

CONTROL ÓPTIMO DE VERTIDOS INDUSTRIALES O URBANOS EN ESTUARIOS DOMINADOS POR MAREAS

Víctor H. Cortinez^{a,b,c}, Cecilia I. Stoklas^a y Patricia N. Dominguez^{a,b}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar, stoklas@frbb.utn.edu.ar*

^b *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.*

Palabras Claves: Modelo Hidrodinámico, Método de Perturbación, Formulación Adjunta del Modelo de Transporte, Diseño Óptimo, MEF.

Resumen. En este trabajo se propone un modelo matemático para la determinación óptima de los factores de reducción de las tasas de vertido de efluentes urbanos o industriales en estuarios dominados por marea (condiciones hidrodinámicas periódicas). Se pretende que la concentración de contaminantes en zonas protegidas dentro del estuario no supere ciertos valores admisibles y, asimismo, se busca minimizar los costos económicos asociados con la depuración. Como problema de diseño alternativo se analiza aquel que persigue minimizar la concentración de contaminantes en dichas zonas protegidas, considerando el costo económico como restricción. El objetivo en este caso es la minimización del impacto ambiental. El modelo matemático se basa en la solución de las ecuaciones hidrodinámicas y de dispersión mediante el método de Elementos Finitos. Para disminuir el costo computacional relacionado a la evaluación de las funciones objetivo y restricciones, se plantea una ecuación adjunta del problema de dispersión. El modelo de simulación se combina con una técnica de optimización aleatoria a los efectos de obtener las tasas óptimas de descarga. Se efectúa el desarrollo teórico y se presentan algunos ejemplos numéricos para poner de manifiesto la eficiencia del enfoque propuesto.

1 INTRODUCCIÓN

La contaminación provocada por la descarga de efluentes urbanos o industriales en estuarios puede alcanzar niveles inadmisibles en zonas predeterminadas de resguardo ambiental tales como zonas de pesca, recreación, reservas naturales, etc.

A los efectos de no superar las restricciones ambientales en las zonas aludidas, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido mediante la instalación de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Sin embargo la construcción y operación de éstas implica un elevado costo que depende básicamente de las variables de diseño de mayor importancia, debiéndose adoptar una solución de compromiso técnico, económico y ambiental en su diseño ([Álvarez Vázquez et al. 2005](#); [Yandamuri et al. 2006](#); [Liren et al. 2005](#)).

Una metodología adecuada se basa en la utilización del concepto de optimización. Éste consiste en la definición de una función objetivo que debe ser minimizada o maximizada, asociada a restricciones que debe verificar el diseño propuesto. Por ejemplo, la función objetivo puede ser el costo económico de la operación de la planta de depuración, el cual debe ser minimizado, y la restricción asociada puede venir dada por la imposición de que la concentración de contaminantes considerados no supere valores admisibles en zonas seleccionadas dentro del cuerpo de agua ([Stoklas y Cortínez, 2011](#)).

En este trabajo se propone un modelo matemático para la determinación óptima de los factores de reducción de las tasas de vertido de efluentes urbanos o industriales en estuarios. Tales factores corresponden al grado de depuración del agua residual. Se pretende que la concentración media temporal de contaminantes en zonas protegidas dentro del estuario no supere ciertos valores admisibles. Asimismo se busca minimizar los costos económicos asociados con la depuración.

Como problema de diseño alternativo se analiza aquel que persigue minimizar la concentración de contaminantes en dichas zonas protegidas. Es decir, el objetivo en este caso es la minimización del impacto ambiental.

Para formular tal modelo se hace uso del método de elementos finitos a los efectos de resolver el problema de transporte (hidrodinámico y de dispersión). Para el problema hidrodinámico se realiza una aproximación basada en el método de perturbación que permiten formular el problema de naturaleza no lineal como dos problemas consecutivos lineales. Por otra parte, haciendo uso de la naturaleza periódica de la marea las ecuaciones hidrodinámicas pueden independizarse de la variable temporal.

El modelo de simulación se acopla a un método de optimización matemática con miras a lograr la determinación de las variables de diseño. Considerando el importante grado de carga computacional necesario para desarrollar esta tarea, se propone también un segundo enfoque basado en la utilización del denominado problema adjunto de transporte que resulta ser considerablemente efectivo para una clase restringida de problemas de diseño.

El enfoque propuesto es similar al desarrollado en ([Álvarez Vazquez et al. 2005](#)), excepto que aquí se tiene especialmente en cuenta el carácter periódico del problema.

Los modelos computacionales propuestos se implementan en el programa de Elementos Finitos ([FlexPDE, 2015](#)) en combinación con el ambiente de programación ([Matlab, 2010](#)).

