

OPTIMIZACION DE TRAYECTORIAS EN CIRCUITOS DE COMPETICIÓN AUTOMOVILÍSTICAS

**Augusto A. Romero^a, Franco Bottaro^c, Nicolás López^c, Jonathan Brunetti^c,
Sebastián M. Giusti^b**

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica - GIDMA. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. augusto.romero90@gmail.com*

^b*Departamento de Ingeniería Civil - GIDMA. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. CONICET Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. sgiusti@civil.frc.utn.edu.ar*

^c*Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina.*

Palabras Clave: optimización de trayectorias, competición automovilística, problema de control óptimo.

Resumen: En este trabajo se propone un método para la obtención de trayectorias de mínimo tiempo de vuelta en circuitos de competición automovilística. Esta técnica utiliza una representación discretizada de la calzada de circulación mediante segmentos rectos y modelos de masa puntual para representar la dinámica del vehículo de carreras. Para modelar el comportamiento de adherencia límite del vehículo se utilizó el concepto de elipse de fricción centrado y descentrado. Se formuló una ecuación de estado generalizada definida por segmento y la sumatoria de las contribuciones de cada segmento constituyen la ecuación de estado global. El método está codificado en Matlab y utiliza el paquete de optimización de dicho software para resolver el problema de control óptimo. Se presenta un marco teórico sobre la discretización adoptada, las ecuaciones dinámicas y de adherencia límite y diversos ejemplos numéricos de interés académico y de aplicación directa.

1. INTRODUCCION

La industria automovilística es una de las mayores a nivel mundial en cuanto a niveles de producción y grado de desarrollo. Con ella también han nacido actividades íntimamente relacionadas con la temática como son las competencias automovilísticas, que en la actualidad, conforman los principales espacios de investigación y desarrollo de las grandes empresas automotrices.

La necesidad de lograr mejores desempeños en pista moviliza a los desarrollistas e investigadores en tecnología automotriz a estudiar más en detalle los fenómenos físicos a los cuales se somete un automóvil de carreras, pero para evaluar como distintas puestas a punto modifican la respuesta dinámica del móvil han sido requeridos ensayos de campo. Una alternativa atractiva a esta solución es la simulación, ya que con ella es posible reducir no solamente costos sino también tiempo, un factor que es altamente valorado en la industria de la competición.

Para poder evaluar numéricamente como un móvil transita la pista de carreras al límite de sus capacidades es necesario primero determinar la trayectoria óptima que logre la mejor performance, sea maximizar la velocidad final a la salida de un tramo, minimizar el tiempo de vuelta, etc.

Esta problemática ha sido establecida de manera formal como un problema de control óptimo, en el cual intervienen una serie de tramos, donde una determinada cantidad de parámetros evoluciona de una estación a otra de una manera prescripta. Usualmente los parámetros que definen el fenómeno que evoluciona pueden separarse en variables de control y variables de estado. Las variables de control definen el sistema y gobiernan la evolución de este de un tramo a otro, en cambio las variables de estado definen el comportamiento del fenómeno dentro del tramo. El problema es encontrar el conjunto de variables de control tal que la función objetivo definida en todos los tramos es minimizada sujeta a un conjunto de restricciones impuestas sobre las variables de control y de estado (Rao, 2009).

Algunos resultados de optimización de trayectorias basados en un esquema de control óptimo se observan en (Velenis and Tsiotras, 2005), en donde se utilizan modelos de configuración vehicular de bicicleta sujetos a transferencia de carga longitudinal, en tanto que para modelos dinámicos de automóvil simplificado y transferencia de carga lateral y longitudinal se muestran en (Rucco, et al., 2012). En (Lipp and Boyd, 2014) se tratan problemas de optimización del perfiles de velocidades en una trayectoria fija.

En este trabajo se estudia la problemática de obtener la trayectoria óptima que minimice el tiempo de vuelta de un vehículo de carreras en un circuito cerrado utilizando un modelo dinámico de masa puntual, sujeto a restricciones de adherencia basados en un esquema de elipse de fricción.

La metodología de resolución adoptada presenta características similares al problema de control óptimo, pero con algunas pequeñas diferencias que serán analizadas y explicadas en detalle en la sección 3.5.

En la sección 2 se abordará el marco teórico. Aquí se presentan las coordenadas utilizadas para representar la trayectoria y para derivar las leyes de movimiento, las bases del concepto de elipse de fricción y la condición de estado estacionario, fundamental para obtener un tipo de vuelta de carrera en particular.

La metodología de discretización para la función de costo, las restricciones y el dominio del problema se discutirá en la sección 3 junto con una presentación del problema de optimización.

Por último se presentan ejemplos numéricos de validación y de aplicación en la sección 4.

2. MARCO TEORICO

El dominio en estudio es el lugar geométrico comprendido entre la calzada interior y exterior de la pista. Estas dos calzadas se modelarán como dos curvas planas, cerradas, que no se intersectan entre ellas ni a sí mismas. Dentro de estas dos curvas se busca encontrar la trayectoria que minimice el tiempo de recorrido, desde un punto inicial prefijado. La trayectoria que se encuentre no puede salir total o parcialmente de estas dos curvas, aunque puede tener puntos en la frontera. Necesariamente la curva que se encuentre tiene que dar una vuelta completa en el circuito.

2.1. Coordenadas Normales y Tangenciales

Desarrollaremos la cinemática de una partícula expresada en un sistema coordenado local y que es definido por dos vectores unitarios base, uno tangente a la trayectoria del movimiento en cualquier instante y uno normal a la trayectoria y dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria en ese instante.

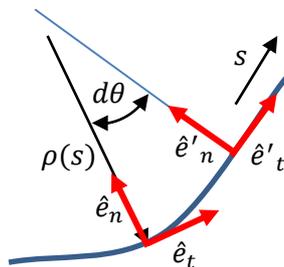


Figura 1- Base de versores ortonormales que se mueven con el móvil.

Definimos los vectores coordenados unitarios \hat{e}_n y \hat{e}_t como normal y tangencial a la trayectoria de movimiento, respectivamente. El vector unitario \hat{e}_t tiene dirección tangente a la trayectoria y sentido en que se la recorre, \hat{e}_n siempre se considera positivo hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Siendo el arco de curva diferencial y la velocidad angular respectivamente

$$\begin{aligned} ds &= \rho d\theta \\ \omega &= \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (1)$$

Puede demostrarse según (Soutas-Little, et al., 2009), que la aceleración \vec{a} puede descomponerse en

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{e}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{e}_n}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{e}_t + \frac{d^2s}{dt^2} \hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n \\ \vec{a}_n &= \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n \\ \vec{a}_t &= \frac{d^2s}{dt^2} \hat{e}_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Donde \vec{a}_n es la componente de la aceleración normal a la trayectoria y \vec{a}_t es la componente de la aceleración tangente a la trayectoria.

