

ESTUDIO NUMÉRICO PARA FLUJO 2-D DE UN FLUIDO MAGNETOREOLÓGICO

César D. Mesquida^{a,b}, Adriana Pernich^a

^a*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires 1400, Neuquén Capital,
Argentina*

^b*PROBIEN – CONICET, Buenos Aires 1400, Neuquén Capital (8300)
cesar.mesquida@fain.uncoma.edu.ar
adriana.pernich@fain.uncoma.edu.ar*

Palabras Clave: Magnetoreología, ecuación constitutiva, nanopartículas, viscosidad.

Resumen. El estudio de aplicaciones para fluidos magnetoreológicos (FMR) requiere el desarrollo de ecuaciones constitutivas para cada problema particular. En ese sentido, los autores de este trabajo utilizan la metodología de Dorfmann *et al.* (International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.42, 2007, p.381–390), la cual permite obtener expresiones no lineales y tridimensionales que relacionan tensión y deformación en un fluido magnético.

Obtenidas las ecuaciones de conservación, se presenta un esquema numérico para resolver un caso particular: flujo bidimensional de Poiseuille, viscoso, laminar y estacionario bajo un campo magnético. Haciendo uso de diversas simplificaciones y parámetros del material, se muestra el perfil de velocidades para diferentes valores del campo magnético aplicado.

1 INTRODUCCIÓN

Los fluidos magnetoreológicos (FMR) son fluidos compuestos por partículas micrométricas de material ferromagnético, las cuales son, generalmente, la fase discontinua de una emulsión oleosa u acuosa, según se trate. Otros elementos suelen incluirse en la preparación del fluido, como surfactantes, estabilizantes, etc. (ver Rosensweig, 1997; Holm and Weis, 2005; Hong *et al.*, 2006; Grunwald and Olabi, 2008).

Los FMR se comportan como fluidos newtonianos en ausencia de campo magnético pero, en presencia de éste, presentan un comportamiento viscoplástico semejante al modelo de Bingham generalizado, siendo su principal característica el presentar una tensión de fluencia τ_0 creciente de manera no lineal con el aumento de la intensidad del campo magnético externo aplicado. Esta cualidad puede aprovecharse con fines ingenieriles, como válvulas de control de caudal y presión, amortiguadores, frenos, interface entre dispositivos mecánicos y sistemas electrónicos, sellos, embragues, como portador de drogas y otras sustancias por el interior de organismos, pulido de lentes, etc., (Carlson *et al.*, 1995; Liu *et al.*, 2001; El Wahed *et al.*, 2002; Bajkowski *et al.*, 2008; Yazid *et al.*, 2014) y también artísticos.

El cambio en el comportamiento del FMR frente al campo magnético es el reflejo de la formación de estructuras en el interior del fluido. Estas estructuras se forman con partículas ferromagnéticas polarizadas y alineadas con el campo magnético externo. La dinámica de estas estructuras (geometrías, tiempos característicos, etapas de formación, sincronismo con el campo, etc.) es tema de estudio (ver Melle *et al.* (2000); Melle *et al.* (2001); Melle *et al.* (2003); **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** *et al.* (2005); López-López *et al.* (2006); Agustín-Serrano *et al.* (2013)).

Respecto del flujo, el FMR circulando por un conducto y en presencia de un campo magnético externo desarrolla un perfil de velocidad integrado por dos partes: una central de velocidad constante (flujo tapón) donde el fluido desarrolla tensiones de corte inferiores a la de fluencia y se comporta como un sólido elástico, y una parte exterior de fluido post-fluencia en contacto con las paredes, con comportamiento no newtoniano posible de ser descrito, por ejemplo, mediante alguna ley potencial. A medida que el campo magnético se incrementa, la región de flujo tapón también lo hace ocupando cada vez mayor parte de la sección y, en un caso límite, el flujo se detiene. Ver Figura 1.