En la sección 2 se presenta la formulación matemática del problema de transporte de contaminantes, en la sección 3 el modelo adjunto de dispersión, en la sección 4 se formula el problema de diseño óptimo desde tres puntos de vista. La sección 5 expone los ejemplos numéricos realizados que ponen en evidencia la efectividad de la metodología propuesta. Finalmente, las conclusiones se expresan en la sección 6.

2 MODELO TEÓRICO

Se considera un estuario al cual descargan efluentes urbanos a través de emisarios submarinos provenientes de sendas plantas de depuración.

Se pretende proteger, desde el punto de vista ambiental, ciertas zonas dentro del estuario que pueden tener especial interés desde el punto de vista recreativo, económico o ecológico (Figura 1). Consecuentemente, la concentración de contaminantes en dichas áreas protegidas debe estar por debajo de valores admisibles.

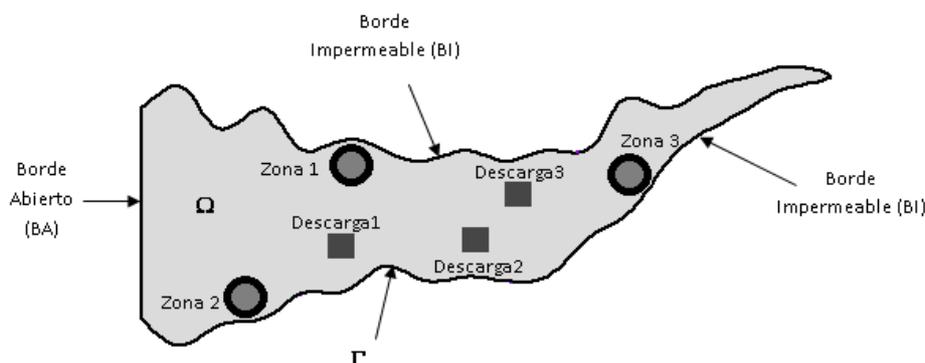


Figura 1: Estuario bajo análisis.

Para conocer los niveles de concentración se formula a continuación el problema de transporte que permite relacionar tales magnitudes con las corrientes y con las descargas de efluentes.

El problema consiste en la formulación de dos modelos: el hidrodinámico, para obtener las velocidades de la corriente, y el de dispersión, que permite determinar las concentraciones a partir del conocimiento de las corrientes.

2.1 Modelo Hidrodinámico

Los procesos dinámicos costeros pueden ser formulados mediante las siguientes ecuaciones de aguas poco profundas 2D que surgen a partir de la integración en la vertical de las ecuaciones de Navier – Stokes:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (H + \eta)U}{\partial x} + \frac{\partial (H + \eta)V}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{C_D U |\mathbf{V}|}{H + \eta}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{C_D V |\mathbf{V}|}{H + \eta}, \quad (3)$$

donde η es la elevación en la superficie libre, U y V corresponden a las velocidades verticalmente promediadas en las direcciones de x e y respectivamente, H la profundidad, g la aceleración de la gravedad, f el factor de Coriolis, C_D un coeficiente de arrastre y $|\mathbf{V}|$ la magnitud de la velocidad horizontal.

Para muchos estuarios la relación η/H es pequeña, lo que permite, después de desarrollar

los coeficientes de fricción en series de Taylor, expresar el sistema anterior de la siguiente manera (Li y O'Donnell, 1997):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(H + \eta)U}{\partial x} + \frac{\partial(H + \eta)V}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{B}{H} U + \frac{B}{H^2} U \eta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{B}{H} V + \frac{B}{H^2} V \eta, \quad (6)$$

donde B es un coeficiente de fricción que se expresa como:

$$B = \frac{8C_D |U_c|}{3\pi}, \quad (7)$$

siendo U_c la amplitud de la velocidad característica en el estuario, por ejemplo la velocidad en la boca del estuario.

El sistema (4-6) debe ser resuelto conjuntamente con las siguientes condiciones de borde: la velocidad normal a los bordes impermeables es nula ($U_n = 0$) y en el borde abierto la elevación de la marea se conoce, es decir $\eta = \eta_{ext}$.

