

## INFLUENCIA DE RELACIONES CONSTITUTIVAS NO LINEALES EN LA RECOLECCIÓN PIEZOELÉCTRICA DE ENERGÍA

Claudio D. Gatti<sup>a,c</sup>, J. M. Ramírez<sup>a,c</sup>, S. P. Machado<sup>a,c</sup> y M. Febbo<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional FRBB (UTN), 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

<sup>b</sup> *Instituto de Física del Sur (IFISUR), Departamento de Física. Universidad Nacional del Sur (UNS). Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

<sup>c</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).*

**Palabras claves:** Recolección de energía, No linealidad piezoeléctrica, Dinámica no lineal, Ferroelasticidad.

**Resumen.** La conversión de vibraciones en una forma utilizable de energía se ha convertido en un tema de gran interés en la comunidad científica. Los materiales piezoeléctricos producen cargas eléctricas cuando son deformados mecánicamente y es por tal motivo que son especialmente aptos para su aplicación en sistemas recolectores de energía. Aunque es sabido que las ecuaciones constitutivas de los piezoeléctricos son no lineales, la mayoría de los modelos matemáticos existentes están basados en la forma linealizada de estas ecuaciones. Sin embargo, el creciente avance en estos dispositivos recolectores ha puesto especial énfasis en la comprensión rigurosa del comportamiento electromecánico de los piezocerámicos como parte integrante de una estructura. El propósito de este trabajo es investigar la influencia de los términos constitutivos no lineales de los materiales piezoeléctricos sobre el comportamiento dinámico de una viga cantilever sometida a una aceleración de su base. Para realizar el análisis se desarrolla un modelo analítico no lineal cuyos resultados son comparados con ensayos experimentales y numéricos. Se presenta la influencia de los términos no lineales sobre el voltaje eléctrico y potencia generada por el recolector de energía considerando diferentes amplitudes de excitación.

## 1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de nuevas fuentes de energía limpias, debido a la creciente demanda de energía, ha impulsado el surgimiento de una intensa actividad de investigación en la búsqueda de nuevas formas de gestión eficiente de los recursos energéticos. Entre las llamadas técnicas de captación de energía (técnica conocida como Energy Harvesting en inglés), que permiten una recolección de energía residual a partir de fuentes ambientales limpias y libres (luz, vibraciones, gradiente térmico), el uso de energía mecánica en forma de vibraciones es una opción interesante, ya que no depende del nivel de luz solar.

Los dispositivos mecánicos recolectores de energía producen electricidad a partir de la vibración, tensión y deformación mecánica de la superficie del sensor. La extracción de energía de vibración esta comúnmente basada en el movimiento de un sistema relativo a su marco de soporte. La aceleración mecánica es producida por vibraciones que provocan el movimiento oscilatorio de la masa. Esta energía cinética puede ser convertida en energía eléctrica por medio de un campo magnético variable, por la deformación de un material piezoeléctrico o por un campo eléctrico. La mayoría de los sistemas de fuente vibratoria trabajan en resonancia, lo cual implica que existe un pico en la amplitud de desplazamiento donde el sistema entrega la máxima cantidad energía. La resonancia en un recolector de energía de vibración o resonador mecánico del tipo viga en voladizo es afectada por la tensión flexional presente en el dispositivo. Por lo tanto, el nivel de tensión alcanzado en la estructura oscilante es el principal parámetro a la hora de obtener la máxima potencia de salida de un recolector mecánico. Algunos dispositivos son capaces de trabajar en una zona ligeramente alejada del pico de resonancia cuando existe un exceso de energía disponible. Es por tal motivo que la atención de los investigadores se concentra actualmente tanto en sistemas auto-sintonizables, para aprovechar el fenómeno de resonancia, como en técnicas de recolección de energía no resonante.

Una revisión de estado de arte adoptando modelos lineales ha sido desarrollada por muchos investigadores. Estos modelos matemáticos de dispositivos de recolección de energía en su mayoría usan la teoría de vigas de Euler-Bernoulli bajo excitación de la base, como por ejemplo son los casos de [Beeby S P et al, 2006](#) , [Erturk A et al, 2011](#) , [Erturk A et al, 2008](#).

El comportamiento no lineal de los dispositivos de recolección de energía se presenta a partir de no-linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos, o bien desde el punto de vista de sus ecuaciones constitutivas por medio de no-linealidades elásticas, de acoplamiento electromecánico o el fenómeno de histeresis ferroelástica y ferroeléctrica [Shiv Joshi, 1992](#), [Damjanovic, 2011](#), [Goldschmidtboeing, 2005](#).

Las no linealidades de los materiales piezoeléctricos se manifiestan en muchas aplicaciones de ingeniería y su comportamiento no lineal asociado a dispositivos recolectores de energía es estudiado por muchos investigadores. [Stanton S, 2010](#) propone validar experimentalmente un modelo matemático teniendo en cuenta la no linealidad corresponde a efectos elásticos de orden superior y acoplamiento no lineal a un circuito recolector de energía. La no linealidad corresponde a efectos elásticos de orden superior y acoplamiento no lineal a un circuito recolector de energía. La literatura existente se concentra en la dinámica de estructuras hechas de materiales piezoeléctricos y ha focalizado tales no linealidades en forma separada, como por ejemplo, [Aurelle, N, et al, 1996](#) estudió la contribución de las deformaciones y el acoplamiento electromecánico en la respuesta no lineal de una viga piezoeléctrica bajo campos eléctricos débiles. [Albareda et al. 2000](#), sólo considera una

formulación de alto orden en el potencial termodinámico a partir del cual se obtienen ecuaciones constitutivas no-lineales para la tensión y el desplazamiento eléctrico de alto orden en la deformación y el campo eléctrico. Priya, S, et al, 2001 analizó no linealidades eléctricas generadas por campos eléctricos fuertes y la influencia del fenómeno ferroelásticos. Leadenham et al, 2014 estudiaron un modelo de parámetros distribuidos teniendo en cuenta ablandamiento y no linealidades disipativas de una viga piezoeléctrica del primer modo flexional usando el método de balance armónico.

