

UNA NUEVA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VIBRACIONES EN SISTEMAS FLUIDO-ESTRUCTURA

Ricardo L. A. Márquez Turiello^{a,b}, Enzo Dari^{a,b,c} y Claudio Padra^{a,b,c}

^a*Departamento Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Bariloche, Río Negro (8400), Argentina, <http://mecom.cab.cnea.gov.ar/>*

^b*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Bariloche, Río Negro (8400), Argentina, <http://www.ib.edu.ar/>*

^c*CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar/>*

Palabras Clave: Vibraciones, Interacción fluido-estructura, Elementos MINI, Fluidos compresibles e incompresibles.

Resumen. En este trabajo se presenta una nueva formulación de elementos finitos para el estudio de vibraciones de tubos rígidos montados elásticamente sumergidos en un fluido contenido en una cavidad rígida. Este problema es de gran interés ya que tiene aplicaciones relevantes en la industria nuclear. Se propone una formulación variacional del problema de autovalores válida para fluidos compresibles e incompresibles. En la misma se emplean presiones y velocidades como variables primarias. Luego, la presión en el fluido se aproxima utilizando elementos triangulares lineales, mientras que para las velocidades se emplean los denominados elementos MINI. La interacción entre los sólidos y el fluido se introduce utilizando multiplicadores de Lagrange. Para la validación del código se utilizan resultados de un problema con solución analítica. La robustez del método se evalúa haciendo tender la velocidad de propagación del sonido c en el fluido a infinito, lo que, además, permite verificar que el modelo utilizado contempla fluidos compresibles e incompresibles.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo preciso de los modos normales de vibración de estructuras sólidas interactuando con fluidos utilizando elementos finitos es muy importante en muchas aplicaciones de la ingeniería, como el diseño de intercambiadores de calor, condensadores y otros dispositivos. Este tipo de problemas ha sido objeto de estudio durante largo tiempo y se han desarrollado diversos métodos para su planteo y resolución.

En este trabajo se estudió el problema de vibraciones libres de tubos rígidos montados elásticamente sumergidos en un fluido contenido en una cavidad rígida. Este problema fue analizado extensamente en Conca et al. (1995). Allí se analizan distintos modelos del problema, como ser los modelos de Laplace, Helmholtz y Stokes, y diferentes formas de resolución, como el método de la masa agregada y el método del operador unitario.

Aquí presentaremos una nueva formulación mediante elementos finitos para el estudio de este problema, válida para fluidos levemente compresibles e incompresibles, con y sin viscosidad. En dicha formulación se emplean las presiones y las velocidades del fluido como variables primarias del fluido, y los desplazamientos y velocidades en los tubos inmersos. La presión en el fluido se aproxima utilizando elementos triangulares lineales, mientras que para las velocidades se emplean los denominados elementos MINI. La interacción entre los sólidos y el fluido se introduce utilizando multiplicadores de Lagrange.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan las ecuaciones de movimiento del sistema y se formula el problema espectral. En la sección 3 se presenta la formulación variacional del problema y se realiza la discretización por elementos finitos. En la sección 4 se muestran ejemplos numéricos con el fin de validar el método propuesto, y analizar la robustez del mismo para el caso de fluido compresible. También se realiza el análisis de un problema de interés práctico con parámetros físicos realistas y se comparan los resultados obtenidos con los de otro autor que utiliza una metodología de resolución diferente.

2. EL PROBLEMA ESPECTRAL

Consideremos K tubos rígidos montados elásticamente, de forma que se puedan mover transversalmente, sumergidos en un fluido contenido en una cavidad rígida. Los tubos pueden ser de sección transversal circular o poligonal. El problema consiste en determinar los modos de vibraciones libres de este sistema acoplado.

Bajo ciertas consideraciones (ver Conca et al., 1995), este problema puede ser planteado en 2D, donde la sección transversal de la cavidad constituye el dominio. Solo se permiten movimientos rígidos de los tubos. El j -ésimo tubo es modelado como un oscilador armónico con rigidez k_j y masa m_j .

Denotamos con Ω al dominio cerrado en 2 dimensiones ocupado por el fluido, Γ_0 a la frontera exterior, y Γ_j a la interfaz entre el tubo j y el fluido (ver figura 1). Asumimos que Ω es un dominio de Lipschitz con su frontera suave por partes. Finalmente, \mathbf{n} es el vector unitario saliente de la frontera de Ω .

Asumimos que el fluido es un fluido viscoso levemente compresible de densidad ρ_0 , velocidad de propagación del sonido c , y que su movimiento está gobernado por el sistema no estacionario:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{V}, P) = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

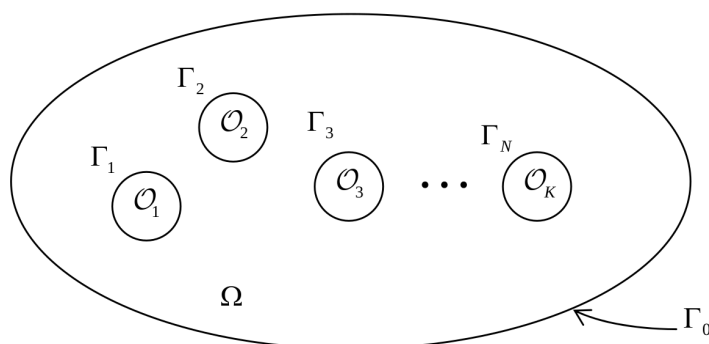


Figura 1: Sección transversal del sistema fluido-estructura.

donde σ es el tensor de tensiones que obedece a la *ley de Stokes modificada* en 2 dimensiones:

$$\sigma(\mathbf{V}, P) = 2\mu \left(\nabla^s \mathbf{V} - \frac{1}{2}(\text{div } \mathbf{V})\mathbb{I} \right) - P\mathbb{I}. \quad (2)$$

En la última expresión, \mathbb{I} es el tensor identidad de segundo orden, la constante $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido, y $\nabla^s \mathbf{V}$ es el tensor simétrico de deformación definido como:

$$\nabla^s \mathbf{V} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}). \quad (3)$$