2.2 Método de perturbación

Considerando un estuario para el cual se cumple la siguiente relación:

$$e = \frac{\eta_c}{H_c} \ll 1, \quad (8)$$

donde η_c y H_c son valores característicos de la elevación y la profundidad respectivamente, es posible aproximar la solución del sistema (4-6) de la siguiente manera:

$$\eta^* = \eta_0 + \eta_1, \quad U^* = U_0 + U_1 \quad \text{y} \quad V^* = V_0 + V_1, \quad (9)$$

donde los términos con subíndice cero se suponen del orden de e (8) y los que tienen subíndice uno, del orden de e^2 , es decir constituyen una corrección respecto a los primeros. Sustituyendo estas expresiones en (4-6) y separándolas de acuerdo al orden de magnitud, siguiendo el método de perturbación, se obtienen dos sistemas de ecuaciones que deben ser resueltos en forma consecutiva. En el primero, las incógnitas vienen dadas por η_0 , U_0 y V_0 , y en el segundo (aproximación de segundo orden) η_1 , U_1 y V_1 respectivamente. También es posible reexpresar las ecuaciones mencionadas de manera tal que el sistema de orden uno se mantenga de la misma manera y que el segundo sistema tenga como incógnitas a η^* , U^* y V^* (ecuación 9), lo que se logra sumando las expresiones de primer y segundo orden. De esta manera se llega al siguiente sistema:

Primera aproximación:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - B \frac{U_0}{H} \quad , \quad (11)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - B \frac{V_0}{H} \quad . \quad (12)$$

Segunda aproximación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) = HU_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) + HV_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial y} \right) \quad , \quad (13) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} (U_0 \eta_0) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} (V_0 \eta_0) \right) - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} - \frac{\partial^2 (\eta_0 U_0)}{\partial t \partial x} \\ & - \frac{\partial^2 (\eta_0 V_0)}{\partial t \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (fHV_0) + \frac{\partial}{\partial y} (fHU_0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + B \frac{U^*}{H} = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + B \frac{U_0 \eta_0}{H^2} + fV_0 \quad , \quad (14)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial y} + B \frac{V^*}{H} = -U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + B \frac{V_0 \eta_0}{H^2} - fU_0 \quad , \quad (15)$$

donde las correspondientes ecuaciones de continuidad fueron sustituidas por ecuaciones de onda con la ayuda de las ecuaciones de movimiento (11, 12 y 14, 15). Así expresadas deben resolverse en forma sucesiva la primera aproximación dada por el sistema (10-12) y a continuación la segunda aproximación dada por (13-15). También se aplica el método de perturbación sobre las condiciones de borde del problema. Debe observarse que los sistemas así obtenidos son lineales.

Si el estuario considerado es forzado en la boca por una marea semidiurna ($\eta_{ext} = \bar{\eta} \cos(\omega t)$) la solución de los sistemas anteriores puede ser expresada en componentes trigonométricas de la siguiente manera:

$$\eta_0 = \eta_c \cos \omega t + \eta_s \sin \omega t \quad , \quad (16)$$

$$U_0 = U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t \quad , \quad (17)$$

$$V_0 = V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t \quad , \quad (18)$$

$$\eta^* = \eta_{00}^* + \eta_{1c}^* \cos \omega t + \eta_{1s}^* \sin \omega t + \eta_{2c}^* \cos 2\omega t + \eta_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (19)$$

$$U^* = U_{00}^* + U_{1c}^* \cos \omega t + U_{1s}^* \sin \omega t + U_{2c}^* \cos 2\omega t + U_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (20)$$

$$V^* = V_{00}^* + V_{1c}^* \cos \omega t + V_{1s}^* \sin \omega t + V_{2c}^* \cos 2\omega t + V_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (21)$$

donde $\eta_c, \eta_s, U_c, U_s, V_c, V_s, \eta_{00}^*, \eta_{1c}^*, \eta_{1s}^*, \eta_{2c}^*, \eta_{2s}^*, U_{00}^*, U_{1c}^*, U_{1s}^*, U_{2c}^*, U_{2s}^*, V_{00}^*, V_{1c}^*, V_{1s}^*, V_{2c}^*$ y V_{2s}^* son funciones de (x,y) . Debe observarse en las expresiones (19) a (21) que tanto la elevación y las corrientes determinadas por este enfoque presentan las componentes en la frecuencia de excitación y también, debido a efectos no lineales, componentes en el doble de esta frecuencia así como términos.

Sustituyendo las expresiones (16-21) en (10-15) junto a las correspondientes condiciones de borde, y anulando cada componente trigonométrica de la expresión resultante, se obtienen dos sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas independientes del tiempo que permiten obtener las amplitudes de elevación y velocidad. En este trabajo, tal sistema es resuelto mediante el método de los Elementos Finitos.

2.3 Modelo de dispersión de contaminantes

La evolución de la concentración de una sustancia en el estuario se puede modelar mediante el siguiente sistema:

$$\frac{\partial(CH)}{\partial t} + \frac{\partial(CHU)}{\partial x} + \frac{\partial(CHV)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(KH \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(KH \frac{\partial C}{\partial y} \right) + C\sigma H = m(x, y, t) \quad , \quad (22)$$

$$-KH \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad C|_{BA} = C^0 \quad C(x, y, 0) = 0 \quad , \quad (23)$$

donde C es la concentración media promediada en la vertical, K el coeficiente de dispersión que en general se obtiene empíricamente y C^0 corresponde a la concentración en mar abierto. U y V son las velocidades horizontales promediadas en la vertical, que en este caso adoptan las expresiones (20-21). La ecuación (22) constituye la ecuación de dispersión bidimensional (Stoklas y Cortínez, 2011).