En este artículo se pretende caracterizar la influencia del fenómeno ferroelásticos en la recolección de energía utilizando materiales piezoeléctricos QP16N MIDE desarrollados por MIDE Technology. El modelo estructural a estudiar es una viga cantiléver de aluminio con un parche de material piezoeléctrico MIDE. El modelo analítico se base en una teoría ferroelástica de alto orden. La respuesta dinámica del modelo analítico es comparada con los resultados de los ensayos experimentales. Las constantes no lineales de la matriz constitutiva del material han sido establecidas mediante identificación de parámetros. Finalmente, se analiza la influencia de los parámetros no lineales del material piezoeléctrico en la recolección de energía.

## 2 DESCRIPCION DEL RECOLECTOR DE ENERGIA

El modelo de recolección de energía consiste en una estructura empotrada libre de aluminio con una lámina de material piezoeléctrico MIDE QP16N ubicada en la región cercana al empotramiento. Mediante la deformación del material PZT se transforma la energía mecánica en energía eléctrica como se puede observar en la Figura 1.

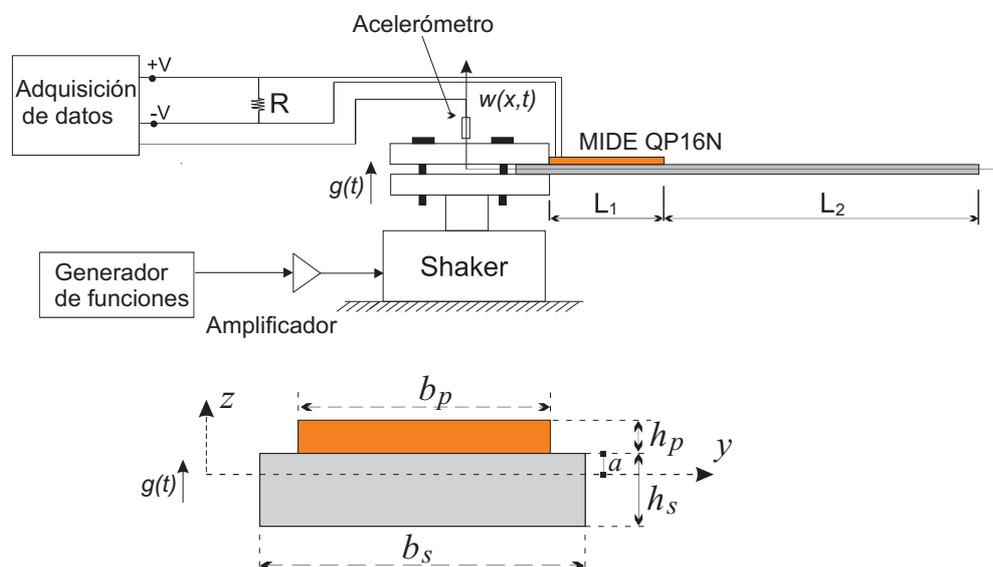


Figura 1: Esquema del sistema de recolección de energía

El modelo matemático del recolector de energía se basa en la teoría de Bernoulli-Euler, donde  $w(x,t)$  es la deflexión transversal de la viga desde el punto de equilibrio. En cuanto al modelo eléctrico se considera el campo eléctrico lineal y uniforme a través del espesor del piezoeléctrico. La no linealidad del sistema corresponde a los fenómenos no lineales de ferroelasticidad del material piezoeléctrico. El modelo propuesto es resuelto a partir del

método de balance armónico utilizando los ensayos experimentales para realizar una identificación de los parámetros no lineales del material.

## 2.1 Desplazamientos

El campo de desplazamiento se define como:

$$u = \left[ -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad 0 \quad w(x, t) + g(t) \right]^t \quad (1)$$

siendo  $w(x, t)$  el desplazamiento transversal y  $g(t)$  el movimiento de la base.

## 2.2 Discretización

El método de Galerkin es usado para reducir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario. Se considera en la discretización el primer modo flexional.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

La componente de deformación será:

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = -z q(t) \phi''(x) \quad (3)$$

## 2.3 Densidad de entalpía

La densidad de entalpía de la estructura de aluminio y el piezoeléctrico es denotada por los subíndices  $s$  y  $p$  respectivamente. La no linealidad de la constitutiva del material piezoeléctrico es desarrollada de acuerdo a [G. Maugin, 1985](#), [J. Yang, 2005](#), [U. von Wagner, et al, 2002](#) y [Leadenham et al, 2014](#).

$$H_s = \frac{1}{2} c_{11}^s S_1^2 \quad (4)$$

$$H_p = \frac{1}{2} c_{11}^p S_1^2 + \frac{1}{3} c_{111}^p S_1^3 \operatorname{sgn}(S_1) - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2} e_{311} S_1^2 \operatorname{sgn}(S_1) E_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{33} E_3^2 \quad (5)$$

donde  $c_{11}^s$  y  $c_{11}^p$  son los módulos de elasticidad del aluminio y el piezoeléctrico,  $c_{111}^p$  es el módulo de elasticidad no lineal,  $e_{31}$  es la constante piezoeléctrica lineal,  $e_{311}$  es la constante piezoeléctrica no lineal,  $\epsilon_{33}$  es la permitividad del piezoeléctrico y  $E_3$  es el campo eléctrico que viene dado por:

$$E_3 = - \frac{v(t)}{h_p} \quad (6)$$

## 2.4 Energía interna

La energía potencial interna total del sistema está constituida por la energía interna del aluminio en la longitud total de la estructura y del parche piezoeléctrico.