Por otra parte, los tubos satisfacen la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{R}_j}{dt^2} + k_j \mathbf{R}_j = - \int_{\Gamma_j} \sigma(\mathbf{V}, P) \mathbf{n} d\Gamma, \quad (4)$$

donde \mathbf{R}_j es el *vector de desplazamiento transversal* en el instante t del j -ésimo tubo ($j = 1, \dots, K$). Por último, imponemos la *condición de no-deslizamiento* sobre las fronteras Γ_0 y Γ_j :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= 0 && \text{en } \Gamma_0 \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{S}_j && \text{en } \Gamma_j \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde \mathbf{S}_j es la *velocidad* del j -ésimo tubo en el instante t :

$$\mathbf{S}_j = \frac{d\mathbf{R}_j}{dt}. \quad (6)$$

Así, el problema acoplado está gobernado por las siguientes ecuaciones transitorias:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \text{div } \sigma(\mathbf{V}, P) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \text{div } \mathbf{V} & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \frac{d\mathbf{R}_j}{dt} = \mathbf{S}_j & \text{en } \mathbb{R}_{\geq 0}, j = 1, \dots, K, \\ m_j \frac{d\mathbf{S}_j}{dt} = -k_j \mathbf{R}_j - \int_{\Gamma_j} \sigma(\mathbf{V}, P) \mathbf{n} d\Gamma, & \text{en } \mathbb{R}_{\geq 0}, j = 1, \dots, K, \\ \mathbf{V} = 0 & \text{en } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \mathbf{V} = \mathbf{S}_j & \text{en } \Gamma_j \times \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Asumimos que los modos de vibración amortiguados del sistema son funciones complejas de la forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{-\lambda t}, \quad P(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{-\lambda t}, \quad \mathbf{R}_j(t) = \mathbf{r}_j e^{-\lambda t}, \quad \mathbf{S}_j(t) = \mathbf{s}_j e^{-\lambda t},$$

donde λ es la frecuencia de vibración, \mathbf{v} es la amplitud de la velocidad del fluido, p es la amplitud de la presión, y $\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j$ son los vectores de desplazamiento y de velocidad del j -ésimo tubo. Estas funciones pueden ser halladas resolviendo el siguiente problema de autovalores:

Hallar $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$, $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_j) \in \mathbb{C}^{2K}$, y $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_j) \in \mathbb{C}^{2K}$, $(\mathbf{v}, p, \mathbf{r}, \mathbf{s}) \neq 0$, tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}, p) = \lambda \rho_0 \mathbf{v} & \text{en } \Omega, \\ \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = \lambda p & \text{en } \Omega, \\ -\mathbf{s}_j = \lambda \mathbf{r}_j & j = 1, \dots, K, \\ k_j \mathbf{r}_j + \int_{\Gamma_j} \sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} d\Gamma = \lambda m_j \mathbf{s}_j, & j = 1, \dots, K, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{en } \Gamma_0, \\ \mathbf{v} = \mathbf{s}_j & \text{en } \Gamma_j. \end{array} \right. \quad (8)$$

Para cada modo de vibración amortiguado $\omega = \operatorname{Im}(\lambda)$ es la *frecuencia angular de vibración*, y $\tau = \operatorname{Re}(\lambda)$ es la *constante de amortiguamiento*, la cual es positiva. Este problema fue estudiado en [Conca et al. \(1995\)](#), donde se obtuvo una caracterización espectral y se propuso un método de operador unitario para su resolución numérica ([Grégoire et al., 1976](#)). Ya que nuestro objetivo es resolver el problema en forma directa mediante el método de los elementos finitos, nuestro próximo paso será obtener una conveniente formulación variacional.

3. FORMULACIÓN VARIACIONAL

A continuación presentamos los espacios de funciones apropiados para obtener la formulación variacional del problema. Sean los espacios:

$$\mathcal{P} = L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K},$$

$$\mathcal{X} = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times \mathbb{C}^{2K},$$

y el subespacio cerrado de \mathcal{X} :

$$\mathcal{V} = \left\{ (\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in \mathcal{X} : \mathbf{v}|_{\Gamma_j} = \mathbf{s}_j \right\},$$

correspondiente a las velocidades admisibles del fluido y del sólido acoplado.

Los espacios \mathcal{P} y \mathcal{V} están equipados con sus normas producto, definidas como:

$$\|(p, \mathbf{r})\|_{\mathcal{P}} = \left(\|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^K k_j \|\mathbf{r}_j\|^2 \right)^{1/2},$$

y

$$\|(\mathbf{v}, \mathbf{s})\|_{\mathcal{V}} = \left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^K m_j \|\mathbf{s}_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Para obtener la formulación variacional del problema multiplicamos la primer ecuación de (8) por una función test $(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}_j) \in \mathcal{V}$, integramos por partes, y empleamos la cuarta ecuación de (8):

$$a((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) + b((\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}), (p, \mathbf{r})) = \lambda \left(\rho_0 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^K m_j \mathbf{s}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_j \right) \quad \forall (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}) \in \mathcal{V}, \quad (9)$$

donde

$$a((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) = 2\mu \int_{\Omega} \left(\nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla^s \mathbf{w} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} \right) d\mathbf{x},$$

y

$$b((\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}), (p, \mathbf{r})) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^K k_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_j.$$

Ahora, completamos la formulación variacional del sistema (8). La segunda y tercera ecuación de (8) pueden ser escritas como:

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda \frac{1}{\rho_0 c^2} \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (10)$$

y

$$- \sum_{j=1}^K k_j \mathbf{s}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j = \lambda \sum_{j=1}^K k_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j \quad \forall \hat{\mathbf{r}}_j \in \mathbb{C}^{2K}. \quad (11)$$

La ecuación (9) junto con la suma de las ecuaciones (10) y (11) dan lugar a la siguiente formulación variacional de problema (8):

Hallar $\omega \in \mathbb{C}$ y $((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (p, \mathbf{r})) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$, $((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (p, \mathbf{r})) \neq 0$, tal que:

$$\begin{cases} a((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) + b((\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}), (p, \mathbf{r})) = \lambda c_1((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) & \forall (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}) \in \mathcal{V}, \\ -b((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (q, \hat{\mathbf{r}})) = \lambda c_2((p, \mathbf{r}), (q, \hat{\mathbf{r}})) & \forall (q, \hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{P}, \end{cases} \quad (12)$$

donde

$$c_1((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) = \rho_0 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^K m_j \mathbf{s}_j \cdot \hat{\mathbf{s}}_j,$$

y

$$c_2((p, \mathbf{r}), (q, \hat{\mathbf{r}})) = \frac{1}{\rho_0 c^2} \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^K k_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j.$$