2.2. Variables cinemáticas en función de la posición

Con el objeto de transformar el problema cinemático de un esquema “tiempo dependiente” a uno “espacio dependiente” es que se reescriben las ecuaciones en términos de la longitud de arco recorrida

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv(s)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = v(s) \frac{dv(s)}{ds} \\ a(s) ds &= v(s) dv \end{aligned} \quad (3)$$

Integrando en forma definida desde una posición y velocidad inicial $s = s_0$ y $v = v_0$ hasta una posición final generalizada s y v se puede obtener

$$\int_{v_0}^v v(s) \cdot dv = \int_{s_0}^s a(s) dx \quad (4)$$

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds}$$

2.3. Función de costo

La función de costo a minimizar es el tiempo de recorrido de una vuelta. El tiempo necesario para que un móvil se desplace entre dos puntos se puede expresar como una función de posición

$$dt = \frac{ds}{v(s)} \Rightarrow t(s) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds}} \quad (5)$$

Por ende conociendo el perfil de aceleraciones en un tramo de trayectoria y las condiciones iniciales, es posible calcular el tiempo que le insume a la partícula desplazarse desde la posición s_0 hasta la s . El tiempo de recorrido de una trayectoria cerrada puede ser evaluado mediante la sumatoria de tiempos de recorrido parciales dados por la ecuación (5). Esta segmentación de la trayectoria y la correspondiente evaluación de la función de costo sobre ella se tratarán en detalle en la sección 3.1 y 3.2.

2.4. Elipse de fricción

Es necesario definir un límite de maniobrabilidad para poder representar de manera consistente los fenómenos físicos que ocurren al operar un vehículo. El modelo de restricción que mejor se adapta a condiciones reales de funcionamiento es la elipse de fricción. Este concepto surge a partir de relevamientos de aceleraciones tangenciales y normales durante el tránsito en pista de un automóvil de carreras circulando al máximo de sus capacidades, con los que se pueden confeccionar diagramas similares al que se muestra en la Figura 2. En esta imagen se puede observar que los puntos representan el par de valores de aceleración tangencial y normal relevados de manera simultánea en un momento particular del recorrido, es decir el móvil está sometido a ese par de aceleraciones en dicho instante. En base a esto se entiende que los puntos más alejados del centro del diagrama conforman una envolvente de maniobrabilidad, ya que para una aceleración tangencial dada, no es posible obtener aceleraciones normales mayores a las que se verifican en dicho diagrama, ya que si fuera así el vehículo estaría transitando fuera de los límites de maniobrabilidad. Por la gran similitud de esta envolvente a la curva descrita por una elipse, es que se conoce a este gráfico como “diagrama g-g” o elipse de fricción. La zona interior a la elipse de fricción de un vehículo es entonces el lugar geométrico de los posibles vectores aceleración, escritos en términos de aceleración tangencial y normal, que se pueden imprimir a dicho vehículo sin que este pierda adherencia y derrape. La elipse propiamente dicho denota el límite de adherencia.

Existen varios modelos de este concepto. En (Lipp and Boyd, 2014) se presenta un círculo de fricción, esto significa que el límite de adherencia lateral o normal es igual al longitudinal o tangencial. En (Rucco, et al., 2012) un modelo de elipse de fricción centrado en el origen es utilizado, lo cual da una representación más realista del fenómeno, como es posible ver en categorías de competición como la F1, en donde las aceleraciones normales pueden llegar a 3g y 1g las aceleraciones tangenciales.

Mayor grado de representatividad del fenómeno de frenaje y aceleración se puede alcanzar implementando un modelo de elipse de fricción descentrado, el cual restringe las aceleraciones tangenciales positivas mucho más que las negativas, dado que la capacidad de frenado de un automóvil supera ampliamente las capacidades de acelerar dadas por la potencia de su motor.

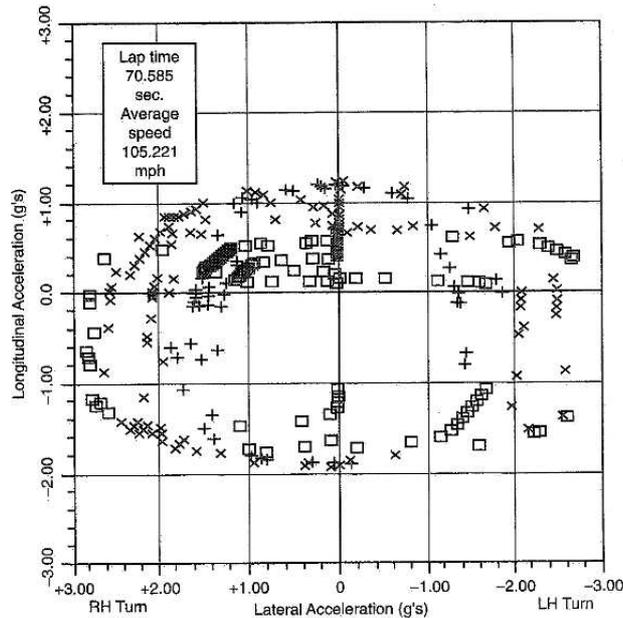


Figura 2 – Valores de aceleración tangencial y normal, resultados arrojados por LTS (Lap Time Simulator) (Milliken and Milliken, 1995).

En este trabajo se utilizará en los ensayos numéricos modelos de elipse de fricción centrado y descentrado, los cuales se escriben como

$$\left(\frac{a_n}{\mu_n g}\right)^2 + \left(\frac{a}{\mu_t g}\right)^2 \leq 1 \quad (6)$$

$$\left(\frac{a_n}{\mu_n g}\right)^2 + \left(\frac{a - c_t}{\mu_t g}\right)^2 \leq 1 \quad (7)$$

siendo

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad c_t = \frac{(a_{max} + a_{min})}{2} \quad (8)$$

μ_t y μ_n son los coeficientes equivalentes de fricción tangenciales y normales respectivamente y c_t la posición del centro de la elipse en el eje de aceleraciones tangenciales, dada por la semisuma de las máxima y mínima aceleración tangencial especificada, R el radio de curvatura local y g la aceleración de la gravedad.

2.5. Condición de estado estacionario

Se deben distinguir varios tipos de “vueltas” a un circuito que un automóvil de carreras puede realizar en una competencia automovilística. Es importante discernirlas en forma cualitativa y cuantitativa para poder orientar una correcta formulación del problema de optimización.

Estos tipos de vueltas pueden ser dos. La primera se le suele llamar “vuelta de clasificación”. En ella el automóvil parte de la meta a una velocidad que puede llegar a ser conocida o no dependiendo del reglamento. Circula por la pista con el objetivo de hacerlo en el menor tiempo posible, y llega a la meta con una velocidad que puede no coincidir con la que comenzó su vuelta. Además puede que el punto de llegada sobre la meta sea distinto que el punto de salida sobre la meta.

Es entonces que, si se grafica la trayectoria del móvil en un plano, esta puede generar o no una curva cerrada.