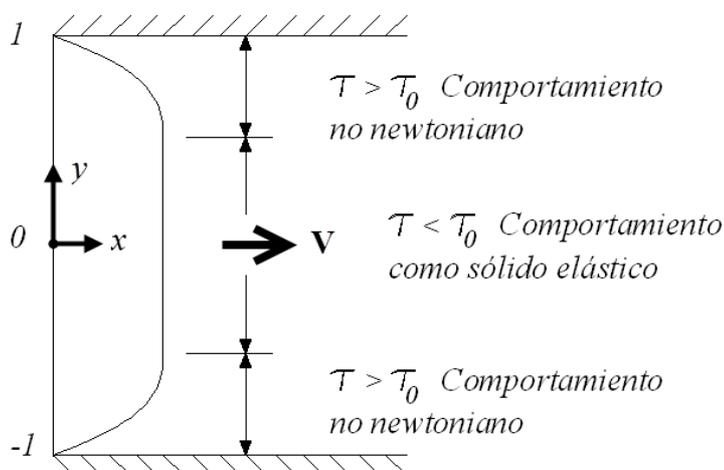


Figura 1. Perfil de velocidad característico de un FMR entre dos paredes con un gradiente de presión y en presencia de un campo magnético externo, contenido en el plano “y-z” del esquema.

2 OBJETIVOS

El presente trabajo describe el flujo de Poiseuille a través de una sección rectangular, con campo magnético contenido en el plano de la sección.

La ecuación constitutiva buscada es el tensor de tensiones de Cauchy τ para un material viscoso en régimen laminar y estacionario, en función del campo magnético inducido \mathbf{B} y del tensor de deformación D , es decir, $\tau = \mathfrak{f}(\mathbf{B}, D)$, Ec. (19).

Según Dorfmann *et al.* (2007), este tensor de tensiones depende de seis funciones escalares α las cuales dependen a su vez de seis invariantes I relacionados con la cinemática del flujo y el campo magnético aplicado.

Lo mismo se pretende respecto de la magnetización del fluido $\mathbf{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{B}, D)$, Ec. (24).

3 ECUACIONES

3.1 Ecuaciones cinemáticas

Considérese un volumen de fluido contenido en una región espacial euclidiana delimitada y en un instante t . Cada punto de este espacio puede individualizarse mediante un vector posición $\mathbf{r}(x, y, z)$ respecto de un sistema de coordenadas arbitrario. La velocidad del fluido en cada punto se representa mediante el vector $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Ver Figura 2.

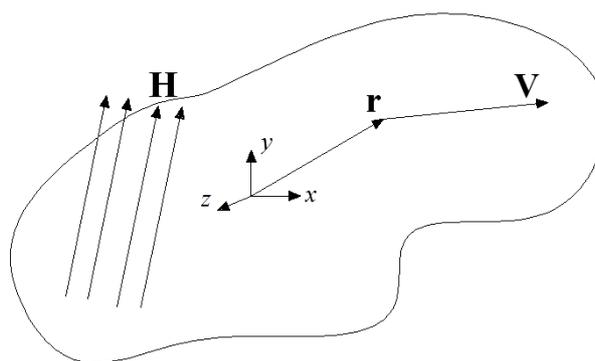


Figura 2. Dominio fluido.

De aquí en más, todo análisis será independiente del tiempo (flujo estacionario, campo magnético constante en el tiempo, etc.).

Otras cantidades cinemáticas a considerar son dos tensores de segundo orden: velocidad de deformación D y gradiente de velocidad L .

$$L = \nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

donde L^T es la matriz transpuesta de L .

3.2 Materiales magnéticos

De las ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

a saber, ecuación de Faraday (3), ecuación de Ampere (4), no existencia de monopolos magnéticos (5) y ecuación de Poisson (6), y despreciando la presencia de corrientes eléctricas, cargas libres y campos eléctricos, más la hipótesis de independencia del tiempo, el conjunto anterior se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Para la materia condensada, la magnetización \mathbf{M} del fluido, el campo magnético externo aplicado \mathbf{H} y el campo magnético inducido resultante \mathbf{B} en el fluido se relacionan de la siguiente manera, siendo todas estas variables función de la posición \mathbf{r} :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (9)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.

En el vacío,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (10)$$

Por lo que las ecuaciones de Maxwell en el vacío terminan siendo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (12)$$

Como ya se mencionó, \mathbf{B} será una variable independiente (esto es cómodo desde un punto de vista teórico, aunque no desde la experimentación), calculándose \mathbf{M} a través de una ecuación constitutiva y, finalmente, se despeja \mathbf{H} de (9).