Definamos ahora el siguiente producto interno sobre $\mathcal{V} \times \mathcal{P}$:

$$\langle ((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (p, \mathbf{r})), ((\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}), (q, \hat{\mathbf{r}})) \rangle = c_1((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}})) + c_2((p, \mathbf{r}), (q, \hat{\mathbf{r}})).$$

La formulación variacional (12) es un problema de autovalores mixto que satisface la condición de Brezzi, asegurando el buen planteamiento del problema. Para probar esto introducimos el subespacio:

$$\mathcal{W} = \{(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}) \in \mathcal{V} : b((\mathbf{w}, \hat{\mathbf{s}}), (p, \mathbf{r})) = 0 \quad \forall (p, \mathbf{r}) \in \mathcal{P}\} = \{(\mathbf{w}, 0) \in \mathcal{V} : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ y } \mathbf{w}|_{\Gamma_j} = 0\}.$$

La condición de Brezzi para el problema original asociado a (12) debe ser:

- a es coerciva en \mathcal{W}
- b satisface la condición inf-sup:

$$\inf_{(p, \mathbf{r}) \in \mathcal{P}} \left[\sup_{\substack{(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in \mathcal{V} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{s}) \neq 0}} \frac{b((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (p, \mathbf{r}))}{\|(\mathbf{v}, \mathbf{s})\|_{\mathcal{V}} \| (p, \mathbf{r}) \|_{\mathcal{P}}} \right] \geq \beta \quad (13)$$

Probamos (13) en el siguiente lema.

Lema 1. *Existe una constante β estrictamente positiva tal que:*

$$\sup_{\substack{(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in \mathcal{V} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{s}) \neq 0}} \frac{b((\mathbf{v}, \mathbf{s}), (p, \mathbf{r}))}{\|(\mathbf{v}, \mathbf{s})\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \| (p, \mathbf{r}) \|_{\mathcal{P}} \quad \forall (p, \mathbf{r}) \in \mathcal{P}.$$

Demostración. Es suficiente mostrar que, para todo $(p, \mathbf{r}) \in \mathcal{P}$ existe $(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \in \mathcal{V}$ que satisfice:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = p \quad \text{en } \Omega; \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_j} = \mathbf{r}_j \quad \forall j = 1, \dots, K; \quad \text{y} \quad \|(\mathbf{v}, \mathbf{s})\|_{\mathcal{V}} \leq C \| (p, \mathbf{r}) \|_{\mathcal{P}}. \quad (14)$$

La existencia de la solución de (14) está asegurada debido a la siguiente condición de compatibilidad verificada en Arnold et al. (1988):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^K \mathbf{r}_j \int_{\Gamma_j} \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 = \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x}.$$

□

Como una simple consecuencia del Lema tenemos que $\lambda = 0$ no es un autovalor de (12).

3.1. Caso Incompresible

Lo que haremos a continuación es obtener el modelo del problema con fluido incompresible a partir del modelo con fluido levemente compresible descrito por (12). Como c aparece sólo en una de las formas bilineales de (12), si tomamos el límite para $c \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$c_2((p, \mathbf{r}), (q, \hat{\mathbf{r}})) = \sum_{j=1}^K k_j \mathbf{r}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_j.$$

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

A continuación presentaremos algunos ejemplos numéricos que nos permitirán evaluar y validar el método de resolución desarrollado. En primer lugar analizaremos un problema que tiene solución analítica para así comparar con los resultados de las autofrecuencias obtenidas con nuestro método de elementos finitos. Luego, estudiaremos un problema de interés práctico para la industria nuclear, las vibraciones de un arreglo de 28 tubos cilíndricos dentro de una cavidad cilíndrica y los compararemos con los resultados obtenidos por Piracés (2011).

La implementación del código computacional se realizó en lenguaje OCTAVE y todos los cálculos se realizaron en forma secuencial utilizando un procesador Intel Core i7-3770.

4.1. Dos tubos cilíndricos concéntricos

En primer lugar consideramos un ejemplo con solución analítica, utilizado para validar el código de cálculo. Más adelante aprovechamos también este ejemplo para verificar la robustez del método en el caso con fluido incompresible, al hacer tender $c \rightarrow \infty$. Se trata de dos tubos circulares concéntricos de radios r_i y r_e , tal como se muestra en la figura 2. Es importante resaltar que este problema posee solución analítica cuando el fluido contenido es invíscido, por lo que para todos los cálculos realizados se tomará un valor de viscosidad muy pequeño, $\mu = 10^{-9} Pa \cdot s$.

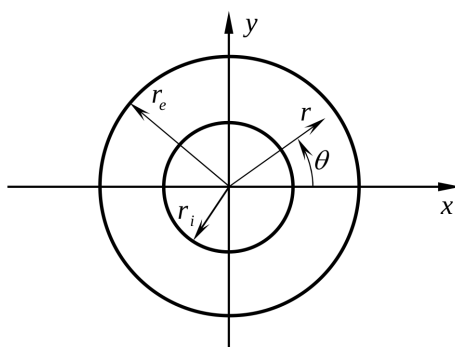


Figura 2: Tubos circulares concéntricos.

Solución analítica Para mostrar como se halla la solución se requiere un extenso análisis matemático, el cual por razones de simplicidad no se mostrará aquí. Sin embargo, se puede recurrir al trabajo de Piracés (2011) para ver el análisis completo. Aquí nos limitaremos a mostrar las conclusiones del análisis y a escribir las condiciones sobre λ para que sea solución del problema.