El segundo tipo de vuelta es aquella que un móvil realizaría sin obstáculos presentes, ni otros automóviles en la pista (o al menos que su ubicación no perturben la trayectoria del automóvil en estudio), tal cual lo haría un automóvil que se encuentra en la primera plaza durante una vuelta de

carrera. Es posible evidenciar el hecho de que el automóvil estaría corriendo al límite de sus posibilidades, y que además el piloto desea realizar la vuelta en la que se encuentra corriendo con mayor celeridad, pero con la condición de realizar la siguiente también de la manera más rápida posible, es decir, que al salir de la última curva de la vuelta, desea “empalmar” con la siguiente curva, perteneciente a la siguiente vuelta, con la máxima celeridad posible. Esto es fácil de observar en cualquier competencia automovilística, en donde el móvil pasa por todos los lugares de la pista por el mismo punto y con la misma velocidad, comparando dos vueltas distintas. Por ende se puede entender que el móvil cierra la vuelta en la misma posición y a la misma velocidad a la que la comenzó, y la trayectoria que describiría cíclicamente sería una cerrada.

Teniendo en cuenta lo recientemente aclarado, se denominara a la condición para realizar el segundo tipo de vuelta como “Condición de estado estacionario” y resultados que cumplan con esta condición son los deseados en este trabajo.

Analizando el trabajo realizado por el móvil en una trayectoria cerrada bajo las restricciones de ausencia de desniveles de la pista, lo que anula el trabajo de la fuerza de la gravedad sobre el automóvil, variación en la masa producida por el consumo de combustible despreciable y ausencia de fuerzas aerodinámicas (resistencia, sustentación positiva o negativa) el trabajo W realizado por la resultante de fuerzas es

$$W = \oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint ((\vec{F}_t \cdot \vec{ds}) + (\vec{F}_n \cdot \vec{ds})) \quad (9)$$

El producto escalar entre \vec{F}_n y \vec{ds} es cero por ser estos vectores perpendiculares en todo instante. Por último el trabajo es igual a la variación de la energía cinética

$$W = \oint Ft ds = \Delta Ec = \frac{1}{2} m (vf^2 - vi^2) \quad (10)$$

Pero por razones que ya mencionamos $vf = vi$, entonces

$$\oint Ft ds = 0 \quad (11)$$

La componente tangencial de la resultante de fuerzas se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= m \vec{a}_t \wedge \vec{a}_t = a \hat{e}_t \\ \oint \vec{F}_t \cdot \vec{ds} &= \oint m (a \hat{e}_t \cdot ds \hat{e}_t) = m \oint at ds = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Siendo \vec{a}_t el vector aceleración tangencial y a su módulo, \hat{t} el versor tangencial a la curva en cada punto. Por lo considerado anteriormente, al ser la masa del vehículo “ m ” una constante que no varía en la trayectoria, se concluye que la circulación del vector aceleración sobre la trayectoria es nulo

$$C = \oint a ds = 0 \quad (13)$$

La ecuación anterior cuantifica la condición de estado estacionario del problema.

3. DISCRETIZACION DEL PROBLEMA

3.1. Discretización de la trayectoria

Para lograr un tratamiento numérico del problema se decidió dividir la pista en tramos. Cada tramo está delimitado por estaciones. Una estación es un segmento de recta que une la calzada interna con la externa, se decidió que la orientación de este segmento de recta sea la normal saliente a la calzada interior. Se puede definir un punto P_i sobre cada estación i como

$$\vec{P}_i = (\vec{PE}_i - \vec{PI}_i) \alpha_i + \vec{PI}_i \quad (14)$$

la unión de cada uno de estos puntos con su precedente y su precedente mediante segmentos de rectas define la trayectoria del móvil.

El problema ahora consiste en encontrar los puntos sobre las estaciones que definen la trayectoria óptima.

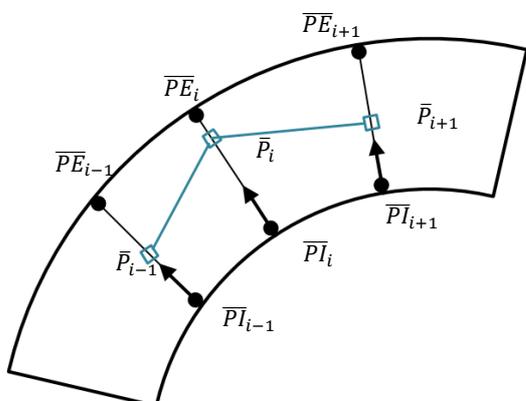


Figura 3 – Representación de la trayectoria dentro de la pista compuesta por tramos y estaciones.

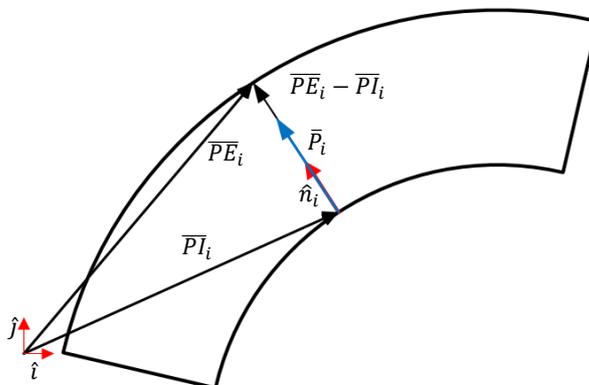


Figura 4 – Generación de una recta en forma vectorial.

3.2. Discretización función de costo

La subdivisión de la pista en tramos permite subdividir el tiempo de vuelta en tiempos parciales.

El perfil de aceleraciones que se utiliza en este trabajo es lineal, definido por los valores de aceleración tangencial en cada estación de la forma

$$a(s) = \frac{(s - s_{i+1})}{(s_i - s_{i+1})} a_i + \frac{(s - s_i)}{(s_{i+1} - s_i)} a_{i+1} \quad (15)$$

Luego se puede hacer uso de la ecuación (5) para encontrar el tiempo insumido en recorrer el tramo i y llamando a $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$

$$\Delta t_i = \frac{2}{(a_i + a_{i+1})} * (\sqrt{v_i^2 + (a_i + a_{i+1})\Delta s_i} - v_i) \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

El tiempo de vuelta total se puede escribir como la sumatoria de los tiempos parciales

$$T = \sum_1^{n-1} \Delta t_i + \frac{2}{(a_n + a_1)} * (\sqrt{v_n^2 + (a_n + a_1)\Delta s_n} - v_n) \quad (17)$$

siendo n el índice del último tramo y última estación.

3.3. Discretización modelo de elipse de fricción

Las ecuaciones (6) y (7) se deben cumplir en los puntos de control de las estaciones de la manera

$$\left(\frac{v_i^2}{R_i \mu_n g}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{\mu_t g}\right)^2 \leq 1 \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$\left(\frac{v_i^2}{R_i \mu_n g}\right)^2 + \left(\frac{a_i - c_t}{\mu_t g}\right)^2 \leq 1 \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

R_i es el radio de curvatura de la trayectoria valuado en la estación i , v_i la velocidad que adquiere el móvil en el mismo punto.