$$U = U_p + U_s \quad (7)$$

Integrando la densidad de entalpia en el volumen de la estructura de aluminio y el piezoeléctrico.

$$U = \int_V H dV \quad (8)$$

Reemplazando las Ecs. (3) y (4) en la Ec. (7) se obtiene la expresión de la energía interna total del sistema recolector.

$$U = \frac{k}{2} q[t]^2 + \frac{k_n}{3} q[t]^3 \operatorname{sgn}(q[t]) - \theta v[t] q[t] - \frac{\theta_n}{2} v[t] \operatorname{sgn}(q[t]) q[t]^2 - \frac{C_p}{2} v[t]^2 \quad (9)$$

donde  $k$ ,  $k_n$ ,  $\theta$ ,  $\theta_n$ ,  $C_p$  son la rigidez modal lineal, la rigidez no lineal, el acoplamiento electromecánico lineal y no lineal, y la capacidad eléctrica respectivamente definidas posteriormente en el Apéndice.

## 2.5 Energía cinética

La energía cinética del recolector está distribuida en la longitud total de la estructura y la viga piezoeléctrica y está dada por:

$$T = T_p + T_s \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_3^2}{\partial t} dV \quad (11)$$

Integrando en el volumen de la estructura y el piezoeléctrico, la expresión de la energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2} m_t \dot{q}[t]^2 + m_a \dot{q}[t] \dot{q}[t] + \frac{1}{2} m \dot{q}[t]^2 \quad (12)$$

donde  $m_t$ ,  $m_a$  y  $m$  son la masa modal total, la masa modal forzante y la masa total de la estructura respectivamente.

## 2.6 Energía de disipación

El amortiguamiento estructural es proporcional a la deformación de la viga. En este modelo se consideran dos disipaciones, una de ellas es el amortiguamiento propio de la estructura de aluminio y la otra es el amortiguamiento no lineal del material piezoeléctrico

Leadenham S, 2014. Las expresiones para el amortiguamiento de la estructura de aluminio y la piezoeléctrica están dadas por las Ecs. (13) y (14), respectivamente.

$$D_s = \frac{1}{2} b_{11} S_1^2 \operatorname{sgn}(S_1) \quad (13)$$

$$D_p = \frac{1}{3} b_{111} S_1^3 \quad (14)$$

La energía de disipación de la estructura de aluminio y el material piezoeléctrico se obtiene integrando en el volumen respectivo, quedando así:

$$W_{ncp} = \int_{V_p} D_p dV_p \quad (15)$$

$$W_{ncs} = \int_{V_s} D_s dV_s \quad (16)$$

La energía de disipación por el efecto Joule en la resistencia de carga se determina mediante:

$$W_{nce} = q_e(t)v(t) \quad (17)$$

donde  $q_e$  es la carga eléctrica.

La energía de disipación total queda expresada por la siguiente ecuación:

$$W_{nc} = W_{ncp} + W_{ncs} + W_{nce} \quad (18)$$

Reemplazando las Ecs. (15-17) en Ec. (18), la expresión de energía disipada total queda expresada como:

$$W_{nc} = -\frac{1}{2} b q[t]^2 \operatorname{sgn}(q[t]) - \frac{1}{3} b_n q[t]^3 + q_e[t]v[t] \quad (19)$$

## 2.7 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones electromecánicas de movimiento basadas en el principio extendido de Hamilton, D. A. Wells, 1972.

$$m\ddot{q}[t] + (bq[t]\operatorname{sgn}(q[t]) + b_n q[t]^2)\operatorname{sgn}(\dot{q}[t]) + kq[t] + k_n q[t]^2 \operatorname{sgn}(q[t]) - (\theta + \theta_n q[t]\operatorname{sgn}(q[t]))v[t] = -m_a \ddot{g}[t] \quad (20)$$

$$C_p \dot{v}[t] + \frac{v[t]}{R_l} + (\theta + \theta_n q[t] \operatorname{sgn}(q[t])) \dot{q}[t] = 0 \quad (21)$$

## 2.8 Balance armónico

El método de balance armónico se ha utilizado ampliamente para analizar soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, [Nayfeh et al, 1995](#). En este análisis, una solución de equilibrio armónico de primer orden es usado para obtener la respuesta de estado estacionario a una excitación armónica. Se propone una aceleración armónica de la base con amplitud constante:

$$\ddot{g}(t) = G \cos(\Omega t) \quad (22)$$

La respuesta armónica del desplazamiento modal y de voltaje se propone:

$$q(t) = Q_1 \cos(\Omega t) + Q_2 \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (23)$$

$$v(t) = V_1 \cos(\Omega t) + V_2 \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (24)$$