En el análisis se puede ver que, debido a que el fluido es invíscido, no existe amortiguamiento en los modos de vibración y por lo tanto las autofrecuencias del problema son números imaginarios puros $\lambda = i\omega$. Luego se obtiene que ω sólo puede tomar valores tales que se anulen las

siguientes funciones trascendentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0(\omega) := J'_0\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) Y'_0\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) - Y'_0\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) J'_0\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) = 0 \quad n = 0, \\ D_1(\omega) := J'_1\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) \left[Y'_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k-m\omega^2} r_i \pi Y_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) \right] - \\ \quad - Y'_1\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) \left[J'_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) + \frac{\rho_0 \omega^2}{k-m\omega^2} r_i \pi J_1\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) \right] = 0 \quad n = 1, \\ D_n(\omega) := J'_n\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) Y'_n\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) - Y'_n\left(r_e \frac{\omega}{c}\right) J'_n\left(r_i \frac{\omega}{c}\right) = 0 \quad n \geq 2, \end{array} \right. \quad (15)$$

donde $J_n(\omega)$ y $Y_n(\omega)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden n . Entonces, para encontrar los valores de las autofrecuencias del problema se deben hallar los ceros de estas funciones trascendentes sobre ω , siendo todos los demás parámetros datos del problema.

En el ejemplo elegido para resolver numéricamente tomamos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} r_e &= 3m, & r_i &= 1m, & \rho_0 &= 1 \frac{kg}{m^3}, \\ k &= 1 \frac{kg}{m \cdot s^2}, & m &= 1 \frac{kg}{m}, & c &= 1 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (16)$$

En la figura 3 se muestran las funciones trascendentes para $n = 0, 1, 2$ al utilizar estos parámetros. Luego se mostrarán las autofrecuencias obtenidas en una tabla comparativa con los resultados de la resolución numérica por elementos finitos.

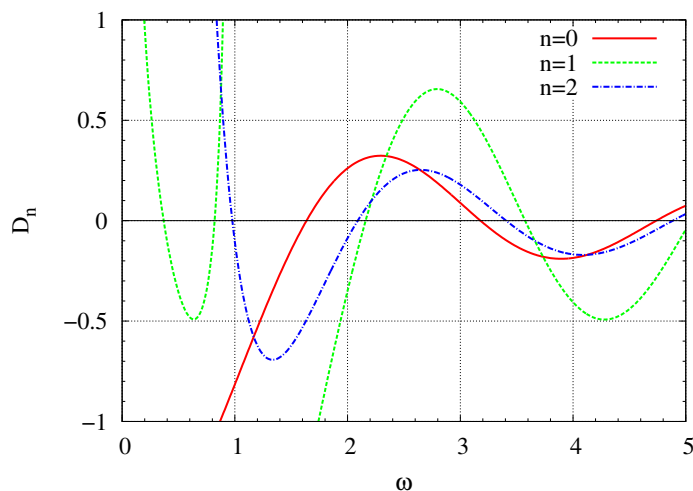


Figura 3: Funciones trascendentes obtenidas para $n = 0, 1, 2$ utilizando los parámetros específicos del problema.

Solución con elementos finitos El problema se resolvió utilizando cinco refinamientos sucesivos de una malla uniforme ($N = 16, 32, 64, 128, 256$), donde el parámetro N es el número de elementos sobre el borde interno y externo del anillo. El número de grados de libertad de cada una de estas mallas fue 420, 1508, 5252, 20356 y 81924 respectivamente. En la figura 4 se muestra la malla inicial utilizada ($N = 16$). El tiempo de cálculo requerido para la malla más delgada fue del orden de 1 hora.

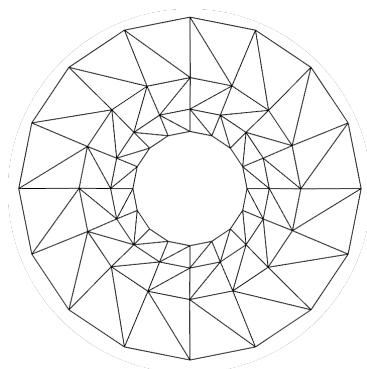


Figura 4: Malla inicial del problema de 2 tubos cilíndricos concéntricos ($N = 16$).

En todos los casos se observó que $\text{Re}(\lambda) < 10^{-10}$, por lo que las autofrecuencias del problema pueden considerarse como imaginarias puras $\lambda = i\omega$. Esto se corresponde con la solución analítica del problema con un fluido invíscido donde no existe amortiguamiento.

Las primeras 10 autofrecuencias ω obtenidas con nuestro código se comparan con los resultados obtenidos analíticamente en la tabla 1. En las figuras 5 y 6 se observan las curvas de nivel y el campo de velocidades del fluido y del tubo para el primer y tercer modo de vibración.

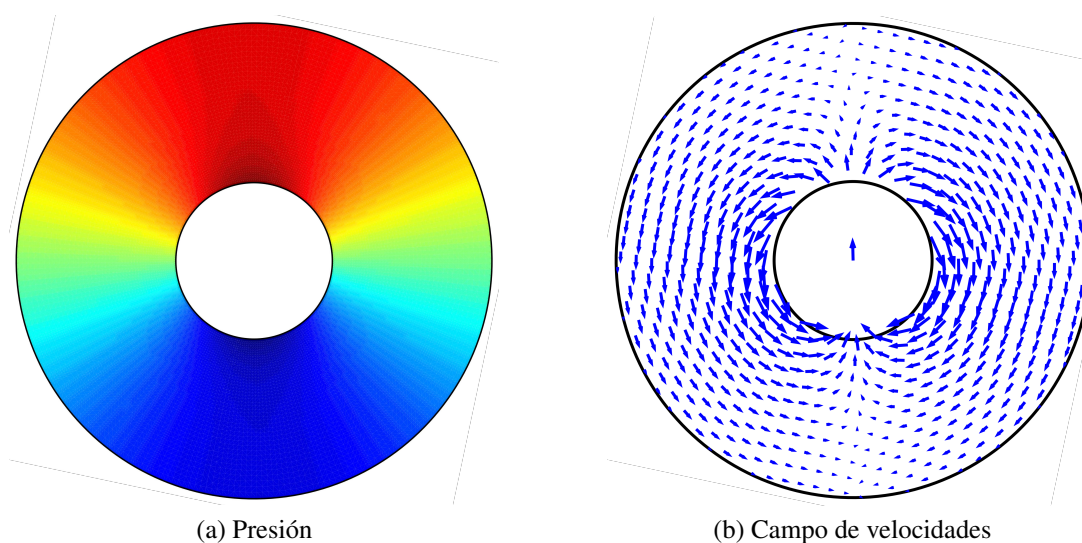


Figura 5: Presión y campo de velocidades del modo 1.