3.3 Ecuaciones de Conservación

Bajo las consideraciones ya enunciadas, la ecuación de continuidad o conservación de la masa puede escribirse como

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0. \quad (13)$$

donde ρ es la densidad del fluido en el volumen y tiempo considerado y D/Dt es la derivada total o sustancial. Se ha considerado en la Ec. (13), además, que el fluido es homogéneo y por ende la densidad no varía en el espacio. Esto implica que el FMR es estable, es decir, es una emulsión (o coloide) cuyas propiedades no cambian en un lapso de tiempo suficientemente grande, según el empleo que se pretenda del mismo. Dicho de otra manera, para poder aplicar la Ec. (13) en un FMR debe, primero, estudiarse experimentalmente la sedimentación y redispersión del mismo (Agustín-Serrano, 2013; Holm 2005; López-López, 2006; Iglesias, 2012).

Sumando la hipótesis de fluido incompresible ($\rho = cte.$), resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 = tr(D). \quad (14)$$

Repitiendo la suposición de flujo estacionario y la no existencia de corrientes eléctricas (o bien las mismas son despreciables), se considerará, además, que el peso no será una fuerza relevante (no habrá sedimentación, flotación, ni separación de fases, por ejemplo). Por ende, la ecuación de cantidad de movimiento, en su forma tensorial, se reduce desde:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

hasta la forma reducida:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor total de tensiones de Cauchy.

Considerando que existe equilibrio respecto de la rotación, de la ecuación de conservación de momento angular se deduce que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T. \quad (16)$$

Como ya se mencionó, el objetivo es encontrar funciones constitutivas f y g que permitan expresar

$$\boldsymbol{\tau} = f(D, \mathbf{B}). \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = g(D, \mathbf{B}). \quad (18)$$

Siguiendo el trabajo de Dorfmann *et al.* (2007), puede reescribirse (17) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 D + \alpha_3 D^2 + \dots \\ & \dots + \alpha_4 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \alpha_5 [(D\mathbf{B}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes (D\mathbf{B})] + \alpha_6 \left[(D^2 \mathbf{B}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes (D^2 \mathbf{B}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

donde la función f ya ha sido encontrada y aparece mediante seis funciones escalares α_i para $i=1, 2, \dots, 6$. A su vez, estas funciones escalares dependen de los seis invariantes I_1, I_2, \dots, I_6 que surgen de los tensores D y $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$.

Los invariantes son:

$$I_1 = \text{tr}(D), \quad I_2 = \text{tr}(D^2), \quad I_3 = \text{tr}(D^3), \quad (20)$$

$$I_4 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \quad I_5 = (D\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}, \quad I_6 = (D^2\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}. \quad (21)$$

donde $\text{tr}(D)$ es la traza del tensor D .

Los coeficientes α caracterizan al material y pueden hallarse experimentalmente dado que los seis elementos del tensor τ (recordar que es simétrico) pueden medirse a través del flujo resultante de la imposición de D y \mathbf{B} .

Puede verse que τ depende de la deformación a través de I_1 , I_2 e I_3 , del campo magnético inducido a través de I_4 y del acoplamiento entre deformación y campo magnético a través de I_5 e I_6 .

Obtener los coeficientes α a través de la experimentación no es fácil, por lo que a veces resulta práctico simplificar la forma de la ecuación constitutiva en base a características generales de la respuesta del FMR.

Considerando fluidos incompresibles, Ec. (14), la ecuación constitutiva debiera ser de la forma

$$\tau = -pI + f(D, \mathbf{B}). \quad (22)$$

donde p es una presión hidrostática indeterminada (es el primer coeficiente α_1).

En otras palabras, dado que la presión es arbitraria, la primer función escalar α_1 deja de ser una incógnita bajo la hipótesis de flujo incompresible. Lo mismo pasa con el primer invariante, ahora conocido.

Respecto de la magnetización, la expresión buscada, como ya se mencionó, es de la forma

$$\mathbf{M} = g(D, \mathbf{B}). \quad (23)$$

Siguiendo a [Dorfmann et al. \(2007\)](#), la representación de la magnetización es

$$\mathbf{M} = (\phi_1 I + \phi_2 D + \phi_3 D^2) \mathbf{B}. \quad (24)$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son funciones escalares dependientes de los seis invariantes I_1, \dots, I_6 y donde I es la matriz identidad. Una adecuada selección de las funciones constitutivas ϕ permite representar una amplia variedad de fenómenos.

El modelo constitutivo presentado hasta este punto provee un marco general en el cual modelos particulares pueden ser evaluados.

