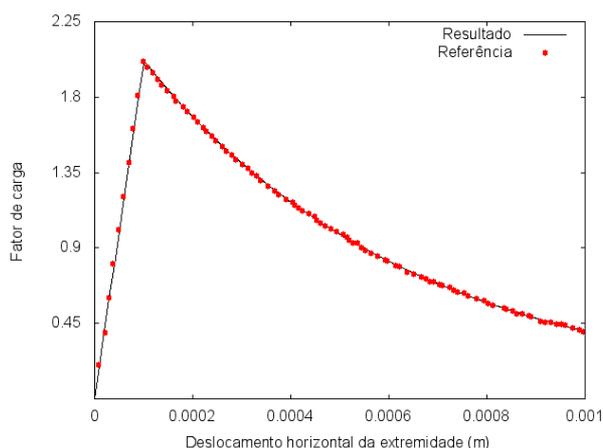


Figura 14: Curvas Fator de Carga X Deslocamento

e entre a integridade e a deformação, como mostra a Fig. 15.

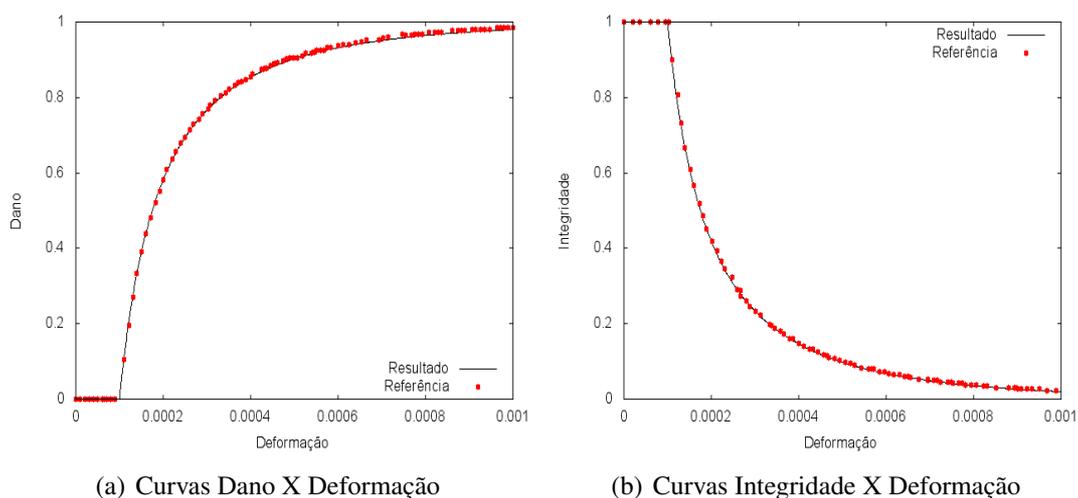


Figura 15: Dano, integridade e deformação

Comparando o resultado obtido para o modelo tradicional, mostrado na Fig. 11, ao encontrado aqui, para o modelo simplificado, percebe-se que para este último o dano evolui de maneira mais lenta, caracterizando a função de dano empregada.

6.3 Análise sem o efeito do dano

Realizou-se ainda, para a mesma geometria, mesmas condições de contorno e mesmas propriedades de material, uma análise sem levar em conta os efeitos do dano.

Como forma de comparar os efeitos do dano sobre o comportamento do material, nas diversas situações, a Fig. 16 mostra a relação entre a tensão e a deformação para os três casos.

Como, no modelo simplificado, o dano evolui de forma mais lenta, para um determinado valor de deformação, a partir do início do dano, temos um nível de tensão superior ao obtido no modelo tradicional, para a mesma deformação. Isso é coerente uma vez que, como o dano evolui mais lentamente no modelo simplificado, o módulo de Young diminui também de forma mais lenta e, dessa forma, obedecendo a Lei de Hooke descrita na Eq. (3), temos um nível de tensão maior.