En la tabla se puede ver que el método que utilizamos presenta muy buenos resultados. Se observa como las autofrecuencias obtenidas se aproximan al valor analítico a medida que se refina la malla utilizada, siendo el error en todos los casos menor al 2% para $N = 64$ y menor al 0,5% para $N = 256$.

Sin embargo se observó que el valor al que convergen las soluciones numéricas no es exactamente el valor analítico. Las soluciones numéricas convergen a un valor levemente menor que el analítico. Estas pequeñas diferencias se deben a las condiciones de contorno impuestas sobre las fronteras Γ_0 y Γ_j . En nuestro modelo se impone la *condición de no-deslizamiento*:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 && \text{en } \Gamma_0 \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{s}_j && \text{en } \Gamma_j \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

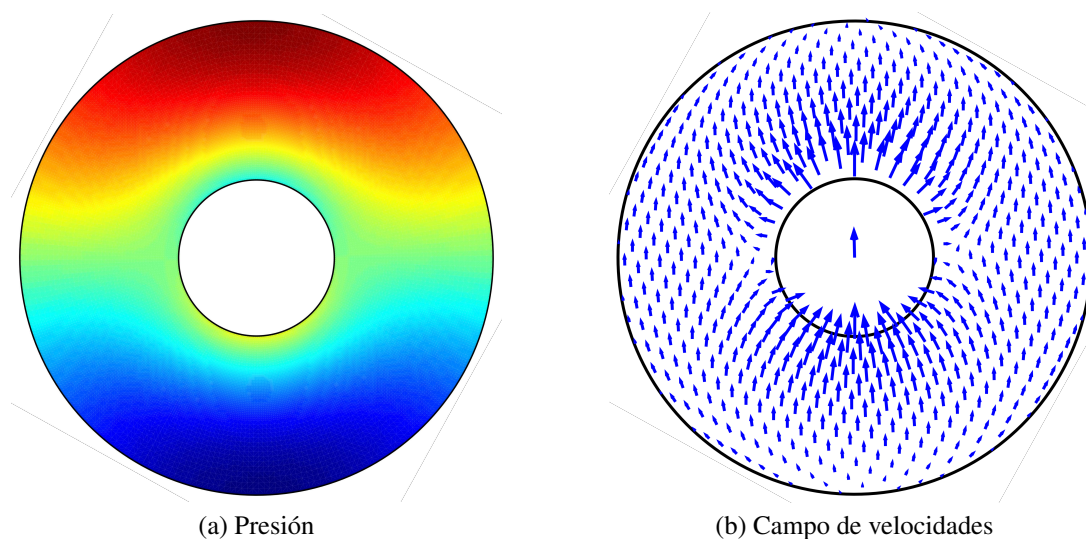


Figura 6: Presión y campo de velocidades del modo 3.

Modo	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	Exacto
1	0,35705	0,35872	0,36273	0,36535	0,36683	0,36844
2	0,35721	0,35879	0,36273	0,36535	0,36683	0,36844
3	0,81624	0,81216	0,81503	0,81743	0,81887	0,82049
4	0,81634	0,81236	0,81506	0,81743	0,81887	0,82049
5	0,96033	0,96098	0,96783	0,97237	0,97487	0,97749
6	0,96045	0,96120	0,96785	0,97237	0,97487	0,97749
7	1,37295	1,36312	1,37237	1,37957	1,38367	1,38803
8	1,37305	1,36365	1,37244	1,37958	1,38367	1,38803
9	1,71061	1,65424	1,63941	1,63654	1,63585	1,63562
10	1,78004	1,73831	1,74677	1,75649	1,76258	1,76922

Tabla 1: Primeras 10 autofrecuencias ω del problema de 2 tubos cilíndricos concéntricos.

mientras que para el problema analítico se emplea la *condición de no-penetración*:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{en } \Gamma_0 \times \mathbb{R}, \\ (\mathbf{v} - \mathbf{s}_j) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{en } \Gamma_j \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sólo con la finalidad de demostrar la convergencia a los valores analíticos se reemplazaron las condiciones de contorno sobre las fronteras Γ_0 y Γ_j y se calcularon las autofrecuencias con la malla más refinada. Los resultados se muestran en la tabla 2. Allí se puede ver que, ahora, los valores numéricos convergen a los analíticos, siendo las diferencias menores al 0,02 % en todos los casos.

Por otro lado, para $N = 16$ se observa un error considerable en las primeras 2 autofrecuencias, superior al 5 %. Sin embargo, este error es atribuible mayormente al error de aproximación de un dominio circular y no a la formulación utilizada.

Caso incompresible A continuación utilizaremos nuestro código para encontrar la solución del problema incompresible, modificando sólo el parámetro de la velocidad de propagación del sonido c , utilizando un valor suficientemente alto. Los demás datos del problema se mantienen como en el caso anterior. Primero veamos qué resultado deberíamos encontrar. Regresamos a

Modo	NP	Exacto
1	0,36852	0,36844
2	0,36852	0,36844
3	0,82053	0,82049
4	0,82053	0,82049
5	0,97746	0,97749
6	0,97746	0,97749
7	1,38792	1,38803
8	1,38792	1,38803
9	1,63585	1,63562
10	1,76909	1,76922

Tabla 2: Primeras 10 autofrecuencias ω con la *condición de no-penetración* sobre las fronteras Γ_0 y Γ_j .

las condiciones (15) mostradas anteriormente para el caso de fluido levemente compresible y llevamos estas expresiones al límite de $c \rightarrow \infty$. Esto lleva a las siguientes implicancias:

- $n = 0$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[J'_0 \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) Y'_0 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) - Y'_0 \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) J'_0 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] = -\frac{8}{3\pi}$$

Esta expresión no depende de ω , por lo tanto no provee ninguna solución.