3.4. Discretización de la condición de estado estacionario

La integral curvilínea de la ecuación (13) en forma discreta es la siguiente

$$\sum_1^{n-1} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \Delta s_i + \frac{a_n + a_1}{2} \Delta s_n = 0 \quad (20)$$

3.5. Formulación del problema de optimización

La función de costo del problema planteado en este trabajo está escrito en la ecuación (17) en tanto que las funciones de restricción se pueden obtener de (18) o (19) y (20). Aun así no se ha expresado las restricciones concernientes a mantener la trayectoria dentro de la pista. Esto se puede lograr utilizando la ecuación (14). Esta ecuación está elaborada de manera que cuando $\alpha_i = 0$ el punto P_i de la trayectoria se encuentra en PI_i , y cuando $\alpha_i = 1$ P_i esta sobre PE_i , de esta manera se logra que la trayectoria se encuentre entre la calzada interna y externa, logre una curva cerrada y que no corte a las calzadas ni se interseque así mismo. Además esta formulación permite reducir la cantidad de variables a optimizar reduciendo por ende el costo computacional. Entonces tenemos

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

Ahora que disponemos de todo el conjunto de restricciones podemos establecer que se desea encontrar

$$X \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ \alpha_i \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \\ v_1 \end{array} \right\} \quad (22)$$

mediante

$$\begin{aligned} \min & \sum_1^{n-1} \Delta t_i + \frac{2}{(a_n + a_1)} * (\sqrt{v_n^2 + (a_n + a_1)\Delta s_n} - v_n) \\ \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{v_i^2}{R_i \mu_n g} \right)^2 + \left(\frac{a_i - c_t}{\mu_t g} \right)^2 - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_1^{n-1} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \Delta s_i + \frac{a_n + a_1}{2} \Delta s_n = 0 \\ \alpha_i - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ -\alpha_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (23) \end{aligned}$$

Es de importancia aclarar, que es imposible conocer a priori el valor de la velocidad en la primera estación que permite realizar el tiempo de vuelta mínimo bajo la condición de circulación estacionaria indicada en la sección 2.5, por ende es que en el vector de la ecuación (22) figura la velocidad en la estación 1 v_1 como variable de proyecto.

Es en la ecuación (23) que se pueden observar algunas diferencias de esta metodología con respecto a la que se propone en un problema de control óptimo. En un problema de control óptimo es posible separar 2 tipos de variables, las primeras llamadas variables de estado x y por último las variables de control u . Las variables que entran en juego en el proceso de optimización son las variables de control

y ellas aparecen solamente interactuando de manera algebraica en las ecuaciones que definen la dinámica del móvil. Las variables de estado surgen de una diferenciación en las ecuaciones dinámicas y no forman parte del conjunto de variables a optimizar (Kelly, 2015). La metodología expuesta en este trabajo propone optimizar variables que no se encasillan dentro de las definiciones anteriormente nombradas, aunque guarda grandes similitudes con respecto al proceso de discretización de la función de costo, del dominio, y el tipo de restricciones que se implementan.

3.6. Implementación en algoritmo de optimización

El siguiente diagrama de flujo ilustra el procedimiento que se sigue para poder resolver el problema de optimización de un circuito cualquiera.

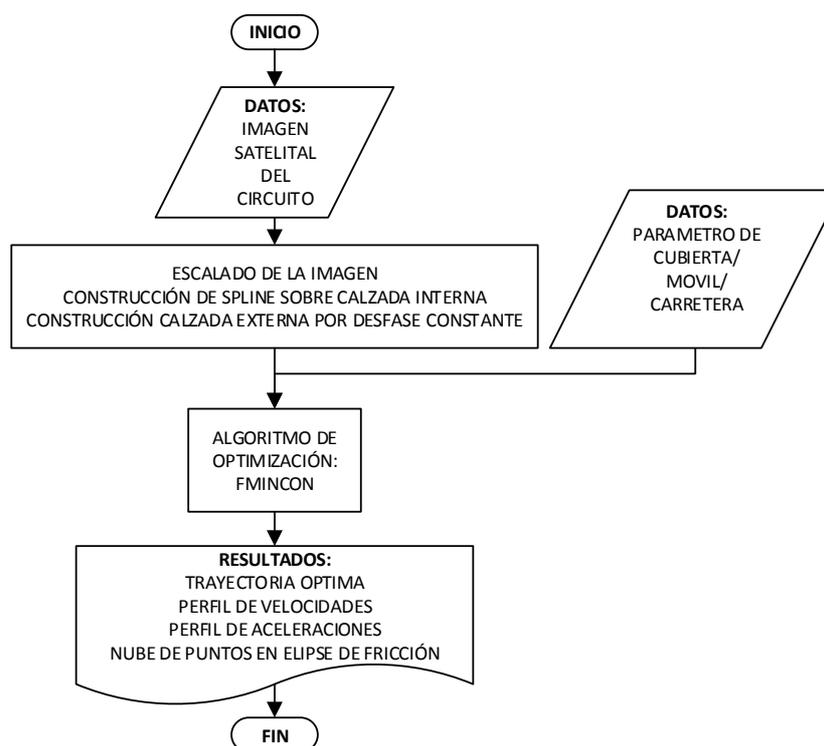


Figura 5 – Diagrama de flujo del código de optimización implementado.

El archivo de datos se genera en algún software de CAD, en donde se copia la geometría de la pista, y se exporta en un formato ASCII.

Se ingresan los datos y se procede con la resolución del problema de optimización mediante un algoritmo que utiliza la función “fmincon”, perteneciente al paquete “Optimization Toolbox” de Matlab.

Por último se obtienen resultados en forma de gráficos de la trayectoria óptima ubicada dentro de la calzada dato y el perfil de aceleraciones y de velocidades en función de la distancia recorrida.

4. EJEMPLOS NUMERICOS

Se realizaron varios ensayos numéricos. Los primeros que se muestran son ejemplos de validación, con ellos se comprueba que los resultados que arroja el algoritmo de optimización propuesto tiene consistencia física. El último ejemplo esta aplicado a un circuito real.

4.1. Circuito Circular

La geometría del circuito es un círculo de radio interno 60 m (calzada interior) y de ancho de pista constante en 10 m. Los coeficientes de fricción tangencial y normal son seteados en 1.9 ambos. Se toma como trayectoria inicial la media de la pista, la velocidad de la primera estación nula, y una aceleración tangencial en todos los puntos igual a 1 m/s².