3.4 Condiciones de borde

Para cada problema en particular deben imponerse condiciones de borde adecuadas para \mathbf{B} , \mathbf{H} , D , τ y \mathbf{V} ; para todos o algunos de ellos.

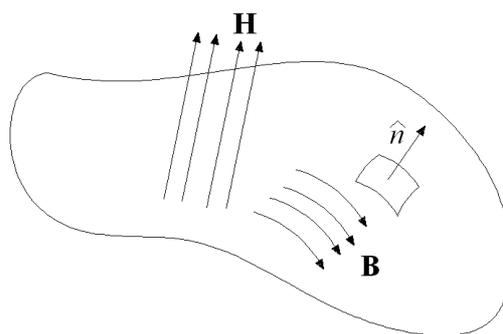


Figura 3. Campos magnéticos, exterior aplicado \mathbf{H} e inducido en el fluido \mathbf{B} , sobre la superficie del dominio considerado.

Sobre la superficie del volumen fluido considerado, \mathbf{B} y \mathbf{H} deben satisfacer las siguientes condiciones de discontinuidad, considerando inexistencia de corrientes de superficie,

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (25)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie del volumen considerado, en sentido saliente. Es decir, el campo inducido \mathbf{B} es paralelo a la discontinuidad y el campo externo aplicado \mathbf{H} es normal a la misma (ver Figura 3). Tener presente que (25) y (26) aplican exclusivamente sobre la discontinuidad.

Otra posible condición es la de no deslizamiento sobre alguna pared, para lo cual se cumple

$$\mathbf{V} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la pared (ver Figura 4).

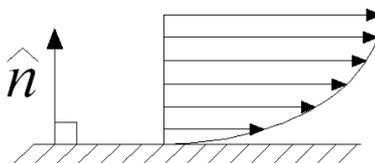


Figura 4. Perfil de velocidad sobre una pared, sin deslizamiento.

La condición de continuidad para el tensor total de tensiones a través de la superficie del volumen considerado es

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (28)$$

4 FLUJO 2-D DE POISEUILLE CON CAMPO MAGNÉTICO TRANSVERSAL

A continuación se estudiará un problema de flujo de un fluido magnetoreológico movilizado por un gradiente de presiones según el eje x , a través de una sección rectangular (plano y - z) con campo magnético constante y unidireccional contenido en el plano y - z . El problema es bidimensional, siendo las variables independientes las coordenadas y ($-b \leq y \leq b$) y z ($0 \leq z \leq a$), tal como se presenta en la Figura 5. Para evitar la tercer variable x , se supondrá al conducto con una longitud infinita ($L = \infty$), es decir, se despreciarán los efectos de extremo del dominio físico. Al fluido se lo considerará incompresible ($\rho = cte$). Se supondrá flujo laminar, por lo que el vector velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{u}(x, y, z), \mathbf{v}(x, y, z), \mathbf{w}(x, y, z))$ sólo constará de una única componente vectorial, a saber, $\mathbf{u}(y, z)$

Las condiciones de borde a respetar son:

1. $u(-b, z) = u(b, z) = u(y, a) = 0$. Condiciones de no deslizamiento.
2. $\frac{\partial u}{\partial z}(y = 0) = 0$. Condición de simetría.

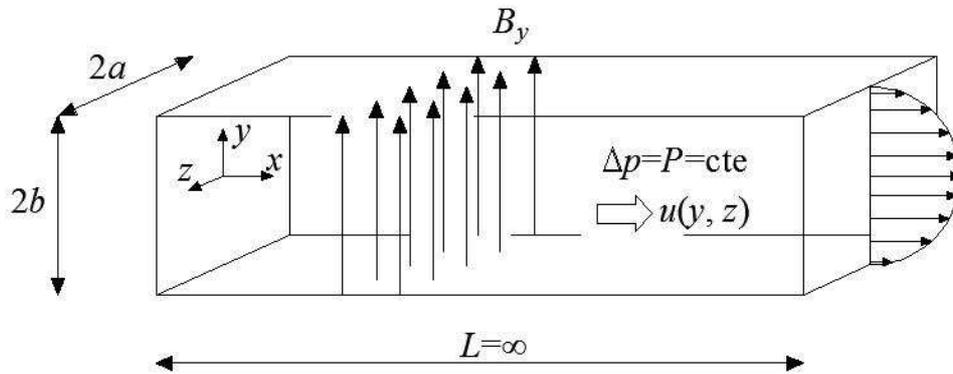


Figura 5. Problema de flujo 2-D a resolver, con campo magnético.