3 MODELO ADJUNTO DE DISPERSIÓN

Una magnitud de gran interés en el problema analizado corresponde a la concentración media espacial y temporal para cada una de las zonas protegidas. Es posible determinar tales valores, de manera conveniente en el contexto de un procedimiento de optimización, utilizando el denominado modelo adjunto de dispersión. Éste se obtiene como se explica a continuación.

Se multiplica la ecuación (22) por una función arbitraria G y luego se integra con respecto al dominio del estuario y al tiempo de análisis llegando a la siguiente expresión:

$$\int_0^{T_f} \int_{\Omega} G(x, y, t) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial(UHC)}{\partial x} + \frac{\partial(VHC)}{\partial y} - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(KH \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(KH \frac{\partial C}{\partial y} \right) + H\sigma C - m(x, y, t) \end{array} \right) d\Omega dt = 0 \quad . \quad (24)$$

Integrando por partes dicha expresión se llega a:

$$\int_0^{T_f} \int_{\Omega} C \left(-H \frac{\partial G}{\partial t} - \left(UH \frac{\partial G}{\partial x} + VH \frac{\partial G}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(HK \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HK \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) + GH\sigma \right) d\Omega dt = \int_0^{T_f} \int_{\Omega} Gmd\Omega dt + \int_{\Omega} (HCG) \Big|_{t=0}^{t=T_f} d\Omega - \int_0^{T_f} \int_{\Gamma} \left(GHCV_n + KH \frac{\partial G}{\partial n} C - GKH \frac{\partial C}{\partial n} \right) d\Gamma dt \quad (25)$$

A partir de la expresión anterior puede obtenerse la concentración media temporal espacial en la zona protegida *i*-ésima de la siguiente manera:

$$\bar{C}_i = \int_0^{T_f} \int_{\Omega} G_i md\Omega dt \quad , \quad (26)$$

para lo cual se ha requerido que *G* (o *G_i* para la zona *i*), conocida como función de influencia, verifique el siguiente sistema:

$$-H \frac{\partial G_i}{\partial t} - UH \frac{\partial G_i}{\partial x} - VH \frac{\partial G_i}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(HK \frac{\partial G_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(HK \frac{\partial G_i}{\partial y} \right) + G_i H\sigma = P_i(x, y) \quad , \quad (27)$$

$$P_i = \begin{cases} \frac{1}{(T_f - \tau)\Omega_i} & \text{Si } (x, y) \in \Omega_i \\ & t \in (\tau, T_f) \\ 0 & \text{Si } (x, y) \notin \Omega_i \\ & t \notin (\tau, T_f) \end{cases} \quad , \quad (28)$$

$$G_i(x, y, T_f) = 0 \quad . \quad (29)$$

Debe observarse que la concentración media se ha definido de la siguiente manera:

$$\bar{C}_i = \frac{\int_{\tau}^{T_f} \int_{\Omega_i} Cd\Omega_i dt}{(T - \tau)\Omega_i} \quad , \quad (30)$$

donde τ corresponde al tiempo en el cual se ha alcanzado la oscilación estacionaria y Ω_i es el área de la zona protegida *i*-ésima.

Si se supone que la descarga másica distribuida se da como la suma de las contribuciones debidas a *ND* zonas de descarga y que en cada una de ellas las descargas son constantes espacialmente, es posible llegar a la siguiente expresión para la concentración en las zonas protegidas:

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{ND} \int_0^{T_f} M_j(t) g_{ij}(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad , \quad (31)$$

donde

$$M_j(t) = m_j(t)A_j$$

$$g_{ij} = \int_{A_j} G_i(x, y, t) dA_j / A_j \quad . \quad (32)$$

4 PROBLEMAS DE DISEÑO ÓPTIMO

Se considera la situación en la cual existen 3 emisarios submarinos descargando

efluentes con tasas de flujo másico M_j ($j=1, 2, 3$) respectivamente. Con tales valores, las concentraciones medias temporales en un ciclo de marea superan los valores admisibles establecidos por lo que debe reducirse la carga contaminante mediante la construcción de plantas de depuración. Es posible establecer el grado de depuración de cada planta a partir de coeficientes de reducción β_j (>0), de manera tal que la descarga efectiva en los emisarios sea $\beta_j M_j$. El problema consiste en obtener tales coeficientes que eventualmente pueden ser funciones del tiempo. Cuanto menores sean sus valores la carga contaminante será menor aunque el costo económico de la depuración será mayor. Tales objetivos contrapuestos deben formularse de manera consistente para establecer el procedimiento del diseño óptimo. Se describirán aquí tres alternativas de diseño.