Entonces:

$$\alpha_i^0 = 0,5 \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

$$a_i^0 = 1 \frac{m}{s^2} \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

y

$$v_1^0 = 0 \frac{m}{s}.$$

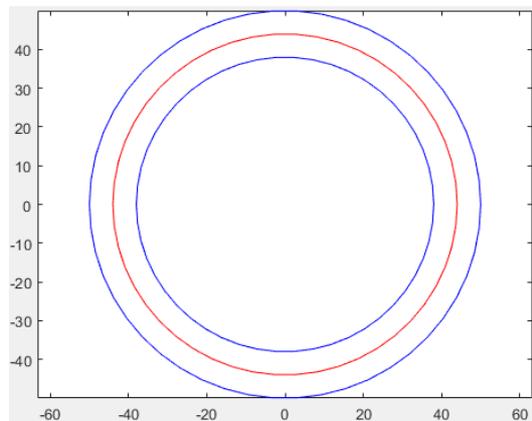


Figura 6 - Trayectoria inicial del proceso de optimización.

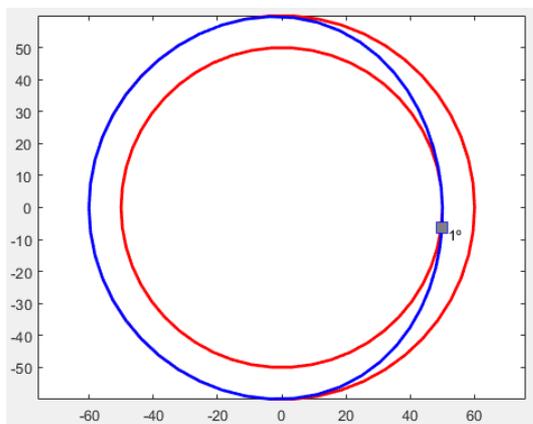


Figura 7 - Trayectoria óptima encontrada luego del proceso de optimización.

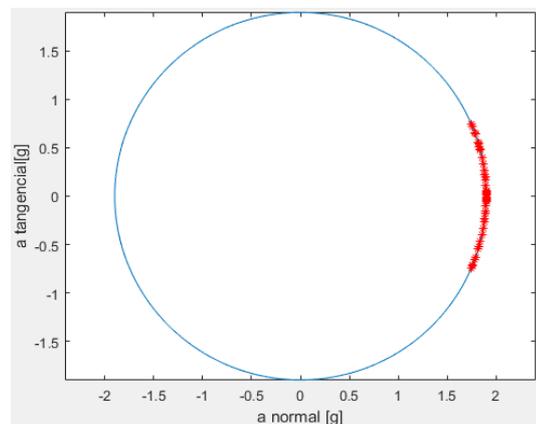


Figura 8 - Muestreo de aceleraciones (rojo) dentro del elipse de fricción (azul).

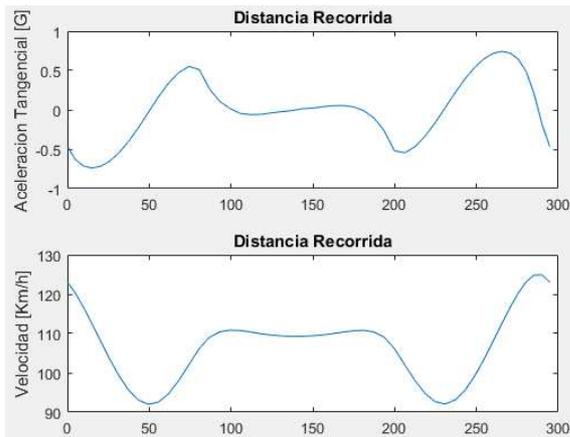


Figura 9 - Perfiles de aceleración tangencial y velocidad obtenidos luego del proceso de optimización.

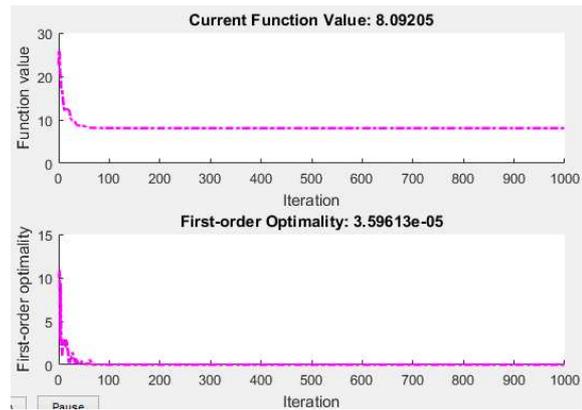


Figura 10 - Valor del Tiempo de vuelta y el criterio de optimalidad de primer orden vs iteraciones.

La trayectoria óptima obtenida resulta una curva cerrada y suave. Es de destacar que para un circuito que posee geometría con simetría radial, siendo discretizado en estaciones distribuidas de forma que se mantenga dicha simetría y partiendo el proceso de optimización con perfiles de aceleración y trayectorias iniciales también axisimétricos, la trayectoria solución no comparte dicha simetría. En los siguientes ejemplos se verifican fenómenos similares.

4.2. Circuito Cuadrado

La geometría del circuito es un cuadrado de 60mx60m de calzada exterior, y de 50mx50m de calzada interior, de ancho de pista constante. Los coeficientes de fricción tangencial y normal son seteados en 1.9 ambos.

$$\mu_t = 1.9; \quad \mu_n = 1.9$$

Se toma como trayectoria inicial la media de la pista, la velocidad de la primera estación nula, y una aceleración tangencial en todos los puntos igual a 1 m/s².

Entonces:

$$t_i^0 = 0,5 \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

$$a_i^0 = 1 \frac{m}{s^2} \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

y
$$v_1^0 = 0 \frac{m}{s}.$$

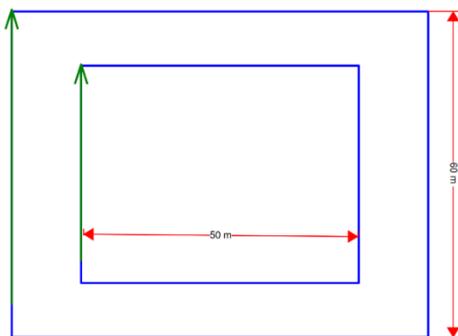


Figura 11 - Circuito Cuadrangular, las calzadas ext. e int. (azul), la dirección de circulación (flechas verdes) y sus dimensiones.

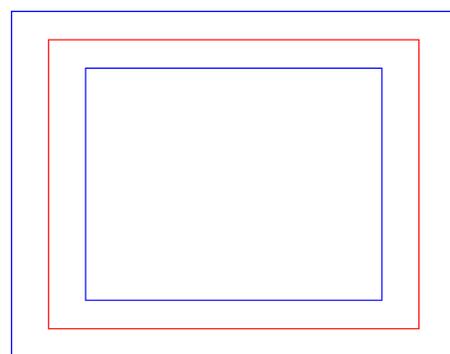


Figura 12 - Trayectoria inicial del proceso de optimización.

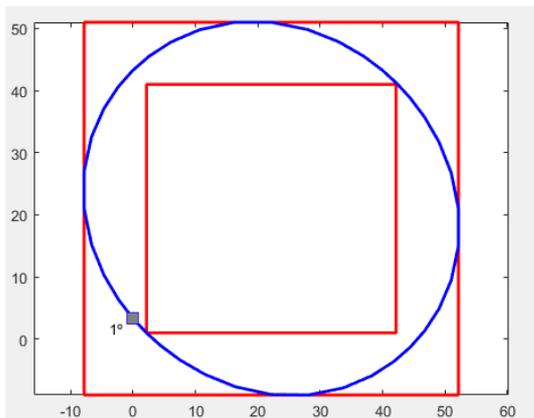


Figura 13 - Trayectoria óptima obtenida del proceso de optimización.