4.1 Ecuaciones

Durante el experimento de flujo de Poiseuille con campo magnético transversal \mathbf{H} se espera que haya un campo magnético inducido \mathbf{B} con componentes longitudinal y transversal, es decir,

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z). \quad (29)$$

Si este campo \mathbf{H} no se logra con perfecta simetría, el campo externo puede tener una componente longitudinal,

$$\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0). \quad (30)$$

Por ende, las ecuaciones de Maxwell (7) y (8) en coordenadas rectangulares resultan:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (31)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \hat{k} = 0. \quad (32)$$

Se busca ahora el tensor velocidad de deformación D . Se considerará velocidad longitudinal sólo dependiente de los ejes z e y ,

$$\mathbf{V} = (\mathbf{u}(y, z), 0, 0). \quad (33)$$

Por lo que

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

También, de manera simplificada,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (36)$$

Conocidos D , Ec.(35) y \mathbf{B} , Ec. (29), se desarrolla \mathbf{M} , Ec.(24):

$$M_x = B_x [\phi_1 + \phi_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] + B_y \phi_2 \gamma_1. \quad (37)$$

$$M_y = B_x \phi_2 \gamma_1 + B_y (\phi_1 + \phi_3 \gamma_1^2). \quad (38)$$

$$M_z = 0. \quad (39)$$

Si se utiliza el campo inducido \mathbf{B} como variable independiente (esto no es una restricción), pueden obtenerse las ecuaciones de magnetización \mathbf{M} del material, Ec. (37), (38) y (39), y luego el campo magnético externo necesario para lograr este efecto, recurriendo a (9):

$$B_x = \frac{\mu_0 \phi_2}{1 - \mu_0 [\phi_1 + \phi_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]} \gamma_1 B_y. \quad (40)$$

$$H_y = \frac{B_y [1 - \mu_0 (\phi_1 + \phi_3 \gamma_1^2)] - \mu_0 B_x \phi_2 \gamma_1}{\mu_0}. \quad (41)$$

$$B_z = 0. \quad (42)$$

A continuación, se determinan los invariantes, Ec. (20) y (21):

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \quad I_3 = 0, \quad (43)$$

$$I_4 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \quad I_5 = 2B_x (\gamma_1 B_y + \gamma_2 B_z), \quad (44)$$

$$I_6 = B_x^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + B_y^2 \gamma_1^2 + B_z^2 \gamma_2^2 + 2B_x B_z \gamma_1 \gamma_2.$$

4.2 Condiciones de borde

Fuera del fluido (donde no hay materia magnetizable), las componentes del campo magnético inducido B_x y B_z son nulas y por H_x y H_z también. Por continuidad, H_x y H_z son nulas en las paredes, por lo que finalmente se deduce:

$$\mathbf{H} = (0, H_y(y), 0). \quad (45)$$

Fuera del fluido, la ecuación de inducción magnética (9) es:

$$B_x = 0. \quad (46)$$

$$B_y = \mu_0 H_y. \quad (47)$$

$$B_z = 0. \quad (48)$$

En el contorno, los valores de \mathbf{B} son los mismos, por continuidad, que en el exterior, por lo que la ecuación de no existencia de monopolos conduce a $B_y = cte$, condición que se sigue sosteniendo en el interior, es decir, en el fluido.

Finalmente, recordando las ecuaciones de campo inducido (9) y de magnetización del material (24) y aplicando las condiciones: $H_y = cte$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ y la forma $B_y = cte$, se justifican las ecuaciones (40) y (41).

Los coeficientes ϕ son constantes (en rigor, dependen de \mathbf{B}), por lo que impuesto \mathbf{H} las incógnitas son \mathbf{B} y γ .