4.1 Caso 1: Minimización del costo de construcción considerando descargas independientes del tiempo.

Se considera la determinación óptima de factores de reducción constantes β_j de manera tal de minimizar el costo económico asociado a la construcción de las plantas de depuración asegurando que los niveles de concentración sean menores a los admisibles en las zonas protegidas. La función de costo económico puede suponerse aproximadamente proporcional a la diferencia entre los flujos másicos sin tratar y los tratados. Expresando en forma cuadrática tal diferencia se puede formular el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar } FO(\beta_j) = \sum_{j=1}^{ND} M_j^2 (1 - \beta_j)^2 \quad , \quad (33)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\bar{C}_i < C_{adm} \quad i = 1 \rightarrow N \quad . \quad (34)$$

4.2 Caso 2: Minimización del impacto ambiental considerando factores de reducción variables temporalmente.

A partir del problema de diseño del Caso 1 se determinan las descargas másicas \bar{M}_j constantes en el tiempo de tal manera que no se superen los valores admisibles. Es de interés formularse la siguiente cuestión: ¿es posible distribuir temporalmente la descarga aprovechando la dinámica de las corrientes de marea, de forma tal de minimizar aún más la concentración en las zonas protegidas?. Dicha respuesta puede obtenerse formulando el siguiente problema de optimización.

Se desea distribuir durante el período de marea la descarga \bar{M}_j , sin modificar la cantidad total de contaminante. Esto quiere decir que se efectuará una descarga efectiva por cada planta dada por:

$$M_j^e(t) = \beta_j(t) \bar{M}_j \quad . \quad (35)$$

Por lo tanto el problema consiste en obtener $\beta_j(t)$ de manera tal de

$$\text{Minimizar } FO(\beta_j(t)) = \sum_{i=1}^N \bar{C}_i \quad , \quad (36)$$

sujeto a

$$\int_{t_0}^{t_0+\pi_p} \beta_j(t) dt = \pi_p \quad , \quad (37)$$

donde π_p es el período de marea. La expresión (37) asegura que la descarga de contaminante total no varíe. Debe observarse que las funciones β_j son periódicas siguiendo el carácter armónico de la marea.

4.3 Caso 3: Minimización del costo de depuración considerando factores de reducción variables temporalmente.

Para este problema se parte del conocimiento de las descargas uniformes M_j que arriban a la planta ocasionando concentraciones más elevadas que la admisible. Se pretende obtener factores de reducción dependientes del tiempo, como en el caso anterior, de manera tal de minimizar el costo de depuración. Una manera de establecer dicho costo es a partir de la hipótesis seguida para el Caso 1 aunque considerando la integral sobre un período de marea ya que en este caso los factores de reducción son funciones del tiempo. En consecuencia el problema se formula de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } FO = \sum_{j=1}^{ND} M_j^2 \int_{t_0}^{t_0+\pi_p} (1 - \beta_j(t))^2 dt \quad , \quad (38)$$

sujeto a

$$\bar{C}_i < C_{adm} \quad . \quad (39)$$

5 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Implementación computacional

Con las ecuaciones mostradas pueden construirse dos modelos computacionales. El primero de ellos consiste en la determinación de las corrientes de marea a partir del sistema (10-15 con sus correspondientes condiciones de borde). Una vez determinadas las mismas debe resolverse el problema de dispersión (22-23) efectuando la simulación hasta obtener el estado oscilatorio estacionario. Para esta tarea se utiliza el método de Elementos Finitos. A efectos de resolver un problema de diseño óptimo la simulación del problema de dispersión debe realizarse de forma repetida para cada alternativa de diseño verificando el cumplimiento de las restricciones del problema y comparando la función objetivo hasta encontrar la mejor opción. Para dirigir esta búsqueda hacia el valor óptimo, minimizando el número de simulaciones necesarias, se emplea en este trabajo el método de Recocido Simulado.

Este procedimiento si bien resulta muy general en cuanto al tipo de función objetivo o restricciones que se desea analizar requiere, en general, un tiempo de computación importante. Para uno de los problemas analizados en este trabajo (Caso 1) se ha empleado dicho procedimiento. El mismo requirió un tiempo de CPU de aproximadamente 2 minutos para cada alternativa y los valores óptimos se obtuvieron mediante una búsqueda del orden de 500 iteraciones lo cual implicó un tiempo de cálculo de aproximadamente 15 horas.