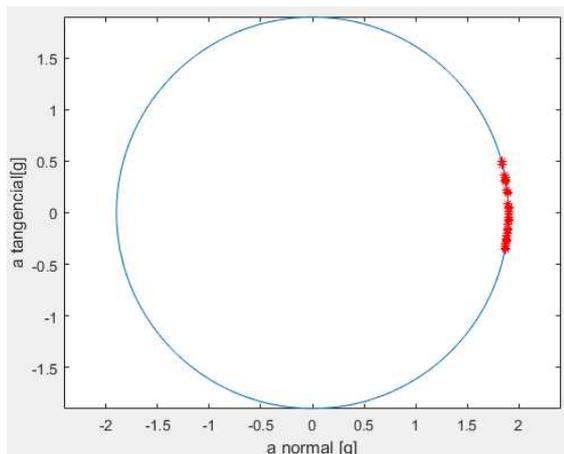


Figura 14 – Muestreo de aceleraciones (rojo) dentro del elipse de fricción (azul).

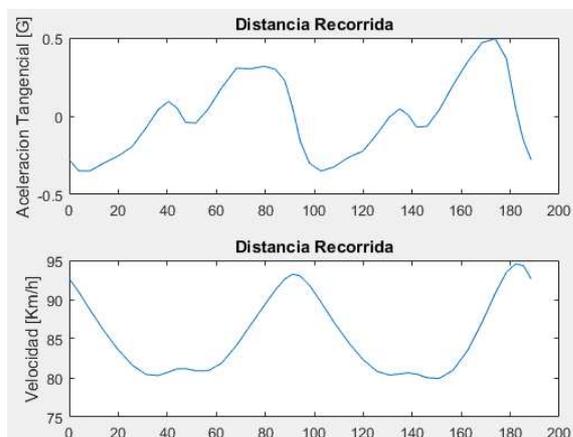


Figura 15 - Perfiles de aceleración tangencial y velocidad obtenidos luego del proceso de optimización.

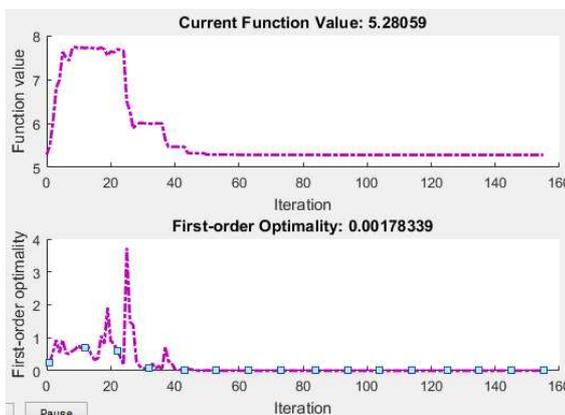


Figura 16 - Valor del Tiempo de vuelta y el criterio de optimalidad de primer orden vs iteraciones.

En este circuito se puede verificar que a pesar de las características no suaves de las curvas que definen las calzadas internas y externas, la trayectoria óptima es una curva cerrada suave. El móvil circula por el circuito transitando por la parte interna en las curvas y se aleja hacia la calzada externa en las rectas, como suele observarse en un caso real.

4.3. Circuito Cuadrado II

Este ejemplo toma la geometría del circuito del ejemplo anterior, al igual que las aceleraciones, velocidad en la primera estación y posiciones iniciales dentro de la calzada, se setean los coeficientes de fricción de la siguiente manera:

$$\mu_t = 1.4; \quad \mu_n = 0.4.$$

El resultado es el siguiente:

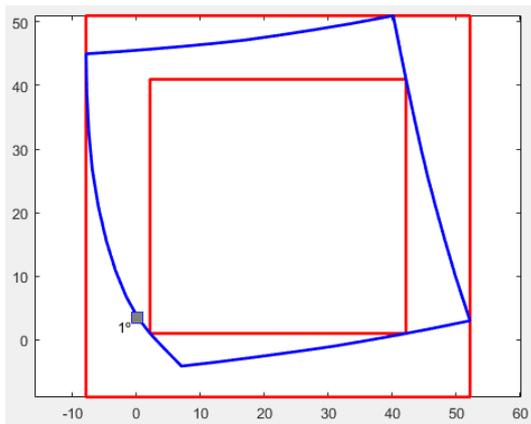


Figura 17 - Trayectoria optima obtenida para "Circuito Cuadrado II".

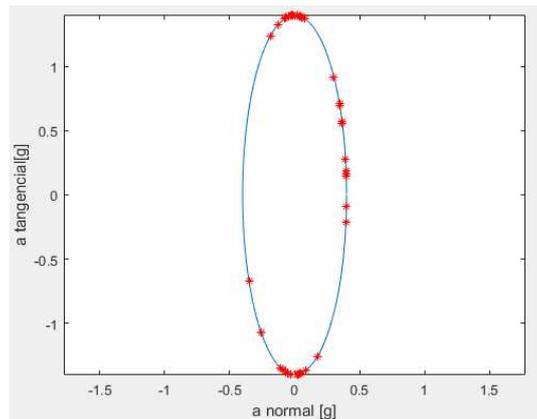


Figura 18 – Muestreo de aceleraciones (rojo) dentro del elipse de fricción (azul).

Se observa que la trayectoria optima arrojada como resultado es poco suave en ciertos puntos, algo que aparenta carecer de lógica, pero el hecho es que no es así. La trayectoria obtenida es resultado de los cambios en los coeficientes de fricción de la goma que se han ingresado. El bajo valor del coeficiente de fricción normal con respecto al tangencial indica la imposibilidad del automóvil de tomar curvas a grandes velocidades, lo que implica que el móvil tenga que moverse lo mayor posible en línea recta, frenar hasta alcanzar una velocidad apropiadamente baja para realizar la curva para luego acelerar de nuevo en línea recta. Este fenómeno, si bien es algo exagerado aquí, se observa en vehículos que poseen poca carga aerodinámica, es decir vehículos que no aprovechan la fuerza del viento para lograr una mayor fuerza normal entre el piso y los parches de contacto (normalmente llamada *downforce*). Al poseer menor fuerza normal al piso, la fuerza de rozamiento que mantiene el vehículo en la trayectoria que pretende realizar es mucho menor, por ende el piloto tiende a “quebrar” la curva, desacelerando lo más posible, luego lograr el giro para por ultimo volver a acelerar.