4.3 Ecuación de cantidad de movimiento

Ahora, se desarrolla (19) y (22), bajo la hipótesis de que los coeficientes α y ϕ son constantes, y que α_5 y α_6 son nulos, por simplicidad:

$$\tau_{xx} = -p + \alpha_3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \alpha_4 B_x^2. \quad (49)$$

$$\tau_{xy} = \alpha_2 \gamma_1 + \alpha_4 B_x B_y. \quad (50)$$

$$\tau_{xz} = \alpha_2 \gamma_2. \quad (51)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}. \quad (52)$$

$$\tau_{yy} = -p + \alpha_3 \gamma_1^2 + \alpha_4 B_y^2. \quad (53)$$

$$\tau_{yz} = \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2. \quad (54)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (55)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (56)$$

$$\tau_{zz} = -p + \alpha_3 \gamma_2^2. \quad (57)$$

O bien,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Bajo la suposición de que $B_x = B_x(y, z)$ se concluye que los invariantes, y por ende los coeficientes α y ϕ , son función de z y de y . Por ende, el problema se vuelve bidimensional.

Bajo estas consideraciones, se desarrolla la ecuación de cantidad de movimiento $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, lo que conduce a tres ecuaciones escalares, Ec. (59), (60) y (61):

$$P + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0. \quad (59)$$

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0. \quad (60)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (61)$$

donde P es el gradiente de presión (negativo) constante que genera el flujo, según x .

Reemplazando (40) en (59) y definiendo:

$$\widehat{\phi} = \frac{\mu_0 \phi_2}{1 - \mu_0 [\phi_1 + \phi_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]} \approx cte,$$

se llega a:

$$\tau_{xy} = \gamma_1 (\alpha_2 + \alpha_4 \widehat{\phi} B_y^2). \quad (62)$$

Luego,

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_4 \widehat{\phi} B_y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (63)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (64)$$

Por lo que la ecuación de movimiento (59) con la relación entre tensiones y deformaciones incluida es:

$$\boxed{\frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_4 \widehat{\phi} B_y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -P.} \quad (65)$$

Obsérvese que cuando \mathbf{H} es nulo, obviamente \mathbf{B} también y la ecuación de movimiento resulta en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2P}{\alpha_2}. \quad (66)$$

Cuya solución analítica es la conocida solución de Poiseuille para fluidos newtonianos, donde α_2 es la viscosidad de corte del fluido, más conocida como μ .

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA

La Ec. (65) a resolver es una ecuación diferencial a derivadas parciales, no homogénea, de segundo orden y primer grado, con coeficientes constantes.

Se trabajó con diferencias finitas y para las derivadas segundas contenidas en Ec (65) se propuso un esquema centrado con error de segundo orden, lo cual resultó en la Ec. (67):

$$\frac{(\Delta z)^2}{2} (\alpha_2 + \alpha_4 \widehat{\phi} B_y^2) (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \frac{\alpha_2 (\Delta y)^2}{2} (u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) = -P(\Delta y)^2 (\Delta z)^2. \quad (67)$$

A continuación se presentan, a modo ilustrativo, los resultados para una geometría cuadrada, $a=h$. Los valores adoptados fueron:

- $\alpha_2 = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
- $\alpha_4 = 0,5 \text{ Pa}\cdot\text{T}^{-2}$
- $\hat{\phi} = 1 \text{ s}$
- $P = 500 \text{ Pa}\cdot\text{m}^{-1}$

La malla consta de 2520 nodos y, para esa discretización, no se observan diferencias importantes en los resultados respecto de una malla más densa.

La Figura 6 presenta el mallado planteado, con el plano y - z como base del gráfico. La altura del mismo es representativa de la magnitud de la velocidad, la cual también se refleja en los colores.

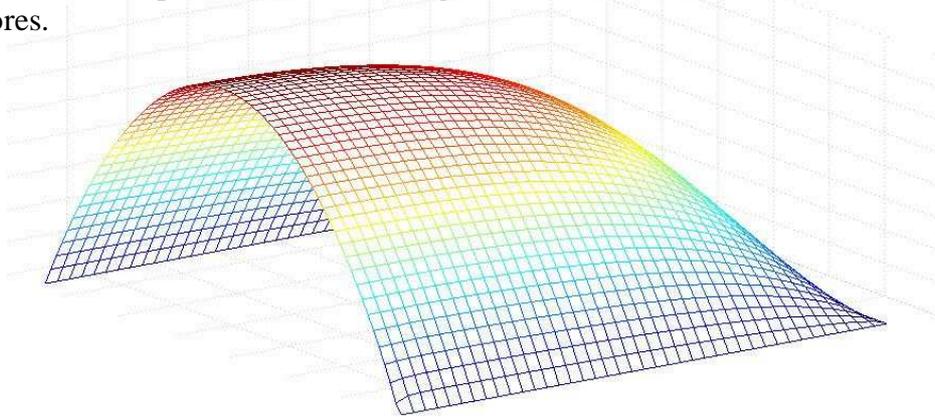


Figura 6. Malla y resultados para el problema resuelto. $B=1 \text{ T}$.