Siendo la amplitud de  $q(t)$ :

$$Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \quad (25)$$

Reemplazando las [Ecs. \(22-24\)](#) en [Ecs. \(20-21\)](#) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 Q_1 + \left(\frac{2}{\pi} b + \frac{4}{3\pi} b_n Q\right) Q_2 + \left(k + \frac{8}{3\pi} k_n Q\right) Q_1 - \theta V_1 \\ - \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(2Q_1^2 + Q_2^2)V_1 + Q_1 Q_2 V_2}{Q} \right] + m_a G = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 Q_2 - \left(\frac{2}{\pi} b + \frac{4}{3\pi} b_n Q\right) Q_1 + \left(k + \frac{8}{3\pi} k_n Q\right) Q_2 - \theta V_2 \\ - \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(2Q_2^2 + Q_1^2)V_2 + Q_1 Q_2 V_1}{Q} \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$C_p \Omega V_2 + \frac{V_1}{R_l} + \left(\theta + \frac{4}{3\pi} \theta_n Q\right) \Omega Q_2 = 0 \quad (28)$$

$$C_p \Omega V_1 - \frac{V_2}{R_l} + \left(\theta + \frac{4}{3\pi} \theta_n Q\right) \Omega Q_1 = 0 \quad (29)$$

El voltaje en el dominio de frecuencias se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (30)$$

### 3 EXPERIMENTACIÓN

Los experimentos consisten en excitar la viga cantiléver mediante una aceleración en la base de la misma. La señal de entrada es generada a través de un generador arbitrario de ondas Rigol DG4062 y posteriormente amplificada para luego ingresar a un shaker Labworks ET-132. La respuesta es medida por un acelerómetro PCB Piezotronics con una sensibilidad de 98.7 mV/g. La señal de salida es adquirida por una placa National Instruments NI9234 y postprocesada mediante un código generado en Matlab. La configuración de ensayo se puede observar en la [Figura 2](#).

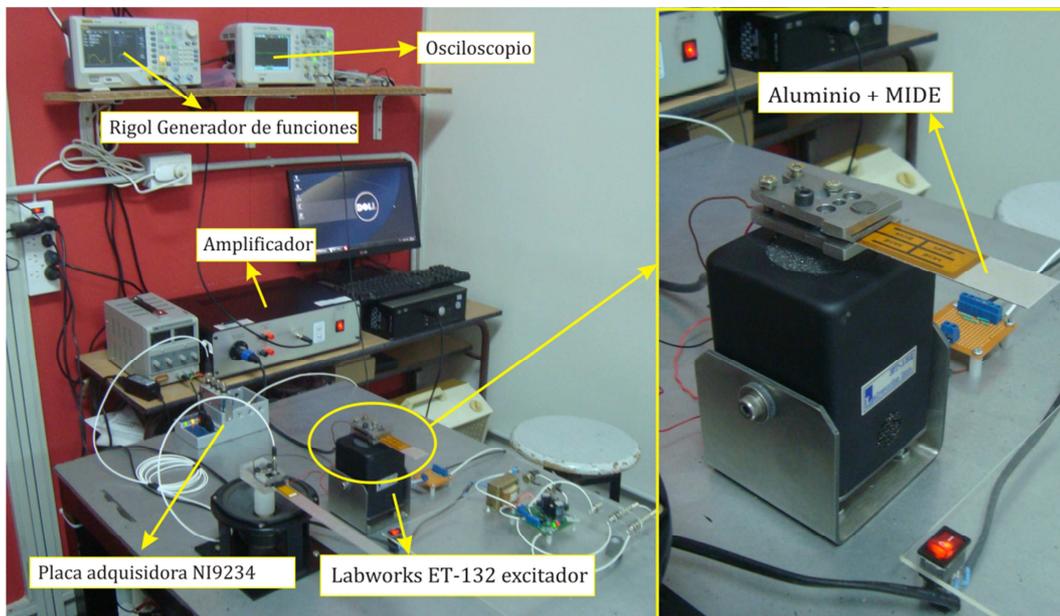


Figura 2: Esquema del ensayo experimental.

Las propiedades geométricas y materiales se muestran en la [Tabla 1](#) y [Tabla 2](#).

Propiedades Geométricas	Núcleo	Piezoeléctrico
Material	Aluminio	MIDE QP16N
Longitud	80 mm	45.9 mm
Base	21 mm	20.574mm
Espesor	0.5 mm	0.254 mm

Tabla 1: Propiedades geométricas del dispositivo recolector de energía.

Núcleo (Aluminio)		Piezoeléctrico (MIDE QP16N)
Módulo de Young	67 GPa	67 GPa
Densidad	2700 kg/m <sup>3</sup>	7800 kg/m <sup>3</sup>
Constante Piezoeléctrica d <sub>31</sub>	-	1.9 E+2 pm/V
Capacitancia	-	90.78 nF

Tabla 2: Propiedades de los materiales

Los ensayos consisten en realizar mediciones estacionarias para cada frecuencia de excitación y valores de aceleraciones constantes en la base. En cuanto a las frecuencias de excitación se realizaron mediciones de frecuencias que van desde 96 a 114 Hz de tal forma de capturar el primer modo flexional del sistema. Con respecto a las aceleraciones de excitación, se ensayaron con aceleraciones de la base constantes de 3 G, 2 G, 1 G, 0.5 G, 0.2 G y 0.1 G. Dichos valores se eligieron con el motivo de apreciar con claridad el rango en que se presentan comportamientos no lineales del sistema. La resistencia de carga utilizada es de 100 k $\Omega$  para todos los casos.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Identificación de parámetros

La identificación de parámetros se realiza mediante el método de optimización de mínimos cuadrados para sistemas no lineales con un algoritmo de regiones de confianza.

Los parámetros a identificar del modelo no lineal anteriormente formulado son: los amortiguamientos lineal y no lineal ( $b_{11}$  y  $b_{111}$ ), el módulo de elasticidad no lineal ( $c_{111}$ ) y constante piezoeléctrica no lineal ( $e_{311}$ ). Dichos parámetros se identificaron para una excitación de la base de 3 G y los valores obtenidos son:

$$b_{11} = 3.59e^9 N/m^2 \quad (31)$$

$$b_{111} = 6 \cdot 10^{13} N/m^2 \quad (32)$$

$$c_{111} = -82.28 TPa \quad (33)$$

$$e_{311} = -11.11 kC/m^2 \quad (34)$$

En la [Figura 3](#) se muestra la respuesta en frecuencia obtenida a partir del modelo analítico ([Ecs. 26 – 29](#)) considerando los parámetros previamente identificados y los resultados experimentales para una aceleración en la base de 3G.