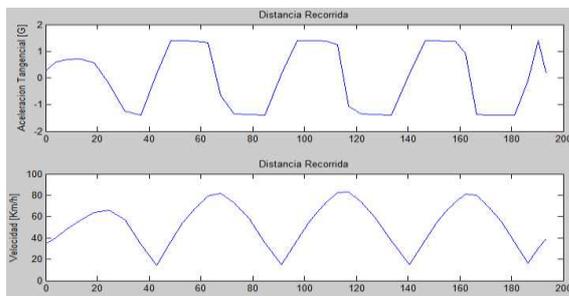


Figura 19 - Perfiles de aceleración tangencial y velocidad obtenidos para "Circuito Cuadrado II".

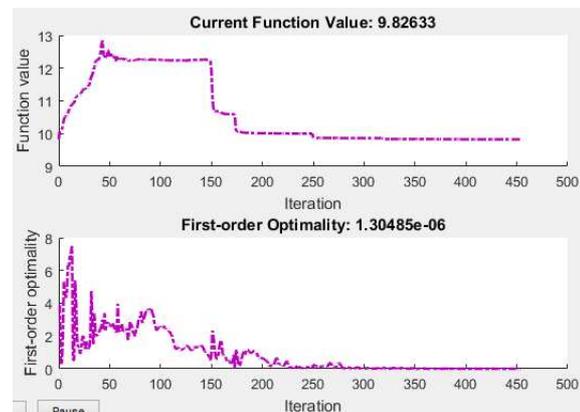


Figura 20 - Valor del Tiempo de vuelta y el criterio de optimalidad de primer orden vs iteraciones.

4.4. Circuito Oscar Cabalen

Habiendo cotejado la consistencia física de los resultados que arroja el optimizador, se procede a resolver un caso de aplicación directa. Este es la trayectoria optima que se debe realizar para lograr el menor tiempo de vuelta en el circuito Oscar Cabalen, situado en las afueras de la ciudad de Alta Gracia,

Córdoba, Argentina. Este circuito es sede de numerosas competiciones automovilísticas argentina, tales como el SUPER TC 2000 y el TURISMO CARRETERA.



Figura 21 - Fotografía satelital del circuito "Oscar Cabalen".

Las condiciones iniciales de búsqueda del mínimo y los coeficientes de fricción son los siguientes:

$$\begin{aligned} \mu t &= 1.9; \quad \mu n = 1.9 \\ \alpha_i^0 &= 0,5 \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n \\ \alpha_i^0 &= 1 \frac{m}{s^2} \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n \\ y \\ v_1^0 &= 0 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

y

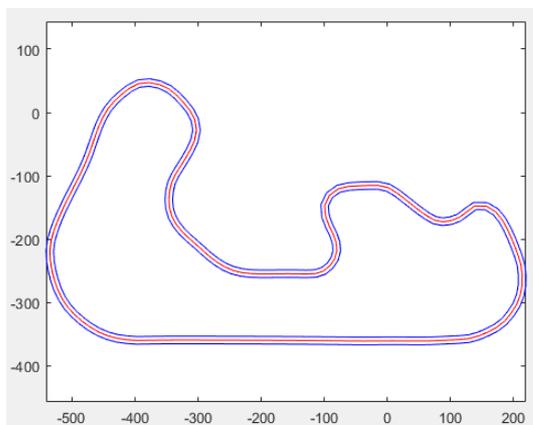


Figura 22 - Trayectoria inicial de búsqueda de mínimo, para el circuito "Oscar Cabalen".

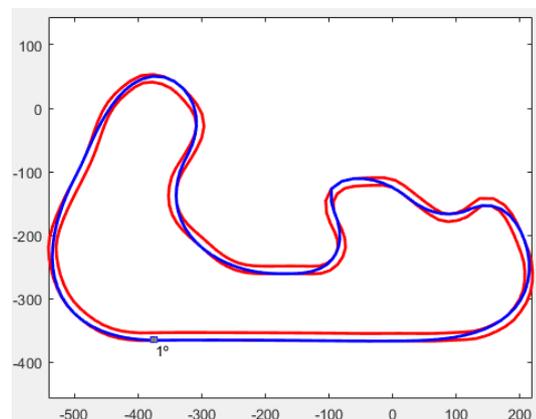


Figura 23 - Trayectoria óptima encontrada para el circuito "Oscar Cabalen".

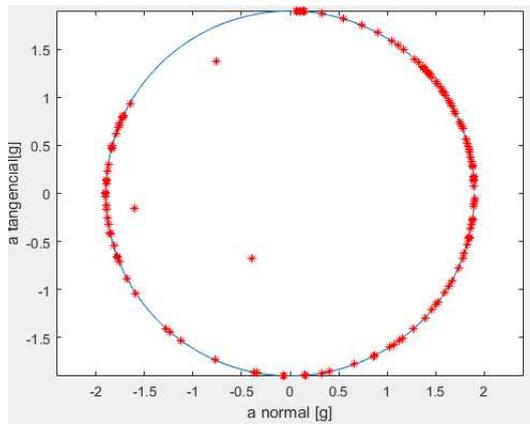


Figura 24 – Muestreo de aceleraciones (rojo) dentro del elipse de fricción (azul).

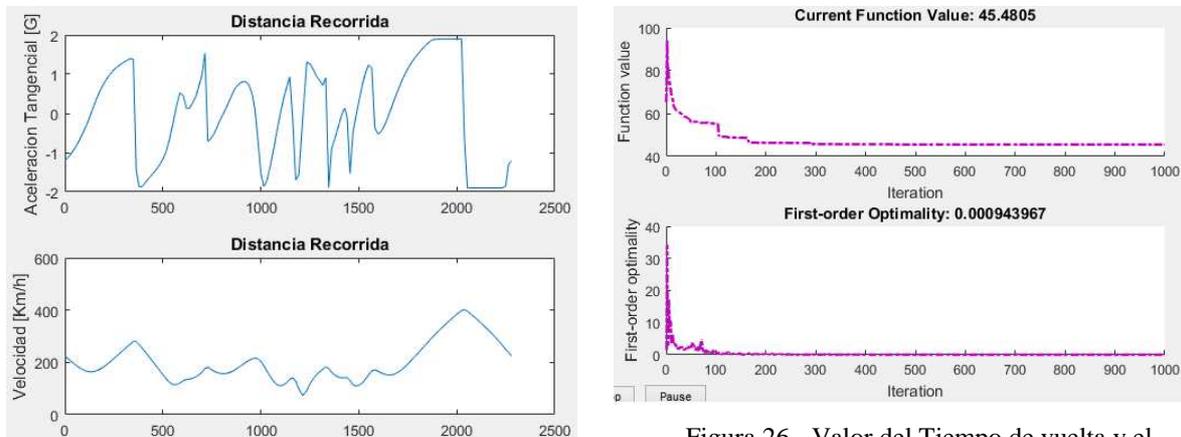


Figura 25 - Perfiles de aceleración tangencial y velocidad obtenidos para "Circuito Oscar Cabalen".

Figura 26 - Valor del Tiempo de vuelta y el criterio de optimalidad de primer orden vs iteraciones.