- $n = 1$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[J'_1 \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) \left[Y'_1 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) + \frac{\rho_o \omega^2}{k - m \omega^2} r_i \pi Y_1 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] - Y'_1 \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) \left[J'_1 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) + \frac{\rho_o \omega^2}{k - m \omega^2} r_i \pi J_1 \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] \right] = \frac{2(4 + 5\pi)\omega^2 - 8}{9\pi(\omega^2 - 1)}$$

Al igualar esta expresión a cero se obtiene:

$$\frac{2(4 + 5\pi)\omega^2 - 8}{9\pi(\omega^2 - 1)} = 0 \implies \omega^2 = \frac{4}{4 + 5\pi} = 0,20296.$$

- $n \geq 2$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[J'_n \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) Y'_n \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) - Y'_n \left(r_e \frac{\omega}{c} \right) J'_n \left(r_i \frac{\omega}{c} \right) \right] = \infty$$

Esta expresión no depende de ω , por lo tanto no provee ninguna solución.

En conclusión, el sistema para fluido incompresible presenta solamente 2 soluciones con autofrecuencias definidas, mientras que las restantes autofrecuencias tienden al infinito.

Para los cálculos numéricos se empleó $c = 10^5$ m/s y se utilizaron nuevamente las cinco mallas del caso compresible. Al igual que en el caso compresible se observó que $\text{Re}(\lambda) < 10^{-10}$, considerando las autofrecuencias como imaginarias puras $\lambda = i\omega$.

Por otra parte, también se vio que a partir del tercer modo $|\omega| > 10^{10}$, lo cual se corresponde con el hecho que el sistema solo presenta 2 soluciones finitas.

En la tabla 3 se pueden observar las dos frecuencias correspondientes al primer y segundo modo. Como en el caso compresible, para demostrar la convergencia a los valores analíticos también se resolvió el problema empleando la *condición de no-penetración* sobre las fronteras Γ_0 y Γ_j utilizando la malla con $N = 256$. Los resultados se muestran en la misma tabla en la columna NP .

Modo	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	NP	Exacto
1	0,43354	0,43670	0,44235	0,44608	0,44821	0,45064	0,45051
2	0,43374	0,43672	0,44235	0,44608	0,44821	0,45064	0,45051

Tabla 3: Autofrecuencias ω para el caso con fluido incompresible. (NP) *Condición de no-penetración*.

Nuevamente se puede ver que el método presenta muy buenos resultados. Las autofrecuencias obtenidas se aproximan al valor analítico a medida que se refina la malla utilizada, siendo los errores menores al 2 % para $N = 64$ y menores al 0,6 % para $N = 256$. El valor al que convergen las soluciones numéricas es levemente menor al valor analítico, sin embargo, en la columna NP de la tabla se puede ver que al cambiar la *condición de no-deslizamiento* por la *condición de no-penetración*, los valores numéricos convergen a los analíticos, siendo las diferencias menores al 0,03 %.

Para $N = 16$ se observa un error considerable, cercano al 5 %, que también se atribuye principalmente al error de aproximación de un dominio circular.

4.2. Cavity cilíndrica con 28 tubos cilíndricos

En esta sección se presenta un ejemplo con interés práctico. En la industria de la energía nuclear existen ciertos dispositivos sometidos a vibraciones que presentan geometrías que son factibles de analizar con el método presentado. Un ejemplo son los elementos combustibles de reactores nucleares de potencia, en donde algunos diseños consisten en un arreglo de barras cilíndricas. Las barras combustibles se encuentran dispuestas en forma de coronas concéntricas, y se encuentran alojadas dentro de un tubo también cilíndrico llamado canal combustible. Elementos combustibles con estas características geométricas pueden encontrarse en reactores nucleares tipo CANDU, como el caso de la central nuclear Embalse.

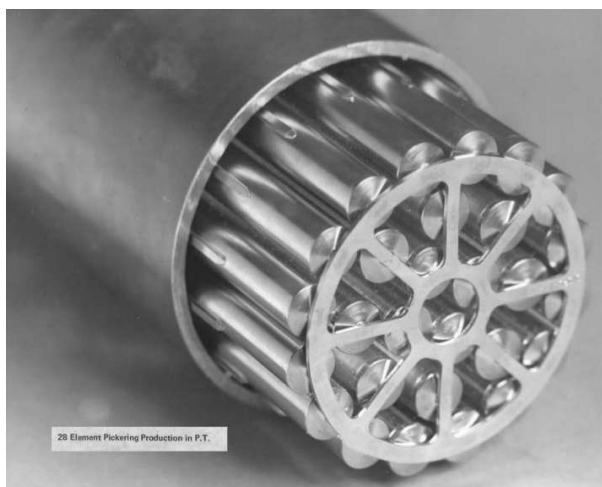


Figura 7: Elemento combustible tipo CANDU, modelo Pickering y Bruce.

En la figura 7 se muestra un elemento combustible tipo CANDU de 28 barras. Los elementos combustibles en un reactor CANDU se disponen de manera horizontal, por lo que éstos quedarían apoyados sobre los canales combustibles si no fuera por unos pequeños separadores. Los separadores pueden observarse en la figura del elemento combustible a la entrada del canal combustible. Sin embargo, en este trabajo se simplificó la geometría del elemento combustible y no se tuvieron en cuenta los separadores. Para ello se consideró un corte transversal de una sección intermedia del elemento combustible, como se puede ver en la figura 8.

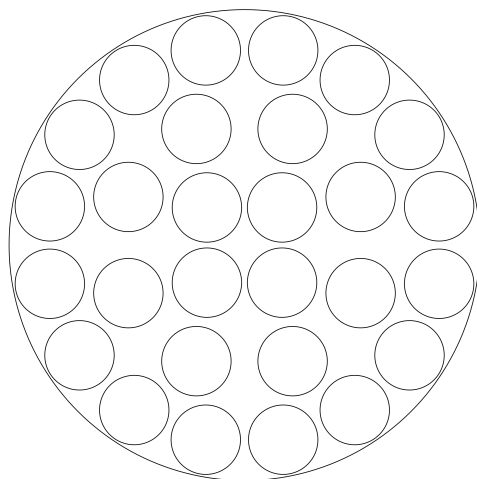


Figura 8: Dominio del problema: corte transversal del elemento combustible.

Este problema ya fue tratado en Piracés (2011). En su trabajo, Piracés utiliza una formulación en la que supone un fluido invíscido cuyo campo de velocidades proviene de una función potencial ϕ . Esta manera de plantear el problema permite obtener un problema generalizado simétrico de autovalores.