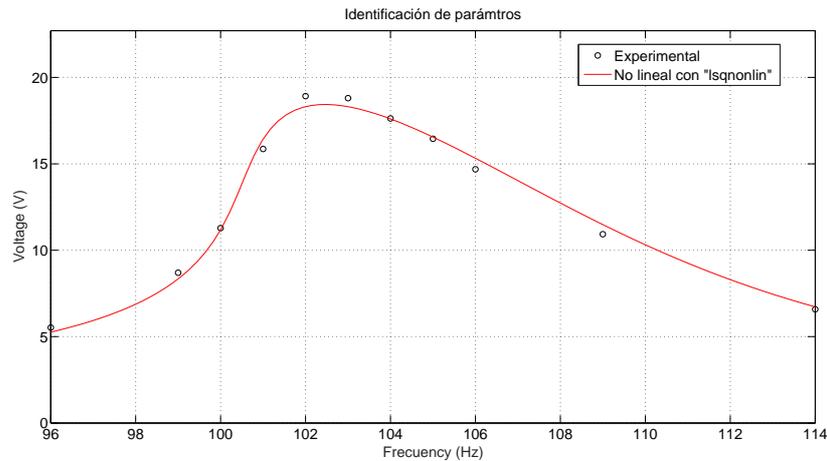


Figura 3: Respuesta en frecuencia analítica no lineal usando identificación de parámetros y resultado experimental.

Se puede observar que el resultado obtenido analíticamente predice con buena precisión los resultados obtenidos experimentalmente.

#### 4.2 Validación experimental

Una vez realizada la identificación de parámetros se procede a validar el modelo analítico propuesto mediante resultados experimentales considerando diferentes amplitudes de excitación tal como se observa en la siguiente Figura 4

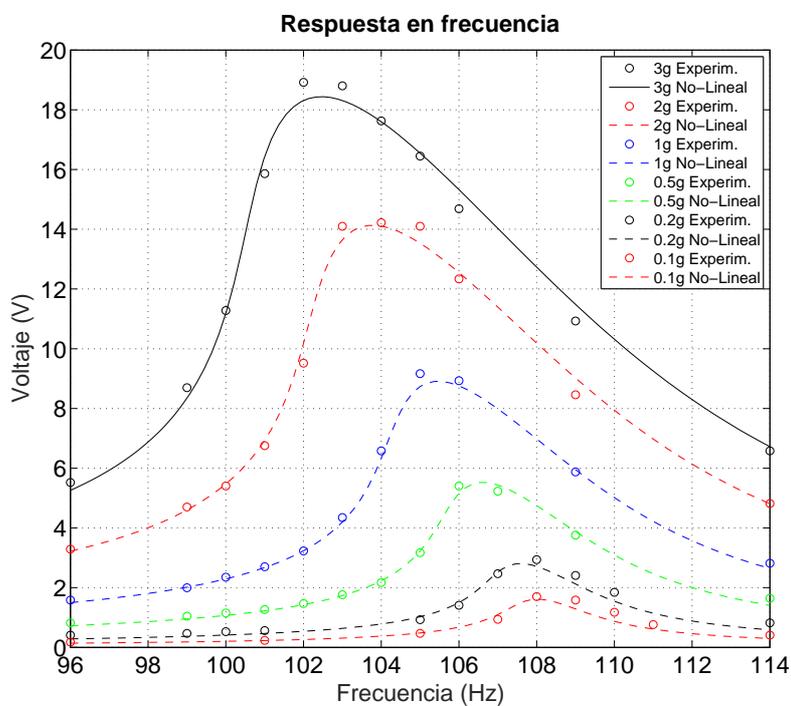


Figura 4: Respuesta en frecuencia analítica no lineal y experimental.

En la [Figura 4](#) se comparan las curvas de respuesta en frecuencia obtenidos experimentalmente para diversos valores de excitación de aceleración en la base, partiendo desde muy bajas aceleraciones de 0.1 G hasta 3 G; donde G es la aceleración de la gravedad.

La influencia de los términos no lineales es ilustrada en las [Figure 5-7](#). En dichas figuras se muestra la respuesta en frecuencia experimental, la respuesta del modelo lineal y del modelo no lineal analítico propuesto. El modelo lineal se obtiene eliminando los parámetros de subíndice  $n$  en las [Ecs 26-29](#).

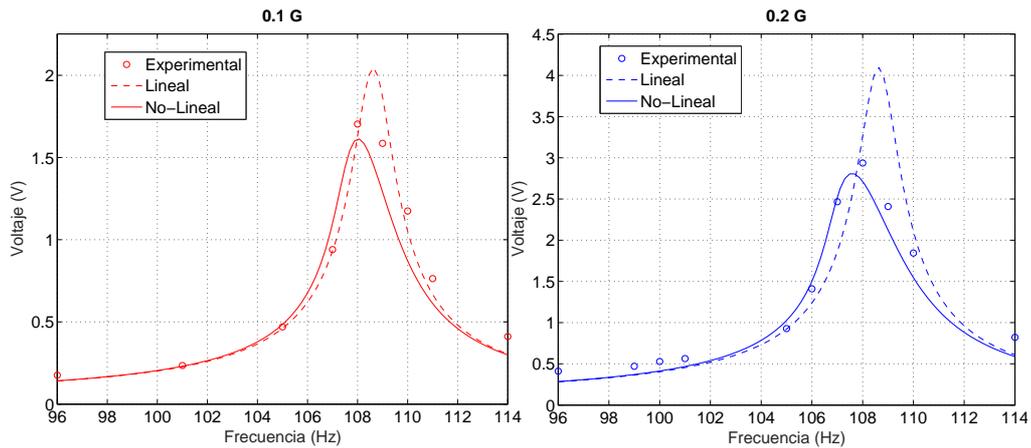


Figure 5: Comparación de respuesta en frecuencia analítica lineal, no lineal y experimental para 0.1 G y 0.2 G