Se observa en este ejemplo que las velocidades maximas alcanzadas para este circuito cercanas a 400[km/h] son algo elevadas con respecto a las obtenidas a las categorías actuales en las que es posible lograr 300 [km/h].

4.5. Circuito Oscar Cabalen II

Aquí se presenta un ensayo en el mismo circuito del inciso anterior pero implementando un modelo de elipse de fricción descentrado.

Las condiciones iniciales de búsqueda del mínimo y los coeficientes de fricción son los siguientes:

$$\mu t = 1.2; \quad \mu n = 1.6 \quad c = -0.8$$

$$\alpha_i^0 = 0,5 \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

$$a_i^0 = 1 \frac{m}{s^2} \text{ con } i = 1,2,3 \dots, n$$

y

$$v_1^0 = 0 \frac{m}{s}.$$

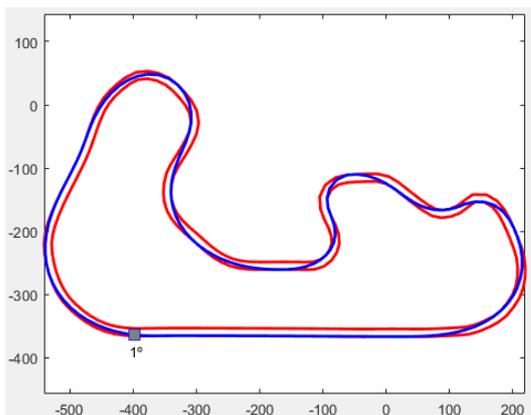


Figura 27 - Trayectoria optima encontrada para el circuito "Oscar Cabalen".

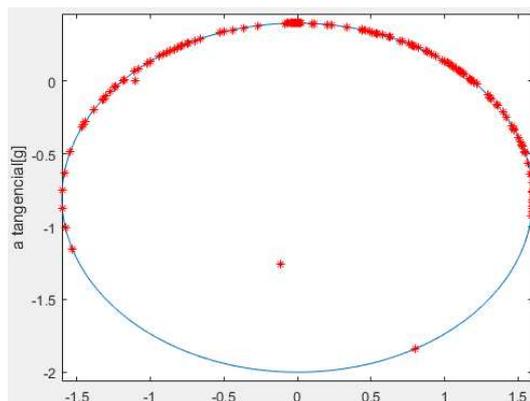


Figura 28 - Muestreo de aceleraciones dentro del elipse de fricción (azul).

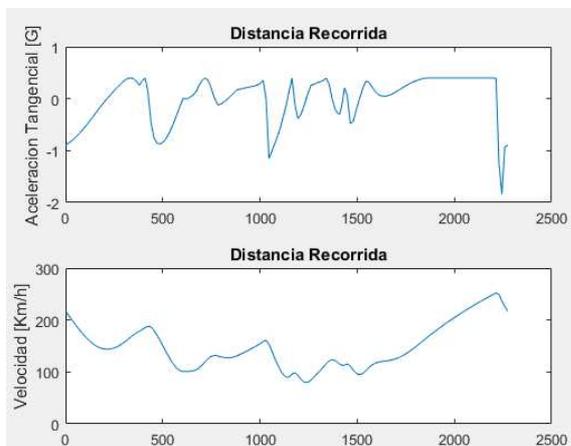


Figura 29 - Perfiles de aceleración tangencial y velocidad obtenidos para "Circuito Oscar Cabalen" utilizando modelo de elipse descentrado.

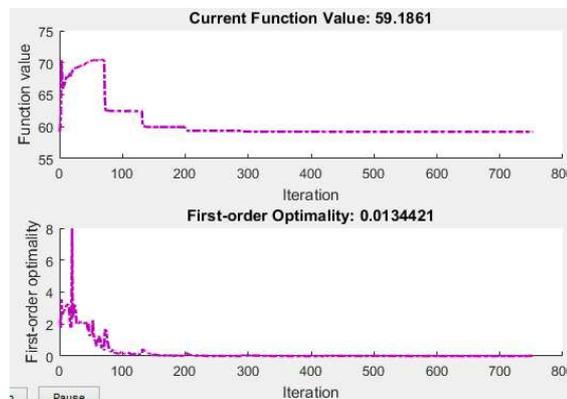


Figura 30 - Valor del Tiempo de vuelta y el criterio de optimalidad de primer orden vs iteraciones.

Los perfiles de velocidad obtenidos con modelos de elipse de fricción centrada y descentrada son similares, si uno superpusiera uno encima del otro se podría ver que están levemente deformados. Es posible visualizar que las velocidades máximas que puede alcanzar el móvil son sensiblemente menores utilizando un modelo de elipse descentrado, algo que era esperado obtener ya que a menor grado de aceleración tangencial menores serán las velocidades alcanzadas. Con este método es únicamente posible reproducir el grado de desbalanceamiento que existe entre la potencia motriz y la potencia de frenado presente en un automóvil real. No se debe pensar que puede representar de alguna manera ficticia la reducción de máxima aceleración posible debido al rozamiento del aire, ya que esta disminución solo estaría presente a grandes velocidades, en cuanto que este modelo implementa un mismo límite a todas las velocidades.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un método de optimización de trayectorias de circuitos de competición automovilística utilizando modelos dinámicos de masa puntual con restricciones de adherencia de elipses de fricción centrados y descentrados. Múltiples ejemplos de carácter académico han sido desarrollados y también se ha implementado esta metodología de optimización a circuitos reales.

Si bien el modelo de masa puntual sugiere una excesiva simplificación del problema, este permite representar fenómenos de frenaje tales como los que se experimentan en automóviles con baja carga aerodinámica, en donde es necesario imprimir una gran desaceleración tangencial en ausencia de aceleraciones normales para lograr una velocidad adecuada de tránsito de curva.

Los ensayos numéricos evidencian también el hecho de que para lograr el tiempo mínimo de vuelta, es estrictamente necesario operar el vehículo al límite de sus capacidades, es decir, en las cercanías y sobre la elipse de fricción.

6. REFERENCIAS

Kelly, M. P. *Transcription Methods for Trajectory Optimization: A beginners tutorial*. Cornell University. Ithaca, New York, 2015.

Lipp, T. and Boyd, S. Minimum-time speed optimisation over a fixed path. *International Journal of Control*, 87(6):1297-1311, 2014.

Milliken, W. and Milliken, D. L. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers Inc., 1995.

Rao, S. S. *Engineering optimization : theory and practice*. 4 ed. John Wiley & Sons, Inc., 2009.

Rucco, A., Notarstefano, G. and Hauser, J. Computing minimum lap-time trajectories for a single-track car with load transfer. *51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 6321-6326, 2012.

Soutas-Little, R., Inman, D. J. and Balint, D. S. *Ingeniería Mecánica: Dinámica - Edición Computacional*. Cengage Learning, 2009.

Velenis, E. and Tsiotras, P. Minimum Time vs Maximum Exit Velocity Path Optimization During Cornering. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 1:355-360, 2005.