Por otra parte, si se emplea el modelo adjunto de dispersión, la determinación de las concentraciones medias en las zonas protegidas es mucho más expeditiva. En este

segundo procedimiento es necesario obtener mediante el MEF tanto el problema hidrodinámico como de dispersión una sola vez a los efectos de evaluar el estado de base. Luego deben determinarse las funciones de influencia $G_i(x,y,t)$, para cada una de las zonas protegidas del estuario, a partir de las ecuaciones (27-29) también usando el método de Elementos Finitos. Finalmente, conociendo las funciones de influencia, las concentraciones medias espaciales temporales para cada zona protegida se determinan mediante las fórmulas analíticas (31-32). Luego, el procedimiento de diseño óptimo se realiza a partir de las últimas fórmulas determinadas, lo cual hace innecesaria la resolución de un problema diferencial para cada iteración, minimizándose notablemente los tiempos de cómputo. Debe observarse que este último modelo solamente requiere realizar una simulación de elementos finitos por cada una de las zonas protegidas, que en general son pocas (3 en los problemas analizados) por lo que el tiempo insumido resulta muy breve siendo de 8 minutos para los problemas estudiados considerando tanto la optimización como la determinación de la situación inicial.

Por otro lado el tiempo insumido para la optimización propiamente dicha a partir de las fórmulas (31-32) es exiguo.

En este trabajo, el tiempo empleado con esta metodología para el problema computacionalmente más largo fue menor a 10 minutos (contemplando determinación de estado de base, determinación de función de influencia y procedimiento de optimización), habiéndose evaluado más de un millón de alternativas de diseño. Tales problemas fueron implementados en el programa (Matlab, 2010) desde el cual se invoca al programa (FlexPDE, 2015) para realizar los cálculos de elementos finitos.

5.2 Resultados numéricos

Se ha considerado un estuario hipotético con la geometría mostrada en la Figura 1 teniendo las siguientes dimensiones: ancho de boca 10km, longitud 35km y 21m de profundidad. Se asume que la excitación de marea en la boca corresponde a una componente semidiurna M2 (12,4 horas de período) de 1m de amplitud. Para efectuar las simulaciones se han considerado los siguientes parámetros: coeficiente de dispersión $K=50 \text{ m}^2/\text{s}$, coeficiente de degradación $\sigma=2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ y coeficiente de Manning $n=0,015$. Las descargas correspondientes a cada planta son $M_j= 8, 8 \text{ y } 6 \times 10^7 \text{ (NMP/100ml) m}^3/\text{s}$, para las plantas 1 a 3 respectivamente.

Se ha determinado la hidrodinámica del estuario y luego la concentración de coliformes mediante la ecuación de dispersión. Para este caso, considerando la extrema pequeñez del cociente e (8) el problema hidrodinámico se ha obtenido utilizando la primera aproximación (10-12). Dicho cálculo indica que en las tres zonas protegidas consideradas (Figura 1) se supera el valor admisible adoptado como $C_{adm}=200 \text{ NMP/100ml}$.

En la Figura 2 se aprecia la historia temporal de concentración para la zona 1. En el resto de las zonas el comportamiento es similar. Puede observarse que después de un transitorio se alcanza una situación de oscilación estacionaria que es la que tiene interés analizar.

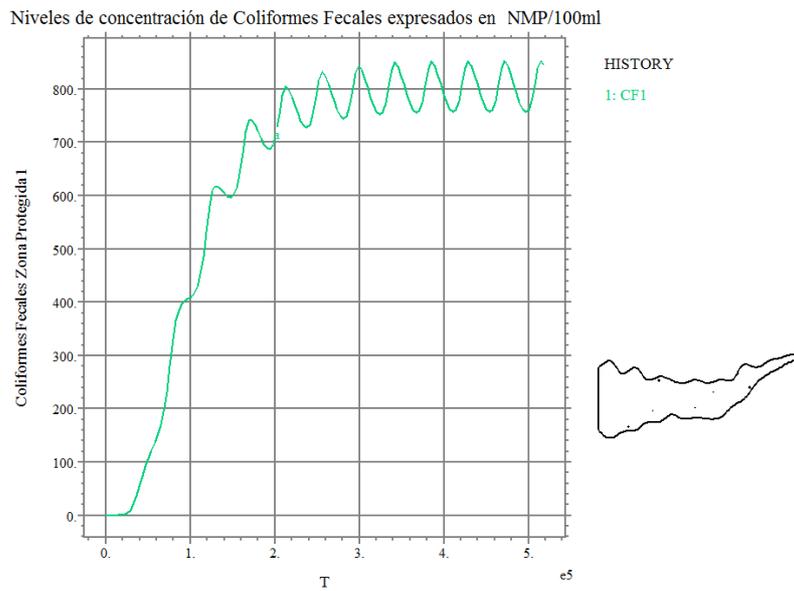


Figura 2: Historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 1.