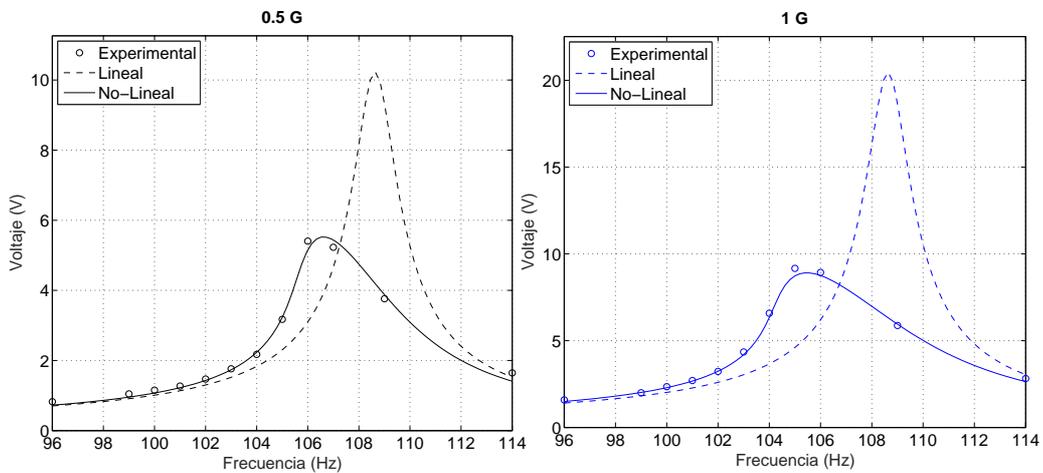


Figure 6: Comparación de respuesta en frecuencia analítica lineal, no lineal y experimental para 0.5 G y 1 G

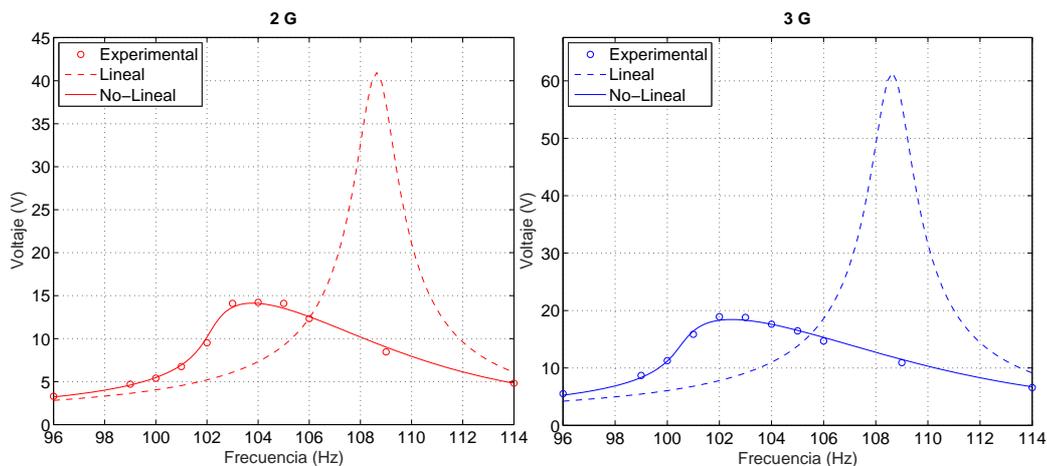


Figura 7: Comparación de respuesta en frecuencia analítica lineal, no lineal y experimental para 2 G y 3 G

En las [Figure 5-7](#) se observa que a medida que aumenta la aceleración de excitación, la curva de respuesta en frecuencia se inclina hacia la izquierda (fenómeno conocido como softening), modificando así la amplitud de voltaje generado y frecuencia resonante del sistema. Claramente se aprecia que para una aceleración de 3 G, el valor máximo de amplitud disminuye hasta 4 veces su amplitud usando un modelo lineal. En cuanto a la frecuencia natural del sistema para un modelo lineal es de 108.6 Hz, y 102 Hz para un modelo no lineal, es decir una diferencia de 6.6 Hz.

En la [Figura 8](#), se muestra la generación de voltaje a medida que la excitación aumenta para los dos modelos analíticos lineal y no lineal y para los resultados experimentales.