Para poder comparar los resultados con los obtenidos por Piracés se utilizaron los mismos parámetros que en su trabajo:

$$\varnothing_{\text{canal}} = 0,1034 \text{ m} \quad \varnothing_{\text{barras}} = 0,01524 \text{ m}$$

$$\text{Espacio mínimo entre canal y barras} = 0,0005 \text{ m}$$

$$m = 0,22 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad k = 27800 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \quad c = 1200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rho_0 = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

que corresponden a las propiedades de barras soportadas por ambos extremos con la elasticidad del acero y sumergidas en agua. Los parámetros geométricos se obtuvieron de Page (1978), mientras que los parámetros físicos fueron extraídos de Planchard y Ibnou-Zahir (1983). Además, debido a que Piracés considera un fluido invíscido en su trabajo, utilizaremos para nuestros cálculos un valor de viscosidad muy pequeño, $\mu = 10^{-9} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, y condición de no-penetración en las fronteras.

En la tabla 4 se presentan las frecuencias [Hz] de los primeros 60 modos de vibración. Allí también se presentan los resultados obtenidos por Piracés y la diferencia entre los 2 métodos de resolución. Para nuestros cálculos se utilizó una malla con 235952 grados de libertad para discretizar todo el dominio, mientras que Piracés, aprovechando las simetrías del problema y

realizando un refinamiento adaptivo hp , empleó una malla de 63247 grados de libertad para discretizar $1/4$ del dominio. El tiempo de cálculo requerido fue un poco menor a 3 horas y media. Se puede ver que los resultados obtenidos son muy similares a los de Piracés, siendo las diferencias menores al 0,4 % para todos los modos.

Modo	$\frac{\omega}{2\pi}$	Piracés	Dif. Relativa
1	23,368	23,277	0,39 %
2	23,376	23,312	0,27 %
3	23,500	23,409	0,39 %
4	23,479	23,419	0,26 %
5	23,480	23,419	0,26 %
6	23,716	23,654	0,26 %
7	23,759	23,686	0,31 %
8	23,759	23,687	0,31 %
9	23,744	23,705	0,17 %
10	23,781	23,730	0,22 %
11	23,939	23,880	0,25 %
12	23,940	23,880	0,25 %
13	24,027	23,963	0,27 %
14	24,197	24,132	0,27 %
15	24,197	24,133	0,27 %
16	24,247	24,191	0,23 %
17	24,463	24,374	0,36 %
18	24,463	24,375	0,36 %
19	25,141	25,071	0,28 %
20	25,676	25,578	0,39 %
21	26,210	26,135	0,29 %
22	27,336	27,264	0,26 %
23	27,336	27,264	0,26 %
24	29,266	29,175	0,31 %
25	30,330	30,254	0,25 %
26	31,626	31,551	0,24 %
27	31,626	31,551	0,24 %
28	32,503	32,449	0,17 %
29	32,543	32,473	0,22 %
30	33,197	33,142	0,17 %
31	33,197	33,142	0,17 %
32	34,128	34,069	0,17 %
33	37,135	37,098	0,10 %
34	37,735	37,680	0,14 %
35	37,735	37,681	0,14 %
36	39,191	39,161	0,07 %
37	39,191	39,162	0,07 %
38	39,349	39,312	0,09 %
39	39,378	39,348	0,08 %
40	42,002	41,964	0,09 %
41	43,507	43,472	0,08 %
42	43,507	43,473	0,08 %
43	44,379	44,342	0,08 %
44	45,050	45,011	0,09 %
45	46,929	46,903	0,06 %
46	47,174	47,146	0,06 %
47	47,174	47,146	0,06 %
48	47,828	47,804	0,05 %
49	47,970	47,945	0,05 %
50	47,970	47,946	0,05 %
51	48,195	48,176	0,04 %
52	50,106	50,085	0,04 %
53	50,106	50,085	0,04 %
54	50,571	50,549	0,04 %
55	50,658	50,638	0,04 %
56	50,678	50,665	0,02 %
57	10270,928	10270,158	0,01 %
58	10270,932	10270,232	0,01 %
59	16843,627	16839,982	0,02 %
60	17008,272	17007,717	0,01 %

Tabla 4: Frecuencias [Hz] de los modos normales de vibración del elemento CANDU.

En la tabla también se puede ver que las primeras $2K = 56$ frecuencias, correspondientes a los modos introducidos por los K tubos, son menores a la frecuencia del sistema masa-resorte en vacío, dada por:

$$\frac{k}{m} = 1,263 \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \implies \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 56,57586 \text{ Hz}, \quad (17)$$

lo cual se condice con el Teorema 3.14 de Conca et al. (1995). Además, se observa un salto en el orden de magnitud entre los modos 56 y 57, producto de la pequeña compresibilidad del agua.

En la figura 9 se muestran los campos de velocidades para 6 modos de vibración.

Fluido incompresible Por último se resuelve el mismo problema considerando al fluido como incompresible, para analizar el error que podría tener despreciar la compresibilidad del fluido. Para ello se emplearon los mismos parámetros que en el caso anterior y se utilizó una velocidad de propagación del sonido $c = 10^5 \text{ m/s}$.

Se observó que las primeras $2K$ frecuencias mostraron muy poca diferencia al incrementar la velocidad c , mientras que las restantes aumentan significativamente tendiendo al infinito cuando $c \rightarrow \infty$.

Modo	Compresible	Incompresible	Dif. Relativa
1	23,36787	23,36789	0,0001 %
2	23,37575	23,37579	0,0002 %
3	23,49954	23,49957	0,0001 %
55	50,65753	50,65753	0,000005 %
56	50,67777	50,67777	0,000004 %
57	10270,93	169893,83	1554 %
58	10270,93	175216,16	1606 %
59	16843,63	162944,31	867 %
60	17008,27	175999,54	935 %

Tabla 5: Comparación entre frecuencias [Hz] de vibración del elemento CANDU con fluido levemente compresible e incompresible.