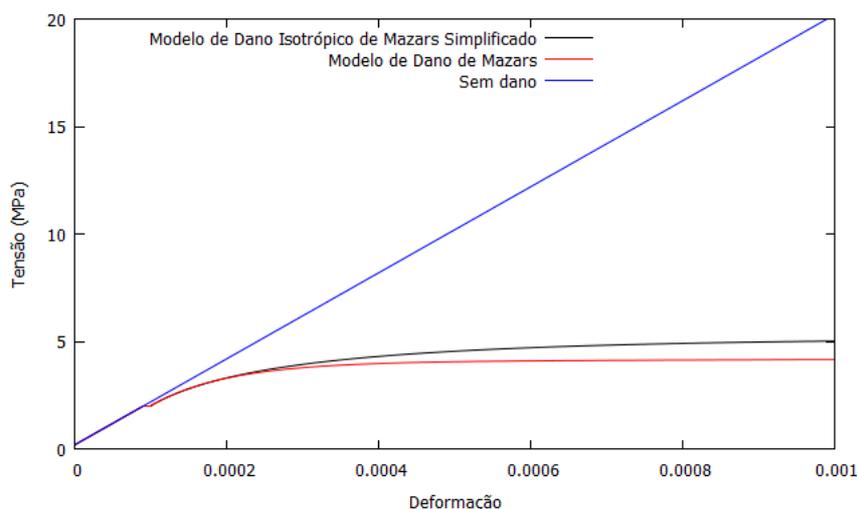


Figura 16: Curvas Tensão X Deformação

Da mesma forma, quando não se leva em conta o efeito do dano sobre o módulo de Young do material, para um mesmo nível de deformação as tensões obtidas são bem maiores, obedecendo a Lei de Hooke descrita na Eq. (3). Pode-se perceber ainda o aspecto linear da curva quando não se considera o dano.

As análises aqui realizadas denotam a validade do modelo implementado, encorajando aplicações com maior grau de complexidade, tanto no que se refere à geometria, quanto às condições de carregamento e contorno.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi simulado o Dano de Mazars (1984), em sua forma tradicional e simplificada, em um programa de elementos finitos, Abaqus (2011), através da implementação de uma sub-rotina de material definida pelo usuário. Os resultados para uma aplicação simples – ensaio de tração uniaxial – foram comparados satisfatoriamente com os encontrados em uma determinada referência da literatura (Penna, 2011). O comportamento do material observado com o exemplo, com a não linearidade da relação constitutiva afetada pelo dano, demonstram que se alcançou o sucesso na implementação realizada.

A partir desta aplicação de caráter preliminar, pretende-se estender o modelo implementado para que ele considere, além dos efeitos mecânicos, os efeitos térmicos, simulando a exposição de estruturas de concreto a situações de incêndio e a temperaturas elevadas de longa duração, que representam, por exemplo, elementos de usinas nucleares ou repositórios de rejeitos radioativos. Dessa forma, será possível comparar os resultados obtidos com outras informações disponíveis na literatura para fins de validação do modelo.

8 AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Juiz de Fora e à FAPEMIG, à CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Abaqus. Abaqus documentation. <https://www.sharcnet.ca/Software/Abaqus/6.11.2>, 2011.

- Álvares M. *Um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos*. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1993.
- Alves M., Yu J., e Jones N. On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, 76:703–712, 2000.
- Amaral R.O. *Análise computacional termo-mecânica de estruturas de concreto sujeitas a temperaturas elevadas*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.
- Brekelmans M. S.G.d.V.P. Continuum damage mechanics for softening of brittle materials. *Acta Mechanica*, 93:133–143, 1992.
- Cast3m. Cast3m documentation. <http://www-cast3m.cea.fr>, 2000.
- Cauvin A. T.B. Damage mechanics: basic variables in continuum theory. *International Journal of Solids and Structures*, 36:747–761, 1999.
- Chow L. W.J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 27 (5):547–558, 1987.
- de Borst R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:95–112, 2002.
- de Vree H. B.M.v.G.J. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, 55 (4):581–588, 1995.
- Ferreiral A.P.G. *Modelagem dos fenômenos de transporte termo-hídricos em meios porosos submetidos a temperaturas elevadas: aplicação a uma bicamada rocha-concreto*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.
- Ghrib F. T.R. Nonlinear behavior of concrete dams using damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, 121 (4):513–527, 1995.
- Junior S. V.S. Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, 38:538–546, 2007.
- Lee U. L.A.F.L. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *International Journal of Solids Structures*, 34:4377–4397, 1997.
- Manzoli O. R.E.C.G.M.C. Simulação do comportamento não linear de materiais quase-frágeis via elementos finitos com fissura embebida. *Mecánica Computacional*, 29:5341–5356, 2010.
- Mazars J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese de Doutorado, Université Pierre et Marie Curie, France, 1984.
- Pedroso F. Concreto: as origens e a evolução do material construtivo mais usado pelo homem. *Concreto e Construções*, 53:14–19, 2009.
- Penna S.S. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, 2011.
- Pituba C. *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo*. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, 1998.
- Pituba C. *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Brasil, 2003.
- Scotta R. V.R.S.A.O.E.H.A. A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. *Computers & Structures*, 79:737–755, 2002.