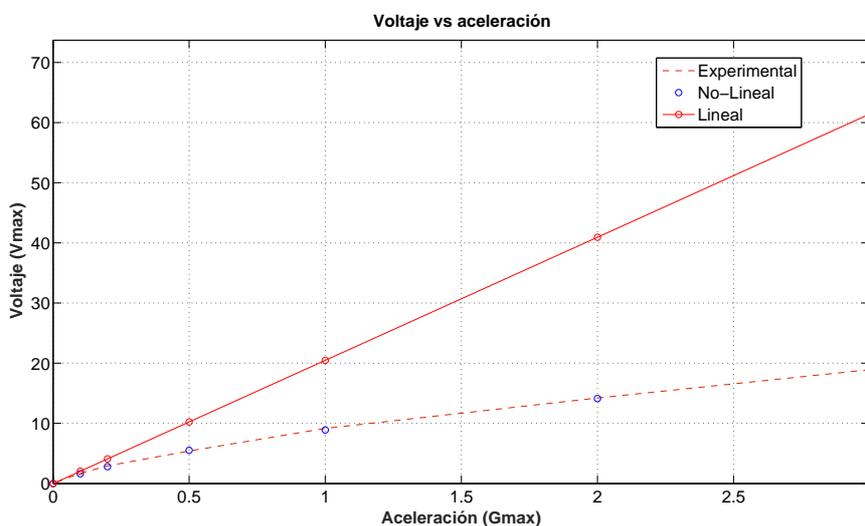


Figura 8: Voltaje en función de la aceleración de excitación.

Para este caso en particular se observa que la generación de voltaje a partir del modelo lineal no reproduce con exactitud los valores experimentales, en tal caso sólo es válido dicho modelo para un rango aproximado de 0.1 G. Por este motivo, la influencia de los efectos no lineales del material es claramente relevante. Se observa que los resultados del modelo

analítico no lineal pueden predecir con buena precisión los resultados experimentales para todo el rango de excitación.

En la Figura 9 se muestra las respuestas temporales del voltaje y aceleraciones de excitación de la base para frecuencias de excitación de 96Hz, 102 Hz y 114 Hz apreciándose claramente la respuesta armónica del sistema. Del diagrama espectral se puede observar que la respuesta temporal está predominada por el primer armónico, de ésta manera se justifica el método de balance armónico de primer orden.

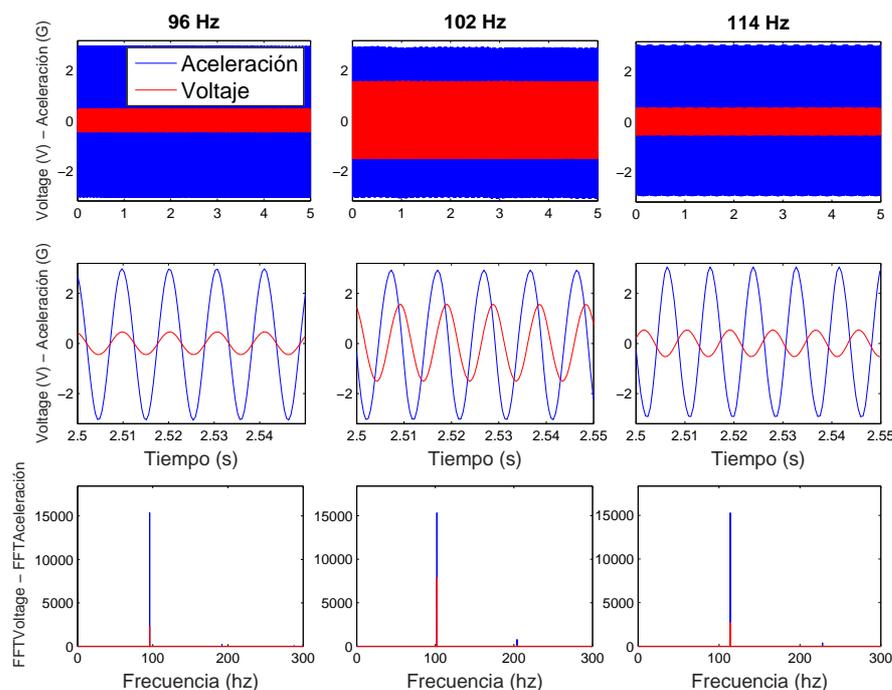


Figura 9: Respuesta en frecuencia y respuesta temporal experimentales.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el comportamiento dinámico de una viga cantiléver con una lámina piezoeléctrica adosada para la recolección de energía de vibraciones, sometida a diferentes niveles de aceleración de su base. Se utilizó un modelo analítico no-lineal para la lámina piezoeléctrica, en lo referido a su ecuación constitutiva, que contempla el efecto de histéresis ferroelástica que da lugar a términos de rigidez y disipación no lineales, dejando de lado efectos geométricos no lineales. A partir de las ecuaciones de Lagrange se obtuvieron ecuaciones diferenciales no-lineales que fueron resueltas con el método de balance armónico, implementándose en la solución un solo armónico. El sistema modelado fue luego construido y ensayado experimentalmente. A partir del modelo aplicado al análisis de los resultados para un determinado nivel de aceleración se identificaron los parámetros de la ecuación constitutiva del piezoeléctrico, que luego fueron utilizados para analizar los restantes experimentos. De los resultados obtenidos se pudo deducir que los parámetros encontrados reprodujeron en forma correcta los experimentos para las demás aceleraciones utilizadas. Por ello, se dedujo que el modelo predice correctamente el comportamiento dinámico del sistema estudiado. En cuanto a la solución implementada del método de balance armónico

considerando un solo término, el análisis espectral de la respuesta temporal para varias frecuencias de excitación en el nivel más alto de aceleración analizada (3G) arroja que la respuesta temporal posee un único armónico significativo (en comparación con el resto) validando de esta manera la solución propuesta. Se observó experimentalmente que la frecuencia resonante del sistema depende de la amplitud de excitación y que la respuesta en frecuencia presenta un comportamiento no lineal. Finalmente, el modelo lineal sobreestima la capacidad de voltaje recolectado por el dispositivo y predice una frecuencia resonante alejada de la realidad lo cual es perjudicial a la hora de diseñar un recolector de energía bajo una condición dinámica resonante.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional del Sur, CONICET y a la Agencia de Promoción Científica y Tecnológica.