La Figura 7 muestra el campo de velocidades para el mismo problema, en la sección y - z , para el eje vertical $-b \leq y \leq b$ y el eje horizontal $0 \leq z \leq a$.

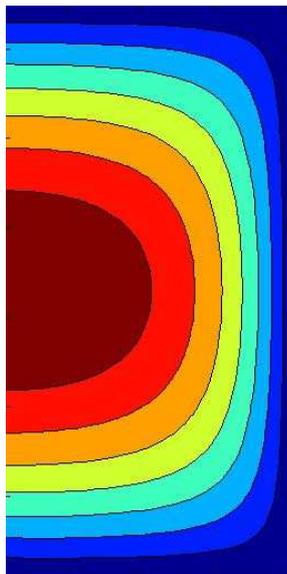
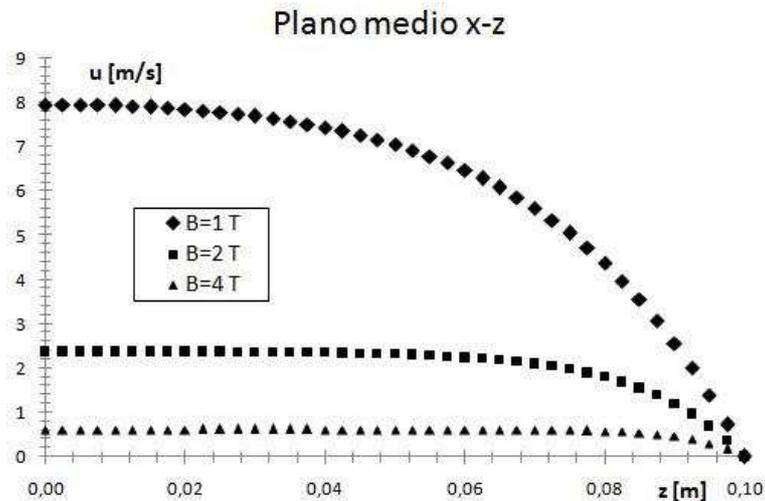
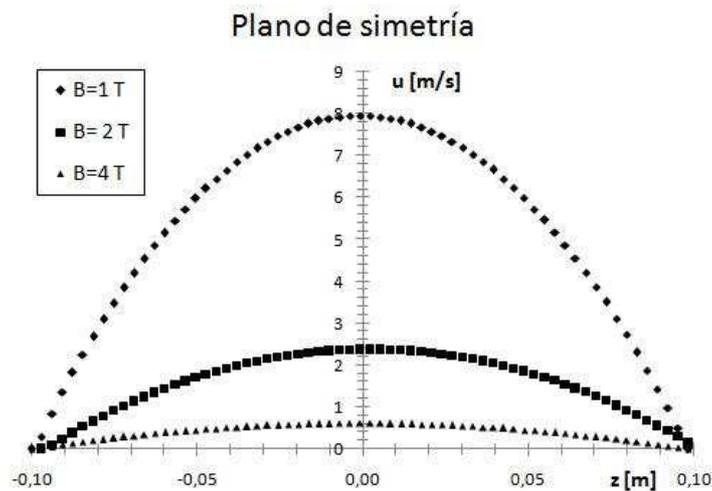


Figura 7. Campo de velocidades para el problema resuelto. $B=1 \text{ T}$.

La Figura 8 presenta el perfil de velocidad medido sobre el plano medio ($y=0$) para distintos valores del campo \mathbf{B} .



La Figura 9 presenta el perfil de velocidad medido sobre el plano de simetría ($z=0$) para distintos valores del campo \mathbf{B} . En cualquier caso, las condiciones de borde son siempre respetadas.