Posteriormente se ha resuelto el modelo adjunto para la misma situación y se ha determinado el valor medio temporal espacial de la concentración para cada una de las zonas protegidas consideradas. Las mismas magnitudes se han obtenido con el modelo de dispersión directo.

Zonas protegidas	Problema de Transporte	Enfoque Adjunto	Diferencia Porcentual
Concentración en Zona 1 (NMP/100 ml)	809	780	3,7
Concentración en Zona 2 (NMP/100 ml)	723	712	1,5
Concentración en Zona 3 (NMP/100 ml)	319	309	3,2

Tabla 1: Comparación valores de concentraciones medias en zonas protegidas.

Una comparación entre los resultados brindados por ambos modelos se puede ver en la [Tabla 1](#). Como se aprecia los resultados son consistentes ya que el error entre los mismos es del orden del 3%.

Seguidamente se ha resuelto el primer caso de optimización. Para dicha resolución se han empleado ambos modelos de optimización llegando prácticamente a los mismos resultados. Éstos se muestran en la [Tabla 2](#) donde se puede ver también una comparación entre los resultados obtenidos para el diseño óptimo y para otras dos opciones factibles arbitrarias (que originan concentraciones menores que las admisibles en las zonas protegidas). Es claro apreciar que la función objetivo es mucho menor para el caso optimizado, lo que implica un costo económico de construcción mucho menor.

		Solución óptima	Solución admisible 1	Solución admisible 2
Factor de reducción en las tasas de vertido	β_1	0,10	0,05	0,05
	β_2	0,90	0,40	0,05
	β_3	0,55	0,20	0,05
Función objetivo		0,60	1,04	1,48

Valores en $(1 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s} * \text{NMP}/100\text{ml})^2$			
Concentración en Zona 1 (NMP/100 ml)	199	84	39
Concentración en Zona 2 (NMP/100 ml)	86	37	35
Concentración en Zona 3 (NMP/100 ml)	197	69	15

Tabla 2: Resultados de optimización para el Caso 1.

Luego se ha resuelto el segundo problema de diseño (Caso 2). Tanto éste como el siguiente se han resuelto utilizando el modelo adjunto. Los valores de descargas máxicas para cada planta se han considerado iguales a los determinados en el caso anterior. A los efectos de minimizar el impacto ambiental se redistribuyeron tales flujos máxicos en el período de marea. Para ello se supuso que el flujo máxico para cada una de las plantas puede adoptar diferentes valores en cada subperíodo de tres horas. El resultado del enfoque de optimización se muestra en la [Figura 3](#).

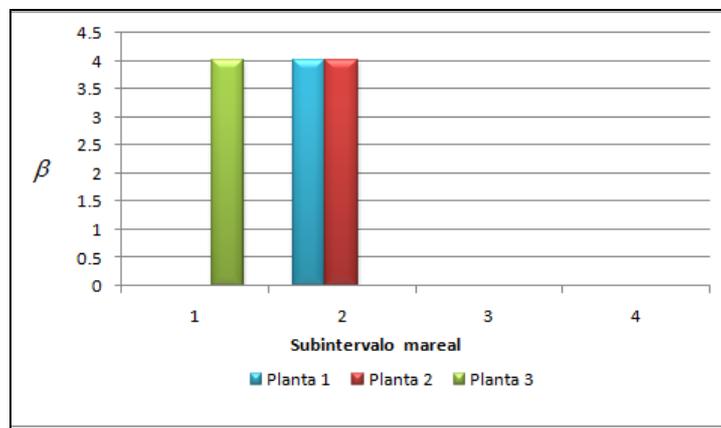


Figura 3: Distribución temporal de la descarga para el Caso 2.

Como se puede apreciar, de acuerdo a este resultado la descarga debe realizarse solamente en uno de los intervalos de tres horas en que se ha subdividido el período mareal.

Debe notarse que para la definición de los coeficientes de reducción se ha comenzado a considerar el periodo mareal a partir de la pleamar.

Para las plantas 1 y 2 la descarga máxica se produce en el segundo intervalo mientras que para la planta 3 se produce en el primero.

Con las descargas optimizadas así obtenidas se calculan las concentraciones medias en las zonas protegidas dadas por los siguientes valores: 47, 15 y 44 NMP/100ml para las zonas 1 a 3 respectivamente, los que son mucho menores a los valores dados en el Caso 1: 199, 86 y 197 NMP/100ml para las mismas zonas. Esto permite deducir que si el mismo volumen de aguas servidas es distribuido apropiadamente en el periodo mareal, el impacto ambiental decrece ostensiblemente.