## REFERENCIAS

- Beeby S P, Tudor M J and White N M, Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measured Science and Technology*; 17:R175–R195, 2006.
- Erturk A and Inman D J. *Piezoelectric energy harvesting*, (Wiley: Chichester, UK), 2011.
- Erturk A and Inman D J. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. *Journal of vibration and Acoustic*; 130:041002-1, 2008.
- Erturk A, Inman D J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*; 18:025009, 2009.
- Erturk A, Hoffmann J and Inman D J. A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting. *Applied Physics*; 94:254102, 2009.
- Shiv P Joshi. Non-Linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart material structure*; 80:83, 1992.
- Samuel C. Stanton,<sup>1,a</sup> Alper Erturk,<sup>2</sup> Brian P. Mann,<sup>1</sup> and Daniel J. Inman<sup>2</sup> Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification. *Journal of Applied Physics* 108, 074903. 2010.
- Aurette, N., Guyomar, D., Richard, C., Gonnard, P., Eyraud, L.: Nonlinear behavior of an ultrasonic transducer. *Ultrasonics* 34, 187–191 (1996).
- Albareda, A., Gonnard, P., Perrin, V., Briot, R., Guyomar, D.: Characterization of the mechanical nonlinear behavior of piezoelectric ceramics. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 47, 844–853 (2000)

Priya, S., Viehland, D., Carazo, A.V., Ryu, J., Uchino, K.: High-power resonant measurements of piezoelectric materials: importance of elastic nonlinearities. *J. Appl. Phys.* 90, 1469–1479 (2001)

Toupin R A. A dynamical theory of elastic dielectrics. In/. *J. Eng. Sci.* 1 101-26, 1983.

Nelson D F. Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric crystals. *J. Acousr. Soc. Am.* 63 1738-48, 1978.

Tiersten H F. Electroelastic interactions and the piezoelectric equations. *J. Acoust. Soc. Am.* 70 1567-76, 1981.

Leadenham S, Erturk A. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation. *Non linear Dyn.* Volume 79, Issue 3, pp 1727-1743. 2014.

Mide Technology. <http://www.mide.com/>

G. Maugin, *Nonlinear Electromechanical Effects and Applications*. World Scientific, Singapore, 1985.

J. Yang, *Analysis of Piezoelectric Devices*. Springer, New York, 2005.

U. von Wagner and P. Hagendorn, *J. Sound Vib.* 256, 861 2002.

D. A. Wells, *Teoría y problemas de dinámica de Lagrange*, (1972) McGraw-Hill, México.

Nayfeh and Mook. *Nonlinear Oscillation*. Wiley, 1995.

Goldschmidtboeing, F., Eichhorn, C., Wischke, M., Kroener, M., Woias, P.: The influence of ferroelastic hysteresis on mechanically excited PZT cantilever beams. In: *Proceedings of the 11th International Workshop on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications*, pp. 114–117 (2011).

Damjanovic, D.: Hysteresis in piezoelectric and ferroelectric materials. *Sci. Hysteresis* 3, 337–465 (2005).

## APENDICE

Los momentos de inercia son:

$$I_p = \frac{1}{3} b_p h_p (3a^2 + 3ah_p + h_p^2)$$

$$I_{s1} = \frac{1}{3} b_s h_s (3a^2 - 3ah_s + h_s^2)$$

$$I_{s2} = \frac{1}{12} b_s h_s^3$$

$$a = \frac{-b_p c_{11p} h_p^2 + b_s c_{11s} h_s^2}{2(b_p c_{11p} h_p + b_s c_{11s} h_s)}$$

donde los subíndices  $s$  y  $p$  indican el material de aluminio y piezoeléctrico respectivamente. El subíndice  $n$  es indicativo que los coeficientes son no lineales.

Las siguientes ecuaciones se observan los coeficientes de acoplamiento lineal y no lineal, y la capacidad eléctrica.

$$J_p = \frac{1}{2} b_p e_{31} (2a + h_p)$$

$$J_{pn} = \frac{1}{3} b_p e_{311} (3a^2 + 3ah_p + h_p^2)$$

$$\theta = J_p \phi' [L_1]$$

$$\theta_n = -J_{pn} \int_0^{L_1} \phi'' [x]^2 dx$$

$$C_p = \frac{b_p L_1 \epsilon_{33}}{h_p}$$

Las siguientes ecuaciones se observan la rigidez lineal y no lineal.

$$k_p = c_{11p} I_p = \frac{1}{3} b_p c_{11p} h_p (3a^2 + 3ah_p + h_p^2)$$

$$k_{pn} = -\frac{1}{4} b_p c_{111p} h_p (2a + h_p) (2a^2 + 2ah_p + h_p^2)$$

$$k_{s1} = c_{11s} I_{s1} = \frac{1}{3} b_s c_{11s} h_s (3a^2 - 3ah_s + h_s^2)$$

$$k_{s2} = c_{11s} I_{s2} = \frac{1}{12} b_s c_{11s} h_s^3$$

$$k_{sp} = (k_p + k_{s1}) = c_{11p} I_p + c_{11s} I_{s1}$$

Las siguientes ecuaciones se observan las masas totales y modales.

$$m_p = \rho_p b_p h_p$$

$$m_s = \rho_s b_s h_s$$

$$m_{sp} = m_p + m_s$$

$$m_t = m_p L_1 + m_s (L_1 + L_2)$$

$$m = m_{sp} \int_0^{L_1} \phi[x]^2 dx + m_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi[x]^2 dx$$

donde la masa modal forzante es:

$$m_a = m_{sp} \int_0^{L_1} \phi[x] dx + m_s \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi[x] dx$$