6 CONCLUSIONES

Los dispositivos magnetoreológicos desarrollados y presentes en la bibliografía (Carlson *et al.* (1995), Bajkowski *et al.* (2008), Yazid *et al.* (2014), etc.) son del tipo flujo de Poiseuille con campo magnético en sentido longitudinal o transversal al flujo, flujo de Couette circunferencial con campo magnético longitudinal o circunferencial, y estrujamiento o *squeeze*. No se han encontrado simulaciones numéricas para la sección normal al flujo en la bibliografía estudiada, por lo cual este trabajo puede ampliar el conocimiento a la fecha, especialmente al poder modificar la geometría y otros parámetros de flujo y del fluido.

La metodología propuesta por Dorfmann *et al.* (2007) es muy interesante dado que permite hallar de manera sencilla las relaciones constitutivas para el flujo en estudio. Su mayor desventaja, a criterio de estos autores, es que resulta en la existencia de muchas constantes (los α y ϕ) que deben obtenerse experimentalmente, lo cual es muy complejo. En rigor, esas constantes no son tal cosa, dado que dependen, a través de los invariantes, del campo

magnético y del flujo.

Respecto de los resultados, se aprecia el flujo tapón y el decremento en la magnitud de la velocidad a medida que el campo magnético aumenta, resultando en perfiles más aplanados y pequeños para mayores B . Esto refleja el efecto magnetoviscoso del fenómeno, tal lo esperado.

REFERENCIAS

- Agustín-Serrano, R., Donado, F., Rubio-Rosas, E., Magnetorheological fluid based on submicrometric silica-coated magnetite particles under an oscillatory magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 335, 149–158, 2013.
- Bajkowski, J., Nachman, J., Shillor, M., Sofonea, M., A model for a magnetorheological damper. *Mathematical and Computer Modelling* 48: 56–68, 2008.
- Carlson, J. D., Catanzarite, D. M., St. Clair, K. A., Lord Corporation, Commercial magnetorheological fluid devices. *5th Int. Conf. on Electro-Rheological, Magneto-Rheological Suspensions and Associated Technology*, Sheffield, 10-14, July 1995.
- Dorfmann, A., Ogden, R. W., Wineman, A. S., A three-dimensional non-linear constitutive law for magnetorheological fluids, with applications. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42: 381 – 390, 2007.
- El Wahed, A. K., Sproston, J. L., Schleyer, G. K., Electrorheological and magnetorheological fluids in blast resistant design applications. *Materials and Design* 23: 391–404, 2002.
- Grunwald, A., Olabi, A.G., Design of magneto-rheological (MR) valve. *Sensors and Actuators A* 148: 211–223, 2008.
- Holm, C., and Weis, J.J., The structure of ferrofluids: a status report. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 10: 133-140, 2005.
- Hong, R. Y., Zhang, S. Z., Han, Y. P., Li, H. Z., Ding, J. and Zheng, Y., Preparation, characterization and application of bilayer surfactant-stabilized ferrofluids. *Powder Technology*, 170: 1–11, 2006.
- Iglesias, G. R., López-López, M. T., Durán, J. D. G., González-Caballero, F. , Delgado, A. V., Dynamic characterization of extremely bidisperse magnetorheological fluids. *Journal of Colloid and Interface Science* 377, 153–159, 2012.
- Liu, J., Flores, G. A., Sheng, R., In-vitro investigation of blood embolization in cancer treatment using magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 225: 209-217, 2001.
- López-López, M. T., Zugaldía, A., González-Caballero, F. J., Durán, D. G., Sedimentation and redispersion phenomena in iron-based magnetorheological fluids. *Journal of Rheology* 50(4), 543-560, 2006, The Society of Rheology.
- Melle, S., Fuller, G. G., Rubio, M. A., Structure and dynamics of magnetorheological fluids in rotating magnetic fields. *Physical Review E* 61, Number 4, 2000.
- Melle, S., Rubio, M. A., Fuller, G. G., Orientation dynamics of magnetorheological fluids subject to rotating external fields, *International Journal of Modern Physics B*, 15, 2001.
- Melle, S., Calderón, O. G., Rubio, M. A., Fuller, G. G., Microstructure evolution in magnetorheological suspensions governed by Mason number. *Physical Review E* 68, 2003.
- Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, 1997, ISBN 0-486-67834-2 (pbk.).
- Yazid, I. I. M., Mazlan, S. A., T. Kikuchi., H. Zamzuri, F. Imaduddin, Design of magnetorheological damper with a combination of shear and squeeze modes. *Materials and Design* 54: 87–95, 2014.