Finalmente, los resultados obtenidos para el Caso 3 se muestran en la [Figura 4](#) donde se ha permitido que la descarga máxica de cada planta pueda adoptar 4 valores diferentes para cada subintervalo mareal. Las concentraciones obtenidas para cada zona protegida en este caso vienen dadas por los siguientes valores: 197, 81 y 199 NMP/100 ml.

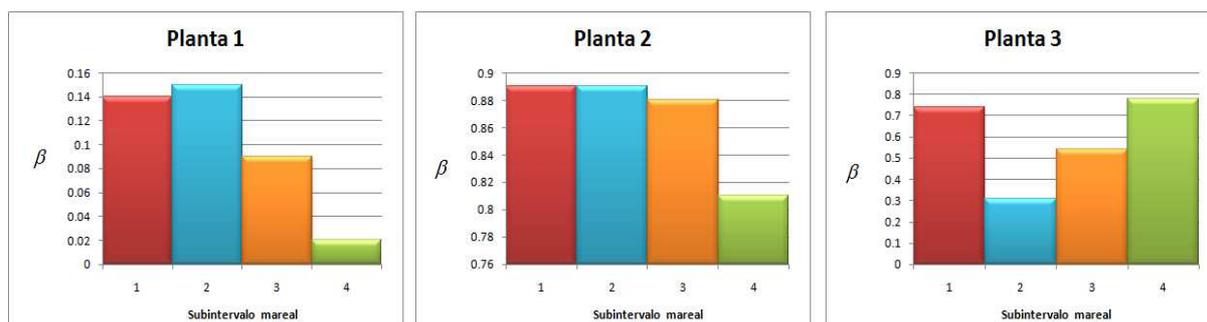


Figura 4: Distribución temporal de la descarga para el Caso 3.

6 CONCLUSIONES

Se ha formulado el diseño de la operación de plantas de tratamiento de aguas residuales urbanas o industriales descargando en un estuario como un problema de optimización. Dicho enfoque, implementado computacionalmente de manera adecuada, permite el cumplimiento de las exigencias ambientales y al mismo tiempo la generación de alternativas de la mayor economía, o a la inversa, para una dada posibilidad económica permite lograr el mínimo impacto ambiental.

El enfoque computacional desarrollado se basa en la combinación del método de los elementos finitos para la simulación del problema de transporte en conjunto con una adecuada técnica de optimización. Asimismo se ha demostrado que la formulación adjunta del problema de transporte resulta ser muy conveniente puesto que conduce a una fórmula analítica para la determinación de las concentraciones medias lo que hace posible evaluar una enorme cantidad de alternativas de diseño en unos pocos minutos.

Se han analizado tres problemas de diseño. El primero de ellos corresponde a la determinación de descargas constantes en el tiempo, y corresponde al caso más común de diseño. Los dos que siguen en cambio permiten la variación temporal de las descargas lo que potencialmente puede conducir a una eficiencia mucho mayor de la planta de depuración ya que se aprovecha también la dinámica de las corrientes mareales para minimizar el impacto ambiental. Por supuesto para estas últimas posibilidades deben analizarse con mayor detalle los problemas tecnológicos asociados que involucran la construcción de depósitos de suficiente capacidad y los dispositivos hidráulicos adecuados para su operación (bombas, válvulas, etc.).

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte del proyecto “Modelos Matemáticos en Ingeniería Ambiental: Diseño óptimo y control” (SCyT, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur).

REFERENCIAS

- Álvarez Vázquez L.J., Martínez A., Rodríguez C. y Vázquez-Méndez M.E. Mathematical model for optimal control in wastewater discharges: the global performance, *Computes Rendus Biologies* 328, 327-336, 2005
- FlexPDE PDE Solutions Inc. www.pdesolutions.com, 2015.
- Li C. y O'Donnell J. Tidally driven residual circulation in shallow estuaries with lateral depth

- variation. *Journal of Geophysical Research* 102 (27915-27929), 1997.
- Liren Yu y Salvador, N.N.B. Modeling water quality in rivers, *American Journal of Applied Sciences* 2 (4), 881-886, 2005.
- Matlab R2010a, 2010. The Math Works, Inc. (www.mathworks.com).
- Roos P.C. y Hulscher S.J.M.H. Large-scale seabed dynamics in offshore morphology: Modeling human intervention, *Reviews of Geophysics*, Vol. 41(2), 51 – 5, 16, 2003.
- Stoklas C. y Cortínez H. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos, *Mecánica Computacional* 30, 3577–3594, 2011.
- Yandamuri S.R. Murty, Raju K. Srinivasan y Bhallamudi S. Murty. Multiobjective optimal waste load allocation models for rivers using non dominated sorting genetic algorithm-II, *Journal of Water Planning and Management* 132, 133-143, 2006.