5. CONCLUSIONES

- Se presentó una nueva formulación de elementos finitos para el estudio de vibraciones de tubos rígidos montados elásticamente sumergidos en un fluido contenido en una cavidad rígida. Esta formulación es válida para fluidos compresibles e incompresibles con o sin viscosidad. En la misma se emplean presiones y velocidades como variables primarias. La presión en el fluido se aproxima utilizando elementos triangulares lineales, mientras que para las velocidades se emplean los denominados elementos MINI. La interacción entre los sólidos y el fluido se introduce utilizando multiplicadores de Lagrange.
- Se validó la implementación estudiando un problema con solución analítica. Las soluciones obtenidas con el método presentado y las analíticas coinciden con gran precisión. Se evaluó y verificó la robustez del método para el caso de fluido incompresible cuando $c \rightarrow \infty$, y para el caso de fluido invíscido cuando $\mu \approx 0$, lo cual convierte a esta implementación en una herramienta de cálculo muy versátil.
- En el problema del elemento combustible CANDU, se observó un salto importante entre las frecuencias de los modos $2K$ y $2K + 1$, producto de la compresibilidad del agua. Las primeras $2K$ se mantuvieron por debajo de k/m , lo cual era esperado en concordancia con el Teorema 3.14 de Conca et al. (1995). Además, el error de las primeras $2K$ frecuencias por considerar al fluido como incompresible es despreciable siendo menor al 0,0001 % en el peor de los casos. El resto de las autofrecuencias tienden al infinito.

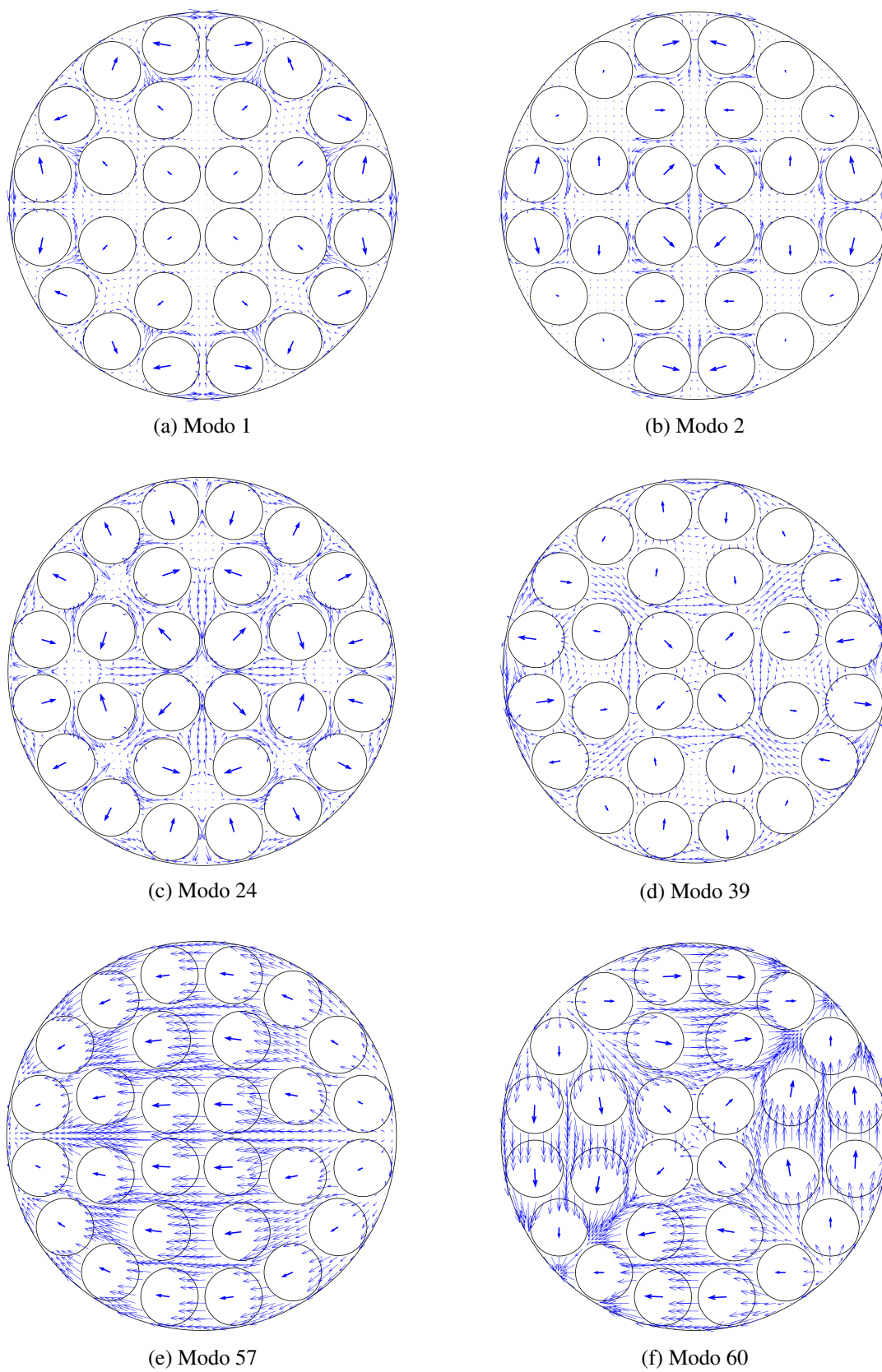


Figura 9: Campos de velocidades del elemento CANDU.

REFERENCIAS

- Arnold D.N., Scott L.R., y Vogelius M. Regular inversion of the divergence operator with dirichlet boundary conditions on polygon. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. - Serie IV XV*, páginas 169–192, 1988.
- Conca C., Planchard J., y Vanninathan M. *Fluids and Periodic Structures*. Masson, Paris, 1995.
- Grégoire J., Nédélec J., y Planchard J. A method of finding eigenvalues and eigenfunctions of self-adjoint operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8:201–214, 1976.
- Page R.D. *Canadian Power Reactor Fuel, Nuclear Power Symposium*. Atomic Energy of Canada Limited, Ontario, 1978.
- Piracés J.M. Modelado de las vibraciones de un arreglo de tubos elásticamente montados inmersos en un fluido compresible utilizando adaptividad hp. *Proyecto Integrador Carrera de Ingeniería Mecánica, Instituto Balseiro*, 2011.
- Planchard J. y Ibnou-Zahir M. Natural frequencies of tube bundle in an incompressible fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:47–68